统计流体力学

原版作者： A. S.莫宁（A. S. Monin）和A. M.雅格洛姆（A. M. Yaglom）

作者对英文版进行了更新、增补和修订

英文版编辑： 约翰·兰姆利（John L. Lumley）

中文翻译：钱磊

英文版前言

工程中必须处理的以及人们在自然中碰到的流体，其流动在绝大多数情况下是湍动的，对这些流动的描述需要一种统计性的方法。容易描述的层流（Laminar flow）异常少见。我们相信，流体力学不能只局限于这些很少碰到的特殊情形，并且个别层流的经典描述虽然无疑重要而有价值，但是只能作为真正湍流理论的导引章节。在湍流理论中，研究的目标是宏观上相同外界条件下的流动系综的性质。

我们希望这样的观点在整个流体力学界普及，这是我们的书的目标之一。出于这个原因，我们对英文版的问世非常高兴，它将帮助我们关于流体力学的观点在说英语的国家中传播。

我们试图在这本书中总结不同国家的研究中所描述和讨论的大部分现代湍流理论的基础性工作和思想。这就是为什么这本书有那么厚。但是当然，在选材中反映了我们自己的科研兴趣，很大一部分精力集中在我们自己做出了巨大贡献的问题上－－特别是A.N.柯尔莫哥洛夫（我们是他的学生）关于充分发展的湍流（developed turbulence）局域结构的理论，以及分层介质中的湍流理论，这些理论有广泛的应用，主要是在地球物理中。

湍流力学是一门活跃的科学，在我们著作的俄文版出版（1965年第一卷，1967年第二卷）之后，本领域出现了很多有趣的新工作。现在的版本增加了很多新的工作的信息（结果，本书引用的文献增加了数百篇），进行了一系列改进和增补（所有这些工作都是第二作者完成的）。处理流体动力学稳定性和湍流转捩（transition）的第二章，以及讲述热分层的边界层中湍流实验结果的第八章进行了特别大幅度的修改。

我们对我们的编辑，J. L.兰姆利教授深表感谢。他为改进我们书的英文版做出了很多努力。

A. S.莫宁
A. M.雅格洛姆

英文版编辑的话

这是俄文第一版《Статическая гидромеханика》的翻译。在编辑翻译稿件时，广泛使用了联合出版物研究处（Joint Publications Research Service）在美国环境科学管理局（U.S. Environmental Science Services Administration）的K. L.卡德尔要求下翻译的第一卷，以及英国气象研究司（British Meteorology Research Division）的F.帕斯奎尔发起的第一卷第四章的翻译。

编辑好的英文稿发给了雅格洛姆，他对技术性内容进行了广泛的增补、修改和订正，之后又进行了编辑。俄罗斯的技术文章倾向于充斥着内部交叉引用，这对于说英语的人来说听起来多余；此外，俄语屈折的特征使得句子结构复杂，令人目不暇接。一个尽职的译者不愿意翻译得太随便，结果译文保留了原文清晰的意味。雅格洛姆对英语文风有优秀的感觉，在他修改时他也大量建议更自由的意译，它们在英语中听起来更自然。作为编辑，我想表达对他工作的感谢，这个翻译中的好的地方全归于他，而余下的不足都归于我。

J. L.兰姆利

前言

本书中所讨论的湍流理论基于对（通常看作连续体的）液体流和气体流的宏观描述以及流体力学经典方程。然而，与普通的流体力学不同，湍流理论不研究单独的流体流动，而是研究具有相同的宏观外部条件的一组流动的统计性质。所以，本书的题目是《统计流体力学》。然而，我们必须强调，本书中没有讨论从气体的动理学理论的统计规律推导流体力学的宏观方程，这些内容有时被称为本书这个题目[1]。

引言中概述了与湍流有关的基本概念和思想以及我们讲述湍流力学的方法，还简单描绘了湍流理论的历史发展，给出了本书两卷的计划。引言意在最一般地描述最新湍流理论的主要问题和方法，并解释它的一些实际应用。自然地，我们必须在此使用很多在本书接下来部分才会详述的概念。

本书分为章、节、小节。章节的编号是连续的，而小节的编号限制在每一节中。节和小节的编号在小节号中是分开表示的（例如，第2节第4小节表示为2.4）。方程也类似编号：例如，方程（2.15）是第2节的第15个方程。当提到每一卷末的文献列表中所列的工作时，我们引用作者名字以及在放在括号中的发表日期。当所引的一个给定作者的多篇工作出现在同一年中时，进一步用字母表示。除了在引言中，作者首字母只在必须区分两个同姓氏作者时给出。

我们在本书中尽可能使用公认的符号。在不同作者对同一物理量使用不同符号的众多情形，我们通常选择其中一个，不引入新的符号。在一些情况下，这导致在本书不同部分对不同物理量使用同一符号。有时，出于各种原因，已被证明在对于同一物理量在本书不同章节使用不同符号也是方便的。在所有这些情况下，所用的符号在书中有说明。

这本书代表了两位作者的共同工作。我们觉得我们必须指出我们经常与我们学生时代的老师安德烈·尼古拉耶维奇·柯尔莫哥洛夫进行的讨论对本书的写作、我们自己在湍流领域的工作所产生的巨大影响。我们试图在本书中反映柯尔莫哥洛夫的很多思想。

[1]译者注：即《统计流体力学》。

我们也非常感激A. M. 奥布霍夫，本书的发起人之一，我们与他讨论了材料的选取和许多问题的细节阐述。部分手稿由L. A. 迪基、Ye. A. 诺维科夫和V. I. 塔塔尔斯基审阅，他给出了很多有益的评论。在讨论大气湍流实验数据的分析时，A. S. 古维奇和L. V. 茨万很活跃。G. S.戈利岑帮助我们准备和编辑了手稿。我们谨向所有这些同仁表示衷心的感谢。

A. S.莫宁

A. M.雅格洛姆

译者序

本书自问世以来已经接近五十年。湍流研究在五十年间已有很多进展。但相对而言，湍流是一个发展缓慢的领域，所以这本书的内容仍然不显得过时。

译者才疏学浅，读者如果发现错误或不妥之处，请邮件联系或访问译者博客（https://blog.sciencenet.cn/blog-117333-1385929.html）留言。

译者是中国科学院大学教师。本书得到了中国科学院青年创新促进会资助（会员编号：2018075, Y2022027）。

钱磊

邮箱：lqian@nao.cas.cn

目录

图形列表

表格列表

引言

本书致力于讨论液体和气体湍流的力学。它从流体力学基本方程开始，一般来说不要求读者预先有湍流领域的知识。由于这个原因，在我们看来，值得在此简单解释一下本书中将要处理的问题。

众所周知，所有液体和气体流动可以分为两种截然不同的类型：宁静平滑的流动称为“层流”，以及它们的反面，“湍流”，在湍流中速度、压强、温度和其他流体力学量以无规律的方式涨落，它们具有极端尖锐和不规则的时空变化。作为一个典型的例子，图1显示了大气表面层中的风速、速度的垂向分量和温度的时间涨落。图1的数据是使用特殊的精密低惯量仪器测量速度和温度而得到的。这些曲线的复杂性马上就表明了空气的运动是湍动的。图1展示的轨迹中看到的不同周期和幅度的各种涨落表明湍流相比于简单层流的复杂结构。这种复杂的结构影响了流动的很多性质，这些性质在层流和湍流情形大不相同。所以，湍流具有更强的动量传递（打个比方，湍流介质有巨大的有效粘滞系数）能力，因而在很多情形它们在与流体接触的刚体上施加更大的力。类似地，湍流有更强的热量传递、可溶混合物和悬浮颗粒传播以及化学反应传播（特别是燃烧）能力。由于存在内部不均匀性，湍流能够散射声波和电磁波，引起它们幅度、相位等的涨落。

上述湍流的性质无疑对自然科学和技术中的很多问题有非常重要的意义。所以，我们会多么频繁地碰到湍流这个问题无疑是有趣的。人们发现在自然和技术中实际碰到的绝大多数流动实际上是湍流，而在流体力学中仔细研究的层流只是非常罕见的例外。

特别是，地球大气中的各种空气运动，从表面层的微风（对应图1的测量）到行星尺度的一般性大气环流，都是湍动的。大气湍流在大气热量和水汽传递、陆地表面或水体的蒸发以及大气与下表面之间的热力学及动力学相互作用（这对于天气变化有相当大的影响）中起着基础性的作用。大气湍流也决定了大气中混合物的扩散，大湖、大海和大洋上风浪的产生，海洋中风环流的产生，飞机和其他飞行器的振动以及地球表面很多结构的振动。最后，折射率的湍流涨落显著影响了来自地面上和宇宙天体的光和

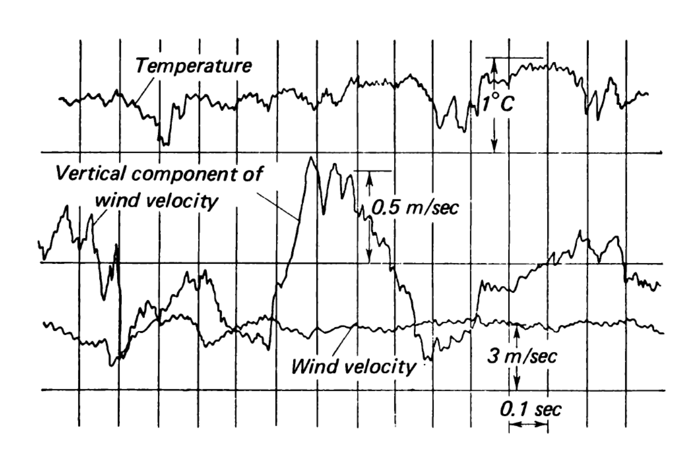


图 1 温度、风速和风速垂向分量涨落的典型例子。

射电波的传播。

河流、湖泊和海洋中的水流同样是湍流，拥有比地球大很多个量级的巨大尺度的星际星云中的气体运动也是湍动的。最后，实际上所有在技术和工程中遇到的管道中的流动都是湍动的，例如，在水管、煤气干线、石油管道、喷气发动机喷嘴中；运动的飞行器表面上的边界层中、从喷嘴喷出的液体或气体高速喷流中、快速运动的刚体——螺旋桨桨叶、涡轮叶片、子弹、炮弹和火箭后面的尾波中的运动也都是湍动的。因此，湍流确实在我们周围的自然界和使用液体和气体流的装置中无处不在，故而它的研究从实用的角度来看是异常重要的。

从纯理论的观点来看，湍流作为具有大量自由度的非线性力学系统也非常有趣。事实上，严格地说，任何连续介质的运动都是由无限数量的广义坐标（例如，速度场相对空间坐标函数的某些完整系统的膨胀系数）描述的。对于层流运动，这些坐标可以通过这种方式选取，使得只有少量相应的自由度被激发，也就是实际参与运动。然而，对于湍流运动，总有大量自由度被激发，因此任何物理量随时间的变化都由含有大量傅里叶成分的函数来描述，也就是由性质极其复杂的函数来描述（参见图1）。所以，在这种情况下，试图描述对应于被激发自由度的所有广义坐标的时间变化（也就是，寻找流动速度、压强等物理量场的时间依赖的数学表达式）几乎无望。湍流理论中唯一的可能是使用统计描述，基于对全体（即，大量相似物体集合中的）现象所固有的特定统计规律进行研究。因此，只有研究相同宏观外条件下的一组流体流动的统计性质的统计流体力学可以给出湍流理论。

湍流理论从本质来说不可能不是统计性的，也就是说原则上不可能单独地描述速度、压强、温度和其他湍流特征量的场。此外，即使可能，

这种描述也没什么用，因为所有流动的极端复杂和不规则的性质使得不可能在任何实际问题中使用它们的精确值。因此，文献中经常看到的“半经验”和湍流统计理论的对比是没有意义的。当然，半经验理论也是统计性的，和其他湍流理论的区别不在于避免使用统计特征量，而只在于确定它们时所用的方法。

在讨论湍流理论的统计性质时，通常与研究相互作用分子的多粒子系统的气体动理学作比较。在这样的意义下这种比较是合理的，在两个理论中，单个力学系统演化的精确描述都是不可能并且实际上是无用的。然而，必须记住，吉布斯、玻尔兹曼和其他人研究的分子系综的统计力学和黏性流体的统计力学之间有根本的不同。这主要与这个事实有关：一个分子系综的总动能不随时间变化（在任何情况下，在气体动理学采用的对分子相互作用的简化假设下），而真实流体的动能总是在粘滞的作用下耗散为热量。不那么重要但仍然重要的是，分子系综本质上是离散的，它们的时间演化由常微分方程组描述，而在流体力学中我们处理的是连续介质的运动，由偏微分方程组描述。因此和气体动理学的类比对构建湍流理论几乎没有帮助，只对初步理解物理理论统计描述的概念有用。

也许更富有成果的是湍流理论和量子场论之间的类比。这与相互作用场的系统也是一个理论上有无穷多自由度的非线性系统有关。两个理论中使用的数学技术类似。这使得我们可以期望一个领域中相当大的进步也会对另一个领域产生决定性影响。然而，目前量子场论遇到了与其第一性原理有关的巨大困难，而在湍流理论中仅有部分成功。因此，这两个理论中的一个还未对另一个产生很大影响。[2]

尽管在自然界和技术设备中碰到的流动通常是湍动的，但在所有现有的流体力学课程中，最多有几节是关于湍流理论的。这些章节通常只包含一些对无序流动的统计描述方法以及这些流动统计性质的不连贯叙述。关于湍流的专著文献也非常缺乏，总共只有几本（几乎所有这些专著都列在本书末尾的文献列表中了）；而且，很多这种专著都是关于相对狭窄主题的书。不难理解形势为什么不令人满意。湍流比层流复杂得多，它们的研究需要新方法。这些方法不同于数学物理的经典方法，这些方法近两个世纪被认为是唯一适合定量研究自然定律的方法。逻辑上精确地描写连续介质统计力学所需要的数学技术，即随机场论仅在过去25-30年才发展起来，除一小部分概率理论专家外几乎不为人知。也正是在这些年间发展出了湍流的现代理论（即使到现在也远远没有完成）。然而，我们觉得这一领域中已有的成就当然应该是每个研究流体力学和理论物理的科学家必须掌握的重要知识，如果不是这样，那仅仅是因为湍流理论还相对较新。我们相

[2]译者注：近年来，这方面已经有一些进展。

信，未来这个理论在大学的教科书和流体力学课程、所有流体力学和理论物理专家的教育计划和各种研究项目中的地位将很快提高。如果我们的书能对这些发展做出一些贡献，我们确实会很高兴。

***

现在我们简单谈谈湍流的历史。我们将列举方法和结果，对这些内容的详细描述是这本书的基本部分。同时，我们将试图解释我们为什么值得在统计流体力学发展的现在这个阶段写这样一本书。

十九世纪上半叶人们已经指出存在两种截然不同的流动，现在称为层流和湍流。然而，湍流理论在奥斯本·雷诺（Osborne Reynolds 1883；1884）杰出的开创性工作中才出现。在这些工作中，雷诺首先关注了管道中流体流动从层流转变为湍流的条件。对这些条件的研究让他找到了黏滞不可压缩流体流动的动力学相似性的一般判据。在没有外力、几何相似性的时候，这个判据就是所谓的“雷诺数”$\mathrm{Re} = UL/\nu$相同，其中U和L是流动的特征速度和特征长度，ν是流体的运动学黏滞系数。从动力学角度，雷诺数可以解释为施加于流体上的惯性力和黏滞力的典型值之比。导致不同部分以不同速度惯性运动的流体产生混合的惯性力也导致了能量从大尺度运动向小尺度运动转移，从而有助于形成湍流所具有的尖锐的小尺度不均匀性。相反，黏滞力有助于把小尺度的不均匀性平滑掉。因此我们可以预期Re值足够小的流动是层流，而Re足够大的流动是湍流。这是雷诺提出的一个基本结果。

雷诺对湍流理论的另一个重要发展也做出了贡献。他提出把湍流中的所有流体动力学量的值表示为平均（规则的）和涨落（不规则的）部分，放弃描述单个流体力学场细节的那种实际上没有希望的尝试，而是只研究在空间和时间上相对变化平稳的平均值。对于确定平均值，雷诺提出使用时间平均或空间平均，但实际上他只用了平均运算的某些代数性质。这些性质在应用于流体力学方程时可以得到相对较多的启示。所以，虽然如今在研究湍流时我们对平均的理解不同于雷诺，但他的所有推导仍然是正确的，因为他使用的平均的性质被证明和现在对这个运算的理解完全相符。

这里我们将解释如今在湍流理论中是怎么理解平均的。在当今的统计流体力学中，总是假设湍流的流体力学场是概率理论意义下的随机场。换句话说这个场的每个实例都被认为是从“所有可能的场的统计系综”中取出的“样本”。这样的统计系综由时空点的函数集合上给定的统计测度描述，满足必要的运动学和动力学条件（由流体力学产生）。任何流体力学量的平均可以理解为对相应统计系综的概率平均。此外，雷诺要求的平均运算的所有性质都遵循众所周知的概率论平均值（即数学期望）的性质，

在概率论教科书中有描述。这立即消除了应用时间和空间平均所固有的很多困难。当然，（以这样的构想）在实际世界中解释形式理论的结果需要使用某种各态历经（ergodicity）假设，这个情况在所有统计物理的应用中都是存在的。

在前一段中，我们偏离了按时间顺序叙述湍流理论形成的基本阶段的原则。然而，在回到历史回顾之前，让我们给出当今湍流统计描述的一般问题（或者简单地说“湍流问题”）的公式。为简单起见，我们将局限于不可压缩流体的情形。在这种情况下，流动完全决定于一个无源速度场（即，无散度的速度场）$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\{u_1(\boldsymbol{x},t),u_2(\boldsymbol{x},t),u_3(\boldsymbol{x},t)\}$，其中$u_1,u_2,u_3$是速度分量，$\boldsymbol{x}$是空间中的一点，$t$是时间（压强场可以借助运动方程用速度场表示）。这里，湍流问题简化为在湍流相空间$\Omega=\{\omega\}$中寻找概率分布$P(\mathrm{d}\omega)$，点ω是满足流体力学方程和施加在流动边界上的边界条件的所有可能的无源矢量场$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$。在很多情况下，湍流问题的一个较窄（即较简单）的公式描述也被证明是有用的；这里，仅考虑流体力学量同时的值（即，发生在同一时刻的值）。用这种方法，湍流问题包括在像空间$\Omega=\{\tilde{\omega}\}$ 中找到概率分布$P_t(\mathrm{d}\tilde{\omega})$的一个单参数族，点$\tilde{\omega}$ 是满足相应边界条件（这些边界条件可能是时间依赖的，所以，我们在相空间的符号Ω_t中引入了下标t）的所有可能的无源矢量场$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$。分布$P_t(\mathrm{d}\tilde{\omega})$的时间依赖反映了速度场按照流体力学方程的演化。实际上，如果我们把这些方程的解形式地写为$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=T_t\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0)$，其中$T_t$ 是相应的非线性算子，那么显然对于空间Ω_t的任何可测集A，等式$P_t(A)=P_0(T_{-t}A)$ 成立，其中属于Ω_0的$T_{-t}A$是所有在算子T_t作用下变换到属于集合A的场$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$的初始速度场$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0)$。所以，我们发现概率分布组$P_t(\mathrm{d}\tilde{\omega})$ 原则上唯一地由给定的初始分布$P_0(\mathrm{d}\tilde{\omega})$确定。结果，在所讨论的公式描述中，湍流问题是给定初始条件的泛函空间中概率测度演化的问题。

完全确定概率分布函数$P(\mathrm{d}\omega)$或者至少$P_t(\mathrm{d}\tilde{\omega})$是极端困难的，现在还远未解决。然而，在很多实际情形，没有必要完全解决湍流问题。在大多数实际情形，只需要确定湍流的流体力学场概率分布的一些最简单的数值特征就足够了，例如，不同时空点的速度和压强的平均值，在某个给定点场的涨落的二阶矩（例如，描述了湍流的强度的速度涨落的方差，或者表示了动量流和热量流湍动成分的速度分量和温度的二阶矩），以及两个时空点的流体力学场涨落之间的关联系数（描述时空的统计一致性或者湍流的流体动力学场结构）。因而自然地，湍流理论的大部分研究不致力于把湍流问题作为一个整体，而是试图确定（尽管是近似地）湍流的流体力学场的概率分布的一些简化特征。这些研究得出了一些关于湍流物理性质的有价值的结果，给出了很多重要实际问题令人满意的答案。

现在回到湍流理论的历史概要，我们必须首先提到杰弗里·泰勒（Geoffrey Taylor, 1921）关于湍流输运的有趣工作，其中首次展示了速度场相关函数（即混合二阶矩）的重要作用（不是对一个给定点上简单的欧拉速度，而是对一个给定流体粒子的更复杂的拉格朗日速度）。然而，总的来说，关联函数和其他流体力学场的统计矩量必须被认为是湍流的基本特征的想法是L. V. 凯勒和A. A. 弗里德曼（L. V. Keller, A. A. Friedmann, 1924）首次提出的，他们提出了一种（用实际流体运动方程）得到湍流的流体力学场任意阶矩量的微分方程的一般方法。确定所有这些矩量（给定某些一般假设）等价于确定泛函空间$P(\mathrm{d}\omega)$或$P_t(\mathrm{d}\tilde{\omega})$ 中相应的概率分布，即湍流问题的解。所以，所有可能矩量的总数无限的弗里德曼-凯勒方程组给出了湍流问题的一个解析公式。但是这个方程组非常复杂，这个方程组的任何有限子集总是不封闭的，即未知量数量比方程多（不可能得到一个封闭的有限数量的矩量方程组是流体力学方程非线性的一个直接结果）。所以当我们研究弗里德曼- 凯勒方法应用于有限数量的矩量时，会出现矩量方程封闭的问题。这个问题在很多方面和气体动理学理论中多重分布函数的一系列方程的封闭问题类似。

可以说湍流动力学的大部分理论工作都致力于（并且仍然在致力于）发展方法，克服与封闭问题相关的困难。到目前为止，这还不完全可行。然而，在湍流理论中已经在两个间接的方向得到了很多具有巨大实用价值的重要结果：第一个方向是致力于湍流大尺度分量的描述（和整体流动尺度相当的尺度）；第二个方向是小尺度分量的描述。这两个方向的基本差异在于，湍流的大尺度特征很大程度上依赖于流动的边界几何形状和外力的性质，因此对于不同类型的流动会非常不同。小尺度的特征在很大程度上具有普适性。

大尺度成分对湍流介质中的动量和热量传递起着基础性作用，因此它们的描述对于重要的工程问题是必要的，比如经过刚体的流动阻力和传热的计算。因此，在湍流理论的发展过程中很自然地首先关注大尺度分量的研究。技术的迫切需求要求对管道、渠道、边界层中的湍流和自由空间湍流（喷流、尾流等）的大尺度成分的性质进行大量实验研究。在这些实验的基础上建立了“半经验湍流理论”。这些理论使得实验数据能被系统化并用于预测随后类似实验的结果。

湍流半经验理论的提出是统计流体力学发展的一个重要进展。这一步早在20世纪第二个十年就开始了，它在接下来二十年取得了丰硕成果（20世纪20年代和30年代）。然而，半经验方法的可能性仍未完全穷尽，这个领域中有价值的工作仍然在继续。杰弗里· 泰勒（Geoffrey Taylor, 1915；1932）、路德维希·普朗特（Ludwig Prandtl, 1925）和西奥多· 冯·卡

门（Theodor von Kármán, 1930）对湍流理论中的半经验方法的发展做出了决定性贡献。

湍流的半经验理论基于湍流和分子混沌之间的类比。其基本概念包括混合长（类似于分子平均自由程）、湍流强度（类似于分子速度的均方根）和湍流黏滞系数、热导率和扩散系数。使用上述类比，假定湍流应力张量线性依赖于平均应变率张量，湍动热流（或者被动混合）线性依赖于平均温度梯度（或者混合浓度梯度）。这些假设的关系由某些假设的定律进行补充，这些定律的一般形式是在定性的物理考虑的帮助下建立的，或者就是从简洁性的考虑“猜测”出来的。这些假设（或者一些从他们得出的简单推论）由经验材料验证，同时确定半经验关系中未定常数的值。如果得到的结果令人满意，则由他们得出的推论被推广到与经验数据所代表的流动实际对应的一整类湍流中去。

20世纪20年代和30年代的半经验理论通常只考虑湍流最简单的统计性质。一般来说，这些理论中采用的假设使得无限弗里德曼-凯勒方程组（infinite Friedmann-Keller system）的前几个（所谓雷诺方程）可以封闭，只包含流体力学场单点的一阶和二阶矩。对称性考虑和某些简化的相似性假设（特别地，这在所有的湍动喷流和尾流的半经验理论中都是一个基本的部分）在半经验理论中也起到了重要作用。然而，基于湍流机制的真实物理考虑的相似性假设并没有形成这些理论的唯一基础，还总是需要更专门和更人为的假设辅助（有时没有任何实际的必要性）。因此，举个例子，半经验理论最重要的推论之一是管道、渠道和平板边界层中的平均速度的分布的普适的（universal）对数律。（这里普适指的是这个规律对所有足够大的雷诺数成立。）目前知道这个规律可以从一个关于半空间中湍流的各种量的概率分布的相似性假设推导出来，或者从基于对（在此情形决定了湍流类型的）物理量自然假设的量纲分析推导出来。然而，在半经验理论中，这个结果总是用一些特殊的假设来说明，不幸的是，这种带有人为性的推导到现在还充斥着流体力学教科书。

湍流的半经验理论对于解决一些重要的实际问题是有价值的。然而，这些理论采用的假设经常没有可靠的物理基础，对于理解湍流的本质没有什么贡献。然而，非常大的雷诺数湍流小尺度成分的普适稳态统计的理论是完全不同的问题。这个理论是A. N. 柯尔莫哥洛夫（1941a，b）提出的小尺度成分新的相似假设的直接结果[A. M. 奥布霍夫（1941）基于影响这些成分演化的物理过程的一个特殊模型得到了同样的结论]。这个理论的提出是统计流体力学发展的又一大进展。

在继续讲述柯尔莫哥洛夫（A. N. Kolmogorov）和奥布霍夫（A. M. Obukhov）对湍流理论的贡献之前，有必要在这个历史回顾中提到他

们的两位前辈。一位是英国科学家刘易斯·理查德森（Lewis Richardson, 1922；1926），另一位是我们之前已经提到两次的杰弗里· 泰勒（Geoffrey Taylor, 1935a）。在他1922年发表的杰出论文和其他一些论文中，理查德森对大雷诺数情形的湍流混合的物理机制提出了一些深刻的见解（当时几乎没有人注意到）。根据他的假设，发展充分的湍流由各种层级“涡旋（eddies）”（即扰动或非均匀性）的序列组成。这里，特定层级的“涡旋”的出现是更大的“涡旋”失稳的结果，借用了它们的能量，从更大的“涡旋”自己来说，它们失稳并产生了更小下一层级的“涡旋”，并向这些“涡旋”传递它们的能量。因此出现了涡旋破碎的一种独特的“级联过程”，其中整体流动的能量传递到越来越小尺度的运动，一直到可能的最小尺度的运动，它是稳定的。因为是稳定的，这些极端小尺度的运动必然由足够小的雷诺数表征。因此黏性会发挥重要作用，因此会有相当大量的动能耗散为热量。发展充分的湍流相应的物理图像清晰地表达在了下面这首押韵的诗里，这首诗首先出现在理查德森（1922）的书的第66页，从此经常被引用如下（通常没有准确的参考文献以及最后一行）：

Big whorls have little whorls,
大涡套小涡，
Which feed on their velocity;
传递速度；
And little whorls have lesser whorls,
小涡更小涡，
And so on to viscosity
直到黏滞
(in the molecular sense).
（在分子意义上）。

理查德森只是定性地提出了这些一般性想法，没有进行任何可以用精确数学语言写出的推导。然而，他的直觉非常强大，在1926年的文章中他得以纯粹基于经验的方法建立了小尺度湍流运动的一个一般性定量规律，这个规律实际上是从涡旋破碎级联过程的数学理论得到的。这个规律包括，充分发展湍流（developed turbulence）中的一团混合物的有效扩散系数正比于这团混合物特征尺度的三分之四次方。1941年，在柯尔莫哥洛夫和奥布霍夫提出湍流小尺度成分的一般定量理论时，理查德森的“三分之四次方律”实际上是表明存在支配湍流小尺度结构的一些一般性的简单规则的唯一经验结果。

泰勒的工作在小尺度湍流运动的理论中也起到了很大的作用。G. I. 泰勒（1935a）引入了“均匀各向同性湍流”的概念，这是由这个条件决定的：有限个数时空点上流体力学量的所有有限维概率分布在任何三维坐标系的正交变换（平移、转动和反射）下保持不变。均匀各向同性湍流是湍流的一种特殊情况，其中流体力学场的统计矩量的结构和相应的弗里德曼-凯勒方程的形式极其简单。在这个简化情形下，和弗里德曼-凯勒方程封闭问题的所有理论困难仍然存在。然而，相应的方程比对应于任意湍流的一般方程更容易进行数学分析，使用它们有可能得到很多解释湍流各个方面的具体结果。

就其本身而言，均匀各向同性湍流模型不适合描述任何实际的湍流，因为真实流动不满足均匀各向同性的假设（特别地，三维均匀假设流动没有边界，平均速度严格恒定）。然而，均匀各向同性湍流的数学技术经过一定推广，被证明对于描述真实湍流的小尺度成分非常有价值。如我们后面将要解释的，这是因为可以很自然地认为这些成分的统计性质是均匀各向同性的。换句话说，任何具有大雷诺数的充分发展湍流可以被认为是局域均匀各向同性的，这立刻简化了其数学研究。

我们现在考虑柯尔莫哥洛夫的“局域各向同性湍流理论”的基本思想。我们将使用这个相对简短的表达而不是上面那个较长的。首先，柯尔莫哥洛夫对能量从大尺度成分（它们从平均流动获得能量）向越来越小的尺度传递转移的级联过程的假设做了一个重要补充，注意到由于这个能量转移过程的混沌性质，平均流的方向效应必须随每次涡旋破碎而减弱。因此，对于湍流足够小尺度的成分（即足够大的“级数（order numbers）”）这种方向效应根本不会产生任何结果。换句话说，尽管通常平均流和湍流运动最大尺度的非均匀性一般是非均匀和各向异性的，但任何雷诺数足够大的湍流在足够小尺度涨落的统计性质都可以被认为是均匀各向同性的。此外，我们很自然地期望不同级的特征周期随级数增大而减小。因此，对于足够高级数（即，足够小空间尺度）的涨落，这些周期会比平均流发生可察觉变化的时间短得多。因此，这些涨落的机制是准稳态的——实际上在一段包含大量特征周期的时间里是稳态的。

因此，我们看到对于足够小尺度的涨落，均匀各向同性以及实际上稳态的统计情形将占优势，特征是所考虑的最大涨落存在平均能流ε以及（与此能量相当的）能量在黏滞的作用下耗散为热量，这主要集中于最小尺度的涨落的范围。从这一点出发，柯尔莫哥洛夫提出假设，任何雷诺数足够大的湍流在足够小尺度的速度成分的统计是普适的，可以由两个有量纲的参量确定——（单位流体质量的）平均能量耗散率ε和黏滞系数ν。所以，借助简单的量纲考虑，我们可以推导出黏滞能产生可观影响的最大涨落的

尺度一定是$\eta = (\nu^3/\bar{\varepsilon})^{1/4}$ 的量级。因此，可以自然地假设当服从所讨论的普适统计的涨落的范围扩展到远大于η的尺度，那么必然存在一个“惯性子域（inertial subrange）”（比整个流动的典型尺度L 小很多倍，但比η大很多倍），其中黏滞不再起任何作用，即统计性质由一个参数$\bar{\varepsilon}$决定。这个假设是柯尔莫哥洛夫的第二个主要假设。

柯尔莫哥洛夫的这些假设可以得出湍流小尺度成分统计性质的一些具体推论。其中最重要的是“三分之二次方律”（由柯尔莫哥洛夫推导），根据这个定律，湍流中距离r（其中r在“惯性子域”中）的两点速度差的平方的平均值等于$C(\bar{\varepsilon}r)^{2/3}$，其中$C$是一个普适常数。这个结论的另一个形式[首先由奥布霍夫（1941）提出]是“三分之五次方律”，根据这个定律，惯性子域内的湍流动能对波数k的谱密度具有$C_1\bar{\varepsilon}^{2/3}k^{-5/3}$的形式，其中$C_1$是一个新的常数（与$C$有简单关系）。这些假设还有很多结果，我们不在此讨论。

柯尔莫哥洛夫的工作成为了湍流局域结构理论所有后续发展及其在20世纪40年代和50年代应用的基础。在此期间不仅研究了速度场局域结构，还研究了被动（即动力学中性的[3]）混合物的浓度、温度（包括热分层重流体的情形，其中有用浮力的影响，温度不能再看作是“被动”混合量）、压强和湍流加速度。湍流小尺度成分统计性质的推导在其他问题中找到了应用，例如，湍流介质中的粒子相对扩散和液滴破碎、海洋表面风浪的产生、导电流体湍流中磁场的产生和电离层电子密度的不均匀结构、大气中折射率的涨落和湍流大气中电磁波的散射和涨落以及很多其他有趣的问题。

柯尔莫哥洛夫理论的结果，最重要的上面给出的是“三分之二次方律”和“三分之五次方律”，在20世纪40年代和50年代在真实湍流的测量结果中被多次检验。然而，人们发现在实验室实验中（通常在风洞中进行）雷诺数没有大到能在湍流谱中感知到“惯性子域”，因此，超过20年的风洞测量结果不能用于检验这些定律。另一方面，自然中测量的雷诺数一般来说比实验室条件下观察到的雷诺数大得多，直到最近才给出统计弥散相对大的结果。因此，尽管总体实验数据无疑支持了这个理论，但是它还没有以完全直接的方式得到验证，对于理论中的数值参数不能给出可靠的估计。直到20世纪60年代情况才有真正的改观，现在一些研究人员已经对各种非常大雷诺数的自然和人造湍流的特征量进行了极端精确的测量。这些测量结果彼此一致性非常好，证实了这个理论的正确性，最终使得可以足够精确地确定常数C和C_1。

目前，对于认为速度的小尺度分量普适的统计性质的理论处理和实验

[3]译者注：即对动力学的影响可以忽略。

验证基本完整这一点还有很大争议。然而，为了进一步发展湍流理论，我们需要根本上新的想法，我们稍后讲述对它们的寻找。因此，现在适合总结湍流理论发展的这一重要时期，详述这一想法。尝试在某种程度上完成这项任务是本书的目的之一。

有一些寻找发展统计流体力学新方法的工作。在A. N. 柯尔莫哥洛夫（1962）和A. M. 奥布霍夫（1962）相隔一周、在1961年秋在马赛举行的两个湍流理论国际会议上发表的文章中，提出了一种方法进一步完善大雷诺数湍流局域结构的基本描述。这个方法的原理如下：如我们在上面的理论讨论中看到的那样，小尺度湍流的统计特征被假设为只依赖于能量耗散率ε的平均值。然而，实际上能量耗散场也经历了无序涨落，有理由（在理论上和纯经验上）相信它的变化范围可能非常大。这个场的统计特征显然可能取决于大尺度流动的特殊性：特别地，我们必然期待ε场的方差随Re的增大而增大。因此，由$\bar{\varepsilon}$ 单独决定小尺度湍流运动的统计特征只能解释为有条件平均值，在ε严格不变（等于$\bar{\varepsilon}$）的条件下得到。然而，将ε固定的计算结果对这个参数值的涨落平均得到的无条件平均值一般来说和条件平均值不同（它们自己可能不是普适的，即它们对于不同类型的大尺度流动不同，或者特别是依赖于Re）。柯尔莫哥洛夫和奥布霍夫的工作致力于估计这一事实的影响的方法。为了用这种方法得到明确的定量结果，我们首先需要发现能量耗散$\varepsilon(\boldsymbol{x},t)$场的统计性质，即换句话说，我们需要对湍流中能量耗散机制更细致的研究。初步估计表明，考虑能量耗散率涨落得到的对“三分之二次”和“三分之五次”定律的修正将接近于目前最好的实验数据精度的量级。

我们还必须注意到湍流方程闭合假设的一些变种，这些假设是在克莱希南(R. Kraichnan, 1959; 1962b及其他)的一系列文章中发展起来的，基于速度场的三个空间傅里叶成分直接相互作用比间接相互作用（通过所有其他傅里叶成分）重要得多的假设。我们还应该提到W.马尔库斯(W. Malkus, 1954b)提出的描述湍流大尺度成分的方法[也可参见汤森(Townsend, 1962b)和斯皮格尔(Spiegel, 1962)]，这个方法基于使用假设的“最大耗散”变分原理，把流体力学场表示为有限数量的特征函数的叠加。近年来，这两种方法都引起了很多争议－－它们导出了一些有趣和可能的结果，但它们是基于未经验证的假设，并且碰到了一些困难。例如，Kraichnan理论的初步近似导出了与柯尔莫哥洛夫理论（已经得到很好的证实）预言不符合的小尺度湍流谱的方程，表明小尺度成分和描述大尺度含能涡旋的均方速度的统计特征之间有不明确的依赖。Malkus的自由对流理论导致了与分层介质中湍流的自然相似理论的推导不相符的结果（并且表明对流流动的大尺度成分对流体的分子热导率意想不到的依赖）。同

样的理论应用于平板间的流动导出了一个非常有争议的结论－－无论雷诺数有多大，大尺度特性对分子粘性都有依赖，而且偏离了普遍接受的（实验很好地支持的）平均速度的普适对数律。因此，目前还不可能说这些方法（或者对它们的一些简单修正）会不会对湍流理论的发展产生丰硕的成果。

最后，必须提到解决湍流的一般问题的前景，这与流体力学场的"特征泛函"技术的使用有关。这些特征泛函在湍流相空间中唯一地定义了概率分布$P(\mathrm{d}\omega)$或$P_t(\mathrm{d}\tilde{\omega})$，因而找到它们就给出了湍流问题的一个完整解。在艾伯哈德· 霍普夫(Eberhard Hopf, 1952)的工作中导出了一个不可压缩流场中湍流场的特征泛函的方程。这是一个泛函导数形式的方程，它最显著的特点是线性。因此，尽管流体的动力学是非线性的，但是用特征泛函写出的统计流体力学基本问题被证明是一个线性问题。我们还应该注意到，Hopf方程形式上和量子场论中的Schwinger方程类似，后者是相互作用量子场格林函数泛函导数形式的方程组（我们已经提到了湍流理论和量子场论之间严格的类比）。

Hopf方程的求解碰到了相当大的困难。首先，因为还不清楚这个方程的具体问题应该怎么描述。第二，因为目前缺少求解泛函导数方程的任何一般方法（甚至不知道这些解是否存在、是否唯一）。近年来，函数空间积分的新数学技术（即某函数空间上的泛函的积分）连同泛函导数方程理论已经吸引了很多人注意。今天，形式上有可能以对函数空间中的某种"广义测度"（它不具备测度理论中通常测度的某些性质，因此让人想起了量子场论中名声不佳的"费曼测度"）的特定函数空间积分的形式写下Hopf 方程的解。然而，写下这个解仍然是一个纯粹形式的过程，对于高效地公式化和对特定解的研究几乎没有帮助。

***

我们简单讨论本书的内容作为这个引言的结尾。在一到两卷书中穷尽所有与湍流问题相关的问题当然是完全不可能的。（我们可以注意到Chandrasekhar (1961)的书，它实际上几乎完全只是在讲我们的2.6和2.7节及其推广的内容，这本书大约有700页！）我们不会试图穷尽但是会依我们的想法选择能帮助我们理解湍流物理性质的材料。因此，我们不会停留在特定的工程应用或与复杂统计性质计算相关的数学细节。我们将局限于最简单的流动和最简单的问题。所以我们将只处理圆柱管中的流动；我们只考虑沿平板的、周围流动没有压强梯度的边界层；扩散粒子被处理为点，和周围介质有相同的比重。此外，我们将不讨论磁场中导电流体的湍流问题。关于可压缩性的讨论只占各向同性湍流一章中的一节，使我们

能展示与之相关的一些新的物理效应。然而，我们加入了关于垂向密度分层（对于最简单的在半空间$z > 0$中的二维流动的情形）介质中湍流的一章，因为分层对湍流的效应有清晰的物理特征，可以借助广泛用于本书其他部分的一般方法进行研究。

为了尽量使这本书“有物理味儿”也决定了对研究方法的选择。湍流运动方程总是不封闭的（含有比方程多的未知量），因此湍流理论的问题不能简化为找到一些由初始和/或边界值确定的微分方程（或方程）的唯一解。在这些条件下，不可避免的是，除了运动方程，还必须引入一些其他考虑。在我们看来，在这些额外的考虑中，对相似性（基于问题在某些群变换的作用下的不变性）的考虑以及量纲的考虑（基于分离出影响所研究的湍流的物理量）具有最明显的物理意义。我们尝试最明确地考虑从量纲和相似性出发、可以用于（比通常提出的广泛得多的）湍流理论的推导。使用更特殊假设的湍流的半经验理论在本书中篇幅相对较少，我们对于半经验理论用于管流、渠流和边界层的“经典”应用的描述特别简略。（这个主题和被我们的书中完全忽略的“自由湍流”的半经验理论在S. Goldstein(1938)、L. G. Loitsyanskiy(1941)和H. Schlishting(1960)有详细讨论。）然而，我们引入了一些相对新的、较少为人所知的半经验理论的应用和相当数量的湍流输运的半经验理论（通常是湍流中混合物扩散问题的唯一理论）的应用。此外，我们通过各向同性湍流的谱详细分析了能量输运的各种假设，和半经验假设类似，但它们为湍流混合的物理机制（这在之前还没有完整讨论过）提供了一些线索。

本书对于相似性和量纲的重点关注也受限于这个事实，柯尔莫哥洛夫的局域各向同性湍流的理论（完全基于这些方法）在这里占了很大篇幅。我们已经注意到写作本书的一个诱因是希望总结雷诺数足够大的任意湍流中普适局域结构思想的发展。我们也讨论了柯尔莫哥洛夫和奥布霍夫在1961年提出的这个想法的升级版本，以及后来得到的这个问题的其他数据。我们也简单考虑克莱希南关于湍流小尺度特征的想法。但是我们只是简单提到马尔库斯和一些最近的计算有冲突的有争议的理论[见Reynolds和Tiederman (1966)]，除了简介中的历史梗概。

虽然希望对统计流体力学的理论原理进行系统性讲述，但是我们不想让我们的书具有形式化数学的特征，并一贯尝试通过分析实验数据强化理论推导。理论和实验方法的结合在所有自然现象的研究中都极其富有成果，在统计流体力学中特别必要，这个理论通常仍然处于初级状态，几乎总是基于一些需要实验验证的假设。然而，我们已经避免引入没有理论解释、不能作为一些确定的理论推导的基础的实验结果，即使这些数据本身非常有趣或者在实践中很重要。作为湍流实验数据源，在本书中我们

经常使用大气湍流。在某种程度上，这和我们二人都在大气物理研究所工作多年，对大气湍流比对其他种类的湍流熟悉得多有关系。然而，除此之外，还有一些重要原因让我们把注意力放在这类湍流上。事实上，冯·卡门（1934）称其为“……‘湍流研究’的巨型实验室”的大气具有非常有价值的性质，使得它特别适合验证现代统计理论的推导。我们已经注意到，大气运动通常具有比实验室中产生的流动大得多的雷诺数，因此对于研究非常大的Re情形的特殊规律要方便得多。此外，大气湍流的几何条件（即受刚体墙限制的半空间中的二维流动的条件，指的是大气表面层中的风，其中在很多情形“墙”可以看作平的、均匀的；或者无限空间中流动的条件，这给出了在自由大气中空气运动很好的描述）比大多数实验室实验简单。从实验室转换到大气额外产生的唯一复杂性是必须考虑热分层，但是，如我们已经注意到的，这个复杂性导致了额外的有趣的理论探讨，增加了实验观测到的规律的数量并允许基于物理的解释。

广为流传的湍流的性质、它们对于一些不同工程问题的巨大重要性以及理论家对它们的兴趣使得关于这个主题的文献数量巨大－有数万篇文章，散布于大量物理、数学、力学、化学、气象学、海洋学和工程期刊中。然而不幸的是，湍流理论极端困难，到现在也没有非常大的进展；所以，很多工作是完全经验性的，或者只是最初步的理论，或者是错误的。这些事实当然使任何对统计流体力学文献的搜寻大大复杂化。在本书中，我们最初提出限制在最少数量的必要参考文献上；然而，花了大量时间在文献调研（不调研就不可能决定什么是必要的）上之后，我们决定可能权宜之计是不限制参考文献，特别是近期的工作。我们这样做是要给读者一个关于湍流理论研究现状的足够完整的图像，帮助他找到必要的信息，让他在书和文章的海洋中有自己的方向。在书中的一些地方，我们甚至包含了简短的文献调研，其中我们尝试尽可能简短描述与所讨论的理论的特定部分相关的相当数量典型文献的内容。当然，我们意识到，大量参考文献在某种程度上拖累了一本书的行文，也（因为完全不可能引用大部分已有文献）在相当程度上增加了感觉自己在这样广泛的文献调研中被不公平地忽视的作者的数量。首先，我们想向所有这些作者表示我们的歉意，并警告读者我们决不是说我们的文献列表中所包含的文献一定是最好的或者最重要的，我们也不假装这是一个完整的文献调研。我们意识到，只要考虑优先次序（这个主题我们没有特别研究），就可能会有一些差错。

当然，在选择本书的材料时，我们个人的科学品味起了一定作用。特别是我们包含了一些我们自己的研究结果。大部分这些结果是以在我们看来更好的经过改和扩展的形式给出的；而且，通常我们以经过修改的形式讲述其他作者的结果，考虑到最新的数据以及一般的方法、术语和本书所

采用的符号。因此，很自然在很多情形，所引用的工作只包含与所引用内容等价（或类似）形式的方程或推导。

通常，由于我们想尽可能清楚地解释各种推导过程中的每个假设，我们也会偏离原始工作中的分析。特别地，我们总是试图阐明什么是来自运动方程的结果（即，来自一般物理规律），什么来自量纲分析（即，来自对影响特定效应的物理参数的完整列表的特定假设），什么需要引入特别的经验性假设（以及这些假设是什么），以及什么只是经验事实。

统计流体力学广泛使用经典流体力学和概率论的结果和方法。因此，这两个学科的知识会极大地帮助理解本书。然而，我们希望那些仅受到一般数学和物理训练的人也能读懂我们的书。考虑到这些读者，我们在前两章中包含了经典流体力学（从连续性方程和运动方程开始）和概率论（从概率本身的概念开始）中必要的基本概念。在这些以及随后的章节中，我们试图重点强调所涉及的基本原理，而不停留在技术细节上。类似地，我们从不讨论求解微分方程的方法或其他标准的数学技术，而只是直接引用答案（有时并不容易得到）。同时，我们相当细致地讨论某些不足够广为人知但重要的数学问题，这些问题传统上在力学和物理学的专业书和文献中没有（例如，遍历[各态历经]定理或随机场的谱表示）；这解释了本书只有两章用于讨论随机场的数学理论。

由于技术原因，事实证明把本书分为两卷更为方便。第一卷包含可以不依赖谱表示进行处理的问题。（或许很多我们的同事会惊讶于这些问题被放入了一本厚书中。）在此，我们讨论流体力学的一般方程和它们最简单的推论（以某种程度上更专业的可压缩气体的小震荡作为结论）；考虑了流体动力学稳定性和湍流转捩的问题（包括不稳定性的非线性理论的内容）；从概率论和随机场理论给出了一些基本概念（包括各态历经条件）；细致讨论了量纲分析和相似性分析在管、渠、边界层湍流和自由湍流（喷流、尾波等）中的应用，并且还有对主要思想和湍流理论的半经验结果的简单调研（有一些特定例子）；详细讨论了垂向密度分层的介质中湍流的相似性理论，并将得到的结果和大气表面层中风和温度涨落广泛的经验数据进行了比较；描述了湍流的拉格朗日特性和湍流扩散理论。

本书第二卷将以随机场（包括不均匀但局域均匀的场）的谱理论的一个数学章节开始；详细描述了各向同性湍流的理论（这里我们主要关心不可压缩各向同性湍流的动量方程的各种封闭方法，但也给出了和可压缩流体有关的一些结果）；考虑了足够大雷诺数的湍流的普适局域结构的一般理论（包括相对扩散理论，即湍流携带的混合物组成的云的尺寸增大）；给出了和湍流介质中电磁波和声波传播有关的基本概念，最终，基于对流体动力学场特征泛函的研究，我们考虑了湍流问题的一般公式。

第1章 层流和湍流

1. 流体动力学方程和它们的推论

1.1 不可压缩流体的动力学方程组

湍流是一种复杂的物理现象，其理论研究必须基于基础物理规律，用流体力学和热力学方程表达。所以我们将以对这些方程以及它们的一些重要结果的简单回顾作为我们讨论的开始。当然，回顾仅限于我们在随后的讨论中需要用到的那些方程和事实[关于流体力学详细讨论见，例如Lamb（1932）、Goldstein（1938）、Landau, Lifshitz（1963）、Kochin, Kibel', Roze（1964）、Longwell（1966）以及Batchelor（1967）]。如通常那样，我们描述流体的流动[1]将使用速度场

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\{u_1(x_1,x_2,x_3,t),u_2(x_1,x_2,x_3,t),u_3(x_1,x_2,x_3,t)\}$$

以及任意两个热力学量，例如压强$p(\boldsymbol{x},t)$和密度$\rho(\boldsymbol{x},t)$或温度$T(\boldsymbol{x},t)$——总结起来，需要五个“四-变量函数”。此外，我们也需要分子输运系数的值，这决定了流体的物理性质——黏滞系数μ或运动学黏滞系数$\nu=\frac{\mu}{\rho}$，以及第二黏滞系数ζ。此后，我们将需要热传导系数κ（以及热扩散系数或热导率（thermometric conductivity）$\chi=\frac{\kappa}{c_p\rho}$，其中$c_p$是流体的定压比热）。

描述质量守恒的物理规律最简单的流体力学方程是连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_\alpha)}{\partial x_\alpha}=0 \tag{1.1}$$

或

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial\rho}{\partial x_\alpha}=-\rho\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \tag{1.2}$$

在此及之后，我们将一直采用爱因斯坦求和规则，根据这个规则，任何在一项中，一个指标出现两次的地方都需要对指标的三个可能值求和，举个

[1]这里及之后，我们将使用“流体（fluid）”一词表示任何液体或气体介质。

例子，$\frac{\partial(\rho u_\alpha)}{\partial x_\alpha}$的意思和$\sum\limits_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial(\rho u_\alpha)}{\partial x_\alpha}$相同。[2] 描述应用于一小团流体的牛顿第二定律的基本动力学方程，即动量守恒方程具有如下形式

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_i u_\alpha)}{\partial x_\alpha}=\rho X_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\beta}\delta_{i\alpha}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\beta}\right),\qquad i=1,2,3 \tag{1.3}$$

其中$\rho X_i=\rho X_i(\boldsymbol{x},t)$是时刻$t$在$\boldsymbol{x}$点的外力密度的第$i$分量。从方程（1.1）可知，密度$\rho$可以从方程（1.3）左边第一项的导数$\frac{\partial}{\partial t}$中拿出来，同时将$\rho u_\alpha$从第二项的$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$符号中拿出来。对于黏滞系数$\mu$和$\zeta$，这些值在空间上的变化（由于它们依赖于温度，而温度是每点不同的）几乎总是可以忽略的。所以含有这些系数导数的项通常被完全忽略。这意味着方程（1.3）中μ和ζ的值也可以拿到导数外面，所以这些方程变为

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}\right)=\rho X_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\Delta u_i+\left(\zeta+\frac{\mu}{3}\right)\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_i\partial x_\alpha}. \tag{1.4}$$

因为方程（1.2）和方程组（1.4）的四个方程含有五个未知函数，所以它们没有形成一个闭合系统。然而，在实际中，一个运动流体粒子的密度ρ的变化在很多情况下都太小，也可以忽略。这在普通流体（即流体这个词的通常含义）的情形尤其是这样的。在稳定流动[速度$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$]气体的情形，由于压强变化导致的密度变化可以完全忽略，只要每一点的速度绝对值$u=|\boldsymbol{u}|$和声速a相比为小。一般地，对于非稳态流动，密度ρ 的变化会小得可以忽略，如果同时也满足$u\ll a$、$T\gg L/a$的条件，其中T和L是流体速度$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}$,t)经历可察觉变化的特征时间和特征长度，见Landau, Lifshitz (1963)第十章。在上面所有这些情形，密度ρ 通常在充满流体的整个空间中取为常数。于是ρ将表示一个事先给定（表征介质性质）的常数值，（对于给定的初始条件和边界条件）方程（1.2）的四个方程和方程（1.4）现在足够确定四个未知函数$u_i(\boldsymbol{x},t), i=1,2,3$和$p(\boldsymbol{x},t)$。

在目前不可压缩流体的情形，这些方程有更简单的形式，因为一些含ρ导数（或用这些导数表示）的项可以忽略。故在此情形，我们可以忽略连续性方程（1.2）左边的所有项，得到

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}=0. \tag{1.5}$$

[2]在一般方程的推导中，我们将一直将坐标轴记为$Ox_i, i=1,2,3$以便广泛使用这个方便的求和规则。然而，在一些特别的例子中，当三个坐标轴的方向以某些特别的方式定义时，我们也经常使用字母x,y,z表示坐标。

于是在运动方程（1.4）中，右边最后一项等于零，这些方程随后变为著名的纳维-斯托克斯方程

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}=X_i-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\Delta u_i, \tag{1.6}$$

这是黏滞不可压缩流体的基本动力学方程。我们看到它们只含有一个黏滞系数，因为第二黏滞系数只在考虑可压缩性时是重要的。

容易看到，压强p从一开始就可以从方程（1.6）中消去。实际上，为达到这个目的，我们只需要在方程（1.6）两边取旋度，用张量形式可以写为$\varepsilon_{k\beta i}\frac{\partial}{\partial x_\beta}$，其中$\varepsilon_{k\beta i}$是三阶完全反对称张量（即，如果指标$k,\beta,i$ 不是完全不同，则$\varepsilon_{k\beta i}=0$，而如果(k,β,i)是从$(1,2,3)$经过偶数次或奇数次交换，则$\varepsilon_{k\beta i}=+1$或$-1$）。为了简单，假设没有外力，我们得到一个三方程系统

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}-\omega_\alpha\frac{\partial \omega_k}{\partial x_\alpha}=\nu\Delta u_k,\qquad k=1,2,3 \tag{1.7}$$

其中

$$\omega_k=\varepsilon_{k\beta\alpha}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \tag{1.8}$$

是涡度矢量的分量。原则上我们可以从方程（1.7）和（1.8）确定三个函数$u_i(\boldsymbol{x},t)$。然后，为了确定压强场，只需要求解泊松方程

$$\Delta p=-\rho\frac{\partial^2(u_\alpha u_\beta)}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}, \tag{1.9}$$

这是对方程（1.6）进行$\frac{\partial}{\partial x_i}$操作而得到的$[X_i=0]$，即取纳维-斯托克斯矢量方程的散度。

由方程（1.9）得到，精确到$\boldsymbol{x}$的一个调和函数的结果，

$$p(\boldsymbol{x})=\frac{\rho}{4\pi}\int\frac{\partial^2[u_\alpha(\boldsymbol{x}')u_\beta(\boldsymbol{x}')]}{\partial x'_\alpha x'_\beta}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}, \tag{1.9'}$$

其中积分是对流体占据的整个体积进行的。特别地，如果流体流动发生在整个无界空间，那么相应的调和函数可能只是一个常数。因为只有压强导数出现在运动方程中，压强表达式中的常数项一般根本不起作用；因此可以假设方程（1.9′）不添加任何项就是精确的。对于有限区域中的流动，方程（1.9′）右边的调和条件必须由压强的边界条件确定；这里，在很多情况下或许也能证明是常数，因而可以忽略。

1.2 不可压缩流体的简单流动

为了得到方程（1.5）-（1.6）的唯一解，有必要确定场$u_i(\boldsymbol{x},t)$的初值，并考虑到在浸入流体的所有刚体表面速度必然为零。然而，因为这个系统是非线性的，一般地，找到显式解析形式的严格解非常困难。只有对一些特殊流动，方程（1.6）中的非线性项才等于零；在此情形，流体力学方程组被大大简化，在这些情形，求解严格解通常没有太大麻烦。下面，我们给出一些这种类型的严格解；方程（1.5）-（1.6）更复杂严格解的例子可以在例如Landau, Lifshitz (1963)、Kochin, Kibel', Roze(1964)以及Batchelor(1967)的书中找到。在所有下面考虑的例子中我们将假设没有外来的体作用力X_i[3]；此外，我们总是假定流动是稳态的，即，不依赖于时间。

我们首先注意到，在稳态流动的情形，在固定的一部分空间中的流体总动量不随时间变化，也就是说，与浸入流体的刚体的摩擦有关的动量损失被导致流体运动的力产生的动量所平衡（在$X_i=0$ 的情形，由于压强降低的作用）。换句话说，在稳态情形，作用于整个流体，导致流体运动的压降对应的力被作用于流体的阻力（仅和流体施加在浸入其中的物体上合力的符号相反）所平衡。表达这个相等关系，使得我们能够建立流体特征速度和压强降低的关系的方程通常被称为“制动定律（drag law）”。

流体施加在物体上的力$\boldsymbol{W}$等于垂直于表面的动量流对物体表面Σ的积分。垂直于轴Ox_k的单位面积的动量的第i分量具有$\rho u_i u_k + p\delta_{ik} - \sigma_{ik}$的形式，其中$\delta_{ik}$是单位张量（对于$i=k$，$\delta_{ik}=1$，对于$i\neq k$，$\delta_{ik}=0$），$\sigma_{ik}$是黏滞应力张量，在不可压缩流体中等于$\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$ [见方程（1.61）]。因为刚体表面的流体速度等于零，我们得到力$\boldsymbol{W}$的第i分量

$$W_i = -\int\limits_{\Sigma}(p\delta_{ik}-\sigma_{ik})n_k d\Sigma = -\int\limits_{\Sigma} p n_i d\Sigma + F_i, \tag{1.10}$$

其中n_i是单位矢量的在表面外法线方向的分量，F_i是$\sigma_{ik}n_k$在物体表面的积分。方程（1.10）右边第一项描述了压强力向物体转移动量，不依赖于流体的黏性。在一些情况下（例如，在沿平盘流动或直管中流动的情形）这个分量等于零。第二个分量F_i 代表表面的摩擦阻力，在黏滞流体情形总是不为零。在几何相似物体的情形，表达式$\frac{1}{2}\rho U^2 S$可以作为力$\boldsymbol{W}$ 的特征量，其中U是特征速度，S是某个特征面积，例如物体的表面积或中间截面的面

[3]我们注意到总是存在的体作用力，引力$\boldsymbol{X}=(0,0,-\rho g)$在流体没有自由表面时可以容易地通过从真实压强$p$中减去流体静力学压强$p_0=-\rho g x_3+$常量消去。

积。无量纲量

$$C_W = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho U^2 S} \tag{1.11}$$

被称为物体的阻力系数（drag coefficient）。如果阻力只是由于黏滞（$W_i = F_i$），那么阻力系数记作C_f，称为摩擦系数（coefficient of friction，或者摩擦因子，或表面摩擦系数）。

流体力学方程严格解的例子

1. 我们以两个平行平面之间黏性流体的二维流动的情形开始，一个平面静止，另一个平面以匀速U 运动。我们把平面之间的距离记作H并选择一个坐标系使得这些平面的方程具有$z = 0$（静止平面）和$z = H$（运动平面）的形式，Ox轴沿矢量$\boldsymbol{U}$的方向。在这个情形，所有流体动力学量都将只依赖于z，而任何地方的流体的速度都沿Ox轴。结果是，方程（1.5）和方程组（1.6）的第二个方程会同样地成立，方程组（1.6）的第一个和第三个方程取这样的形式

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2} = 0; \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = 0, \tag{1.12}$$

其中$u(z) = u_1(z)$是唯一不为零的速度分量。于是，$p =$ 常量以及$u = az + b$；考虑边界条件$z = 0$处$u = 0$，$z = H$处$u = U$ ，我们得到

$$u(z) = \frac{U}{H} z. \tag{1.13}$$

于是这个流动由线性速度分布描述，而平均速度$U_m = \frac{U}{2}$。在边界$z = 0$和$z = H$ 处单位面积的摩擦力等于

$$\tau = \mu \left| \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} \right| = \frac{\mu U}{H}. \tag{1.14}$$

在平面$z = 0$上，力沿Ox轴方向，而在$z = H$，它的方向相反。如果我们令

$$\tau = \frac{1}{2}\rho U_m^2 C_f \tag{1.15}$$

其中C_f是表面摩擦系数，那么

$$C_f = \frac{4\nu}{U_m H} = \frac{4}{\mathrm{Re}}, 其中\mathrm{Re} = \frac{U_m H}{\nu}. \tag{1.16}$$

方程（1.13）和（1.16）描述的无限大平行平面之间流体的稳态平面流动明显是数学上的理想化情况，但是在某些情形可能会有用。在流体力学手册中，这个理想化情形有时称为*平面库埃特流*（plane Couette flow）。

2. 现在我们考虑$z = 0$和$z = H$的两个固定平行平面之间在无穷远处施加的外力（产生沿Ox轴的压强梯度）作用下的稳态二维流动。容易看到，在此情形，所有地方的流动速度也都沿Ox轴，只依赖于z，所以$u(z) = u_1(z)$也将是场$\boldsymbol{u}$唯一不为零的分量。在此，方程（1.5）和方程组（1.6）的第二个方程也将同样地成立，而方程组（1.6）的第一个和第三个方程取这样的形式

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2}; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \tag{1.17}$$

因此明显在此情形，压强不依赖于z，也就是说它在流体层的整个厚度中不变，于是方程组（1.17）的第一个方程只对于

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 常量 = -\frac{\Delta_l p}{l}, \quad u(z) = -\frac{1}{2\mu}\frac{\Delta_l p}{l} z^2 + az + b, \tag{1.18}$$

成立，其中$\Delta_l p$是平面$x = x_0$和$x = x_0 + l$的压强差。考虑边界条件（对于$z = 0$ 和$z = H$，$u = 0$），我们得到

$$u(z) = -\frac{1}{2\mu}\frac{\Delta_l p}{l}\left[\left(z - \frac{H}{2}\right)^2 - \frac{H^2}{4}\right], \tag{1.19}$$

所以在此情形，速度分布具有抛物线形式。两个边界上的剪切应力等于

$$\tau = \mu \left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right| = \frac{H}{2}\frac{\Delta_l p}{l}. \tag{1.20}$$

所以，方程（1.15）的无量纲表面摩擦系数C_f等于

$$C_f = \frac{12\nu}{HU_m} = \frac{12}{\mathrm{Re}}其中\mathrm{Re} = \frac{U_m H}{\nu} \tag{1.21}$$

（因为在当前情形$U_m = \frac{1}{H}\int\limits_0^H u(z)dz = \dfrac{H^2}{12\mu}\dfrac{\Delta_l p}{l} = \dfrac{2}{3}U_{\max}$）。严格解（1.19）描述的理想化的流动有时称为*平面泊肃叶流*（plane Poiseuille flow）。

3. 我们现在考虑直的半径为D的无限长圆柱管道中的稳态流动的情形。轴Ox取为沿管道的轴；于是唯一不为零的速度场分量是$u_1(y,z) = u(y,z)$。于是在此情形，方程（1.5）也同样成立；进一步，由方程组（1.6）的第二个和第三个方程得到$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$，即压强沿管道截面不变，而且只依赖于$x$。我们现在在$Oyz$平面中引入坐标$(r, \varphi)$。于是，由管道的对

称性，$u(y,z)=u(r)$，方程组（1.6）的第一个方程在这个坐标系下为

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\mu}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right). \tag{1.22}$$

因为左边只依赖于x而右边只依赖于r，必然有$\frac{\partial p}{\partial x}=$常量$=-\frac{\Delta_l p}{l}$，其中$\Delta_l p$是沿管的长度$l$的压强降低。考虑边界条件$u(D/2)=0$和$u(r)$对于所有$r$都是有界的，我们得到

$$u(r)=\frac{\Delta_l p}{4\mu l}(R^2-r^2)\left(\text{其中}R=\frac{D}{2}\right). \tag{1.23}$$

所以在此情形，速度（沿任意直径的）分布也是抛物线形的。这个方程定义的平均速度

$$U_m=\frac{1}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R u(r)rdrd\varphi, \tag{1.24}$$

在这里等于$\frac{\Delta_l p}{8\mu l}R^2=\frac{U_{\max}}{2}$；所以，流体的流出量（即，单位时间通过管道的一个截面的流体体积）等于

$$Q=\pi R^2U_m=\frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{\Delta_l p}{l}. \tag{1.25}$$

边界上的剪切应力等于$\tau=\mu\left|\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}r}\right|=\frac{R}{2}\frac{\Delta_l p}{l}$，考虑长度$l$的一段管道上的总剪切应力$\pi Dl\tau$ 必须和作用于管道的截面πR^2上的压强降低平衡，也可以得到同样的结果。在此情形的表面摩擦系数等于

$$C_f=\frac{8\nu}{RU_m}=\frac{16}{\mathrm{Re}},\quad \text{其中}\mathrm{Re}=\frac{U_mD}{\nu}. \tag{1.26}$$

流体力学方程组的解（1.23）也是一种理想流动，因为管道取为无限长，而流动是严格不变的。然而，人们发现在实际有限的管道的情形，在不变的压强降低（压力头，presure head）$\Delta_l p$ 作用下沿管道的流体流动通常非常快就达到稳态，而在距离管道入口量级为$\frac{R^2U_m}{\nu}$的地方[根据席勒(1934)的理论计算（在戈德斯坦（1938）第一卷第139节中也有引用），甚至对于$x>0.115\frac{R^2U_m}{\nu}$] 也感觉不到管道有限长度的效应，方程（1.23）是对这个流动很好的描述。所以规律（1.23）、（1.25）和（1.26）可以进行实验检验。历史上，它们首先由（G.哈根在1839年和J.泊肃叶在1840-1841年）实验验证，后来才被（J.斯托克斯在1845 年）理论证明。哈根也证明了这些规律只在足够大的黏滞系数ν和足够慢的速度U_m的情况下成立

一这个事实我们将在第二节中详细讨论。方程（1.23）和（1.25）描述的不可压缩流体的流动通常称为圆柱泊肃叶流（circular Poiseuille flow，或者叫做哈根-泊肃叶流）或者（在不会和类似的平面流混淆的情况下）就叫做泊肃叶流。

4. 作为最后一个例子，我们考虑半径为R_1和$R_2 > R_1$、以角速度Ω_1和Ω_2绕轴转动的两个同轴无限长圆柱之间环中流体的稳态运动，沿圆柱轴的压强降低取为零。在此情形，所有流体动力学量都不依赖于x坐标（沿圆柱轴）。进一步，如果在垂直于圆柱轴的Oyz平面中引入柱坐标(r, φ)，那么从对称性考虑，显然只有速度分量$u = u_\varphi$不为零，速度u 和压强p都只依赖于r。于是，在此情形，连续性方程（1.5）和方程组（1.6）的第一个方程同样成立；对于方程组（1.6）的第二和第三个方程，在转换为柱坐标后，有如下形式

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = \frac{u^2}{r}, \quad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} - \frac{u}{r^2} = 0. \tag{1.27}$$

方程组（1.27）第二个方程的一般解具有$u(r) = ar + \frac{b}{r}$的形式，因为同时，$u(r)$在$r = R_1$ 必须等于$\Omega_1 R_1$，在$r = R_2$必须等于$\Omega_2 R_2$，未知函数$u(r)$由方程

$$u(r) = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_2 - \Omega_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\frac{1}{r}. \tag{1.28}$$

定义。

使用方程组（1.27）的第一个方程，现在非常容易求解$p(r)$，但我们在此不做求解。方程（1.28）给出的流动在很多方面类似与示例1，但它可以在实验室中容易得多地以相当的精度重现。这种流动有时称为圆库埃特流，或者圆柱间流动。

1.3 雷诺数和相似性判据

上面给出的流体力学方程的所有严格解都是关于极端简单的理想化流动的。在更复杂的情形，一般不可能找到严格解，我们不得不用一些近似方法诉诸于方程组（1.5）-（1.6）的数值解。在这些情形，极为重要的是能估计我们方程中各项的量级来确定哪些项在什么情况下可以忽略。结果，我们可以把注意力集中在更容易积分的简化的方程。

我们将假设我们处理无体作用力的稳态黏性不可压缩流体的流动。使用方程（1.9）使得容易证明方程组（1.6）中含压强的项一般具有核非线性项$u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}$相同的量级，故而只需要比较$u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}$核描述了惯性力和黏滞摩擦力

效应的$\nu\Delta u_i$。我们把U取为某个典型速度（例如，流动的最大速度或者某些平均速度），把L取为某个典型长度（例如，浸入流体的物体的平均尺度，或者刚性墙壁之间的典型距离，或者一般地，流动速度经历量级为U的可察觉的变化ΔU 的尺度）。在此情形，速度场的一阶导数是U/L的量级，二阶导数是U/L^2的量级，所以，描述惯性力的项是U^2/L的量级，描述摩擦力的项是$\nu U/L^2$的量级。这两个物理量之比

$$\frac{U^2}{L} : \frac{\nu U}{L^2} = \frac{UL}{\nu} = Re \tag{1.29}$$

称为雷诺数；这是流动非常重要的特征，定义了动力学中惯性力和摩擦力的相对重要性[我们已经在方程组（1.16）、（1.21）和（1.26）中引入了这个数]。在雷诺数小的情况下，黏滞对于整个流动有可观的影响，平滑掉了所有小尺度的不均匀性：所以流体力学量的空间变化在雷诺数小的情况下必然非常光滑。在大雷诺数的情形，流动中占主导角色的是惯性力，其作用使得能量从运动的大尺度成分传向小尺度成分并形成尖锐的居于不规则结构；我们将在本书余下的章节中关心此类流动。

雷诺数的概念极大地简化了几何相似流动（比如，给定截面形式的管道中流体的流动，或者流过一个给定形式的刚体的无限大流体流动）的研究。因为在这些情形我们关心具有几何相似边界的整个流动，所以边界的性质将唯一地由同一个长度L确定（在我们的情形，L可以取为管道截面的平均直径或者流体中物体的平均直径）。此外，流动本书由某个典型速度U（例如，管道的一个固定截面上的最大速度，或者流体流向一个物体的速度）确定。最终，在方程组（1.5）和（1.6）中唯一的有量纲量是黏滞系数ν，描述了流体的物理性质。于是，对于没有体作用力的稳态流动，几何相似流动将仅依赖于长度L和有量纲的参数U和ν，量纲为

$$[U] = LT^{-1}, \quad [\nu] = L^2T^{-1}, \tag{1.30}$$

其中L和T如通常一样，分别表示长度和时间的量纲。显然，由参数L、U和ν可以得到唯一一个无量纲组合－雷诺数$\mathrm{Re} = \frac{UL}{\nu}$。所以，如果我们以$L$为单位测量长度，以$U$ 为单位测量速度，以ρU^2为单位测量压强，那么方程（1.5）和所有几何相似流动的边界条件就会有相同的形式，而方程（1.6）将几何完全由无量纲参数Re表征，它将在方程转换为无量纲形式后出现。结果，在几何相似流动的情形，以U度量的速度将仅依赖于用L度量的坐标

以及雷诺数Re。换句话说，

$$u_i(\boldsymbol{x}) = U\varphi_i\left(\frac{\boldsymbol{x}}{L}, \mathrm{Re}\right), \tag{1.31}$$

其中$\varphi_i\,(\xi, \mathrm{Re})$是某个描述所考虑的整个流动的普适函数（我们必须指出，在前一小结的例子1到4中，由于各种特别的原因，函数φ_i完全不依赖于Re）。同样地，我们有$p(\boldsymbol{x}) = \rho U^2\varphi_0\left(\frac{\boldsymbol{x}}{L}, \mathrm{Re}\right)$，其中$\varphi_0$是一个新的普适函数。此外，如果$W$是施加在流体冲刷的刚体上的力，那么阻力系数（drag coefficient）$C_W = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho U^2 L^2}$将只依赖于Re，而$C_W$ 定义中的L^2也可以用物体（被流动冲刷的）整个表面的面积S替代（所以我们可以假设$C_f = \frac{\tau}{\rho U^2}$，其中$\tau$是单位表面的平均摩擦力）。换句话说，在相应的雷诺数相等的时候（但一般来说，仅当它们相等的时候），几何相似的流动会有力学相似性，即它们具有几何上相似的流线位形，由同样的无量纲坐标的函数描述（这称为雷诺相似性定律）。这个定律对于相似性条件下流动的理论研究、协调观测数据的呈现方式以及对实际问题进行建模非常重要。此外，它表明所有可能的几何相似流动都由方程组（1.5）-（1.6）的一个单参数解族描述；这当然极大简化了数值积分这些方程的问题。

我们必须再次强调，雷诺相似性定律只对外力没有可观影响的稳态不可压缩流体的流动成立。然而，对于很大程度上依赖于体作用力（例如，引力）的运动以及由某个和L/U不同的特征周期T描述的非稳态运动，这个相似性定律会更复杂，在此情形，对于力学相似性，不仅需要雷诺数相等，而且还需要某些额外的无量纲“相似性判据”相等。在可压缩流体流动的情形，相似性判据的数量更多。我们将在1.6节中进一步讨论这一点。

我们也必须指出，在某些情况下对几何相似性非常微小的偏离可能导致力学相似性的完全失效。举个例子，圆形管道入口截面条件的微小改变在流动中引入的小扰动，可能完全改变管道中流动的特征（见第2节）。

1.4 大雷诺数流动；边界层

我们现在将假设流动的雷诺数非常大。在此情形，方程组（1.6）的非线性惯性项将远大于包含黏滞系数的项。于是，第一眼看起来，黏滞的效应看起来可以简单地忽略。然而，情况并非如此。忽略方程组（1.6）中含有ν的项会降低这些微分方程的阶数。此外，这样得到的简化的理想流体方程的解将不再满足要求速度在所有流体包裹的刚体表面为零的“无滑动”边界条件。同时，我们知道，黏性流体（无论黏滞系数多么小）会产生“黏附”。所以，在大雷诺数的黏性流体运动中，只有距离刚体壁一段距离，流动才变得和理想流体情形（黏滞系数为零）接近。在壁附近存在一

个薄层，其中的流动速度非常快地从壁上的零变到这一层外边界上的值。这个值非常接近理想流体情形的值。速度在这一层（称为边界层）中的快速变化意味着在其中，摩擦力的效应绝对不小，而是具有和惯性力相同量级的影响。

于是，对于大雷诺数，流体的黏性只在靠近边界壁的区域高效。在这个区域中，含有ν 的项不能忽略；然而，在这里，因为和刚体相接触的一个流体薄层中的运动的特殊性质，流体力学方程可以进行相当大的简化。所以，在自由空间中，流动由理想流体方程决定，而对于边界条件，我们需要使用相应边界层的上表面上的条件。

现在让我们考虑长度为L宽度无限大、位于Oxy平面上（占据$0 \leq x \leq L$的区域）的、流体以给定速度U沿Ox方向流动的边界层的简单情形。首先，在考虑这个问题的数学解之前，让我们进行一些初步的定性讨论。因为在此情形特征长度为L，特征速度为U，方程组（1.6）中的非线性项[或者更明确地，这些方程中的第一项]在边界层中具有U^2/L的量级。另一方面，此区域中的纵向速度$u = u_1$ 将从平面表面的$u = 0$变为边界层外边缘的U。

让我们把边界层厚度取为δ。[4]

我们现在得到，$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$具有$U/\delta^2$的量级，描述摩擦力主要的项$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$具有$\nu U/\delta^2$ 的量级。但是，在边界层内，摩擦力和惯性力有相同的量级。所以，$U^2/L \sim \nu U/\delta^2$，即

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu L}{U}} = \frac{L}{\sqrt{\mathrm{Re}}}, \qquad \mathrm{Re} = \frac{UL}{\nu}. \tag{1.32}$$

于是，边界层厚度依赖于这个流动的雷诺数。这个数越大（即，流体黏滞系数越小以及自由流动速度越大），边界层越薄。

为了确定平面上距离前缘x处上方的边界层的厚度，我们必须把平面的总长度L替代为x。于是

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U}}, \quad \text{在}x\text{点处}, \tag{1.33}$$

即，随着与前缘距离x的增加，边界层厚度的增加正比于$\sqrt{x}$。只要考虑壁上的剪切应力τ（τ等于平面上单位面积的摩擦力），我们就有$\tau = \mu\frac{\partial u}{\partial z}$（其

[4]这当然不是一个绝对的概念，因为边界层没有一个明确的边缘，速度u只是随着沿Oz方向的距离的增加渐进地趋向于U。所以δ被理解为表示了距离平面（在Oz方向）的距离，在此距离上u达到了U 的足够大的一部分，比如$0.99U$ （δ的这个定义通常用于流体力学中）。还存在其他一些不太正式但实际上给出了等价的结果的边界层厚度的定义－见本小节的结语。

中$\frac{\partial u}{\partial z}$必须取$z = 0$的值。）因为$\frac{\partial u}{\partial z} \sim \frac{U}{\delta}$，我们有$\tau \sim \frac{\mu U}{\delta}$，或者鉴于方程（1.32）有

$$\tau \sim \rho\sqrt{\frac{\nu U^3}{L}}. \tag{1.34}$$

于是这里的剪切应力正比于速度的3/2次方；相应的表面摩擦系数

$$C_f = \frac{\tau}{\rho U^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}} \tag{1.35}$$

自然只依赖于雷诺数，随着这个数的增加而减小。

我们现在转向定义边界层内速度场的方程的推导。因为在现在讨论的情形下，运动是严格二维的（在Oxz平面内），不依赖于y，一般方程组（1.5）和（1.6）取这样的形式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{1.36}$$

其中$u = u_1$，$w = u_3$。我们现在试图确定这些方程中各项的量级。我们回忆，在边界层中，u等于速度U的有限倍数，即，和U有同样的量级，而导数$\frac{\partial u}{\partial x}$和$\frac{\partial u}{\partial z}$分别具有$U/L$和$U/\delta$的量级。方程组（1.36）的第三个方程对$z$从0到$z = c\delta(0 < c < 1)$（占边界层总厚度$\delta$的一个有限部分）积分, 我们得到

$$w = \int_0^{c\delta} \frac{\partial u}{\partial x}dz \sim \delta\frac{U}{L} = \frac{\delta}{L}U. \tag{1.37}$$

因此，显然w大约比u小一个$\frac{L}{\delta} = \sqrt{\mathrm{Re}}$的因子。考虑方程（1.32），我们可以断言，在方程组（1.36）的第一个方程中，$u\frac{\partial u}{\partial x}$、$w\frac{\partial u}{\partial z}$和$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$都具有$U^2/L$ 的量级，而$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$的量级$\frac{U^2}{L}\frac{1}{\mathrm{Re}}$要小得多；所以这后一项可以忽略。此外，从方程组（1.36）第二个方程显然可以看到，$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$的量级不会大于$\frac{U^2\delta}{L^2} = \frac{U^2}{L}\cdot\frac{\delta}{L}$（因为第二个方程中没有更大量级的量）；所以精确到具有相对量级$\frac{\delta}{L}$的项，我们可以忽略压强的横向变化，假设$\frac{\partial p}{\partial z} = 0$，即$p = p(x)$。然而，在此情形，边界层内的压强$p(x)$可以替换为上边缘上的值。所以方程组（1.36）第一个方程中的$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$项可以独立地从描述边界层外的理想流体方程确定；在方程组（1.6）的第一个方程中令$\nu = 0$，我们得

到$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}$或者（在稳态情形）$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=U\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial U^2}{\partial x}$。于是，为了求解$u$和$w$，我们得到了两个方程的系统：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{1.38}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{1.39}$$

这个系统，加上边界条件

$$u=w=0, 对于z=0, 0\leq x\leq L; u\to U(x,t), 当z\to\infty \tag{1.40}$$

使得能够从函数$u(x,z,t)$和$w(x,z,t)$中的一个的初值唯一地确定这些函数。

方程组（1.38）和（1.39）组成了著名的*边界层*方程，它们首先由普兰特（Prandtl）在1904年得到。后来，普朗特和其他人提出了方程的不同推导。特别地，已经确定普朗特的方程对于流过弯曲表面的二维流动也成立（如果曲率不太大），它们可以作为一级近似通过将所有的项展开为$\frac{1}{\mathrm{Re}}$的幂级数，从流体力学一般方程形式地得到[见Kochin, Kibel', Roze (1964)，第二部分，第II章，第29节；Goldstein (1938)，第一卷，第IV节；也参见Loitsyanskiy (1942, 1962b)和Schlichting(1960)的特别专著]。一般地，z必须取为沿表面法向的坐标，x必须取为切平面内的纵向坐标。

现在让我们更详细地考虑以不变的速度U沿Ox稳态流过一个平面的最简单的情形。在此情形，方程（1.38）中的$\frac{\partial u}{\partial t}$和$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$为零，故而这个方程有特别简单的形式

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{1.41}$$

我们假设长度L有限。因为自然会想到在所考虑的流动中，在边界层中每个$x=$常量的截面中的速度不会很强地依赖于下游截面中的速度，所以无限长度的假设不会对解有很大影响，除了在后缘的窄领域中以及位于平面后面$x\geq L$的区域，我们在此不作处理。对于$L=\infty$，边界条件（1.40）变为

$$u=w=0, 对于z=0, x\geq 0; u\to U, 当z\to\infty. \tag{1.42}$$

所以我们只需要求解方程组（1.39）和（1.41）满足条件（1.42）的解。

为了从这些方程消去ν和U，我们使用无量纲的量

$$x_1=\frac{x}{L}, z_1=\frac{z\sqrt{\mathrm{Re}}}{L}=z\sqrt{\frac{U}{\nu L}},$$

$$u_1=\frac{u}{U},w_1=\frac{w\sqrt{\mathrm{Re}}}{U}=w\sqrt{\frac{L}{\nu U}},\tag{1.43}$$

定义与方程组（1.32）和（1.37）一致。方程（1.43）中的长度L现在可以选为所需要的值（因为这个问题的条件不包含任何特征长度）。把方程组（1.43）带入方程组（1.41）、（1.39）和（1.42），我们得到

$$u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+w_1\frac{\partial u_1}{\partial z_1}=\frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2},\quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial w_1}{\partial z_1}=0,\tag{1.44}$$

$$u_1=w_1=0,\text{对于}z_1=0,x_1\geq 0;u_1\to 1,\text{当}z_1\to\infty.\tag{1.45}$$

然而，因为长度L可以任意选取，只有不依赖于L的解有意义。于是，明显$u_1=\frac{u}{U}$只能依赖于变量z_1和x_1的组合$\eta=\frac{z_1}{\sqrt{x_1}}=z\sqrt{\frac{U}{\nu x}}$，不含有$L$。函数$\sqrt{x_1}w_1=\sqrt{\frac{x}{\nu U}}$，也只用$w$、$x$、$\nu$和$U$ 表示，它一定依赖于同样的组合。于是我们看到

$$u=Uf\left(\sqrt{\frac{U}{\nu}}\frac{z}{\sqrt{x}}\right),w=\sqrt{\frac{U\nu}{x}}f_1\left(\sqrt{\frac{U}{\nu}}\frac{z}{\sqrt{x}}\right)\tag{1.46}$$

其中f和f_1是两个单参数（不依赖于U和ν）的普适函数。特别地，由方程（1.46），速度不变的流体流过的平面上所有点上方的u和w分布一定互相相似。如果我们令

$$f(\eta)=\varphi'(\eta),\tag{1.47}$$

方程（1.39）变换为$f_1(\eta)=\frac{1}{2}(\eta\varphi'-\varphi)$；于是方程组（1.41）和（1.42）容易简化为这样的形式：

$$\varphi\varphi''+2\varphi'''=0;\varphi(0)=\varphi'(0)=0,\varphi'(\infty)=1.\tag{1.48}$$

于是，我们的方程组简化为一个单一的、有三个边界条件的非线性三阶微分方程。这个方程可以数值积分，例如，把函数$\varphi(\eta)$在$\eta=0$附近展开为幂级数，在$\eta\to\infty$展开为渐进级数（这个求解方法在1908年被布拉休斯使用，他是第一个研究这个问题的人）；随后，其他数值方法被托普夫（Töpfer）、巴斯托（Barstow）、戈德斯坦（Goldstein）、豪沃斯（Howarth）和其他人应用于方程（1.48）[将Goldstein(1938)、Schlichting(1960)、Longwell(19 参考文献]。这些工作中得到的一个平面上方的边界层中的纵向和垂向速度分布在图2和图3中给出。边界层的厚度δ（定义为$u(z)=0.99U$的z 值）由

$$\delta\approx 5\sqrt{\frac{\nu x}{U}}\tag{1.49}$$

给出[参考方程（1.33）]。距离前缘x处的剪切应力由方程

$$\tau(x)=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0}=\mu\sqrt{\frac{U^3}{\nu x}}\varphi''(0);$$

给出，因为数值积分表明$\varphi''(0)=0.332$，于是

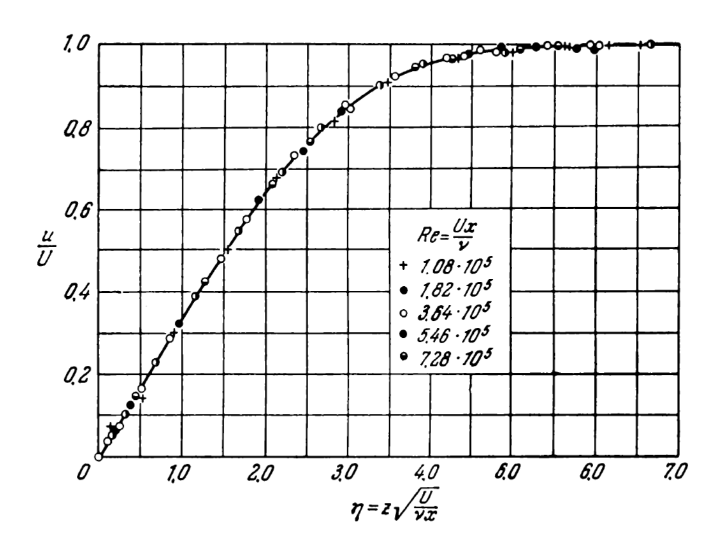


图 2 平面上方边界层中的纵向速度轮廓。实验数据根据Nikuradse的测量[见Schlichting(1960)]。

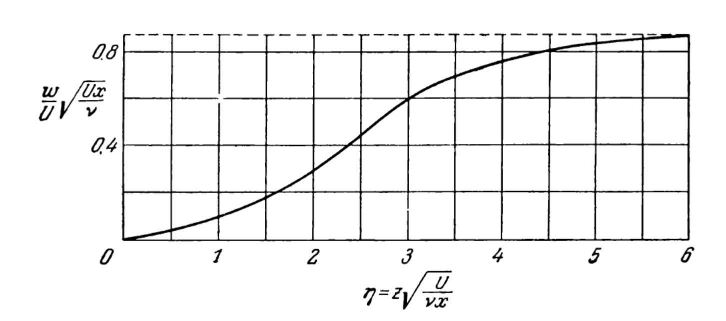


图 3 一个平面上方边界层中的垂向速度轮廓。

$$\tau(x)=0.332\rho\sqrt{\frac{\nu U^3}{x}},C_f(x)=\frac{\tau(x)}{\rho U^2}=\frac{0.332}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}},\mathrm{Re}_x=\frac{Ux}{\nu}.\qquad(1.50)$$

对于长度为L、两面浸入流体的平面，总的（平面上单位宽度的）摩擦力会

等于

$$F = 2\int_0^L \tau(x)\mathrm{d}x = 1.328\rho\sqrt{\nu U^3 L}, \tag{1.51}$$

即，它正比于速度的3/2次方和平面长度的平方根（F随L的相对缓慢的增加可以很自然地用这个事实解释，应力$\tau(x)$随着距离前缘的距离的增加而降低，由于边界层厚度增加）。我们通常使用无量纲的表面摩擦系数C_f，而不用F，对于长度L、宽度B的平面，C_f由方程

$$C_f = \frac{FB}{\rho U^2 LB} = \frac{1.328}{\sqrt{\mathrm{Re}}}, \mathrm{Re} = \frac{UL}{\nu} \tag{1.52}$$

确定。

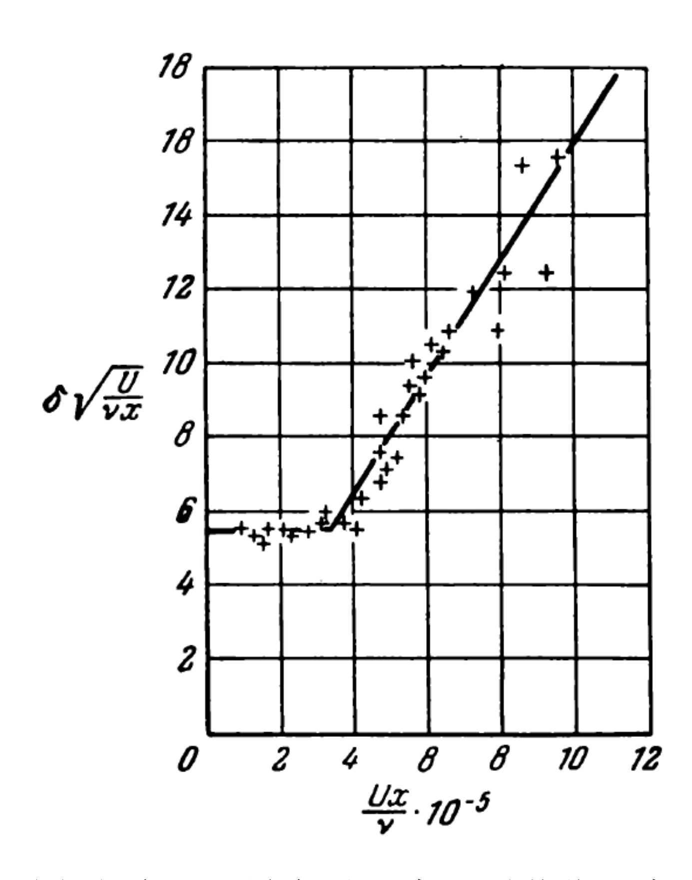


图 4 平面上方边界层厚度δ对距离平面前缘距离x的依赖[根据Hansen(1928)的数据]。

特别地，I.M.博格斯（I.M. Burgers）和B.G.范·德·赫格·兹能（B.G. Van der Hegge Zijnen）在1924年，M.汉森（M. Hansen）在1928年和J.尼

库拉兹（J. Nikuradse）在1942年对流过平面的流动的理论进行了实验验证[对于原始工作的参考文献见，例如，Schlichting (1960)]。已经确定，如果雷诺数$\mathrm{Re}=\frac{UL}{\nu}$足够大，方程（1.52）足够精确地描述了观测到的表面摩擦系数。同样地，边界层厚度的测量值δ和对于既不太大也不太小的$\mathrm{Re}_x=\frac{Ux}{\nu}$（即，任何地方，除了靠近平面前缘的窄条，在那里$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right| \ll \left|\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|$不满足，以及或许在平面的后缘，在$\frac{UL}{\nu}$非常大的情形）的纵向速度分布$u(z)$ 被证明异常符合理论预言。理论和早期实验观测的微小分歧或许可以完全用平面的有效厚度和在前缘的锐化形式的影响和流动中存在相当小的压强梯度来解释；尼库拉兹的实验中特别考虑了这些现象，能够和计算的$u(z)$分布很好地符合[见图2，其中画出了尼库拉兹的数据]。然而，对于足够大的速度U和L，从Re_x为$3\times 10^5-3\times 10^6$ 量级的某个z开始，上面导出的所有规律都极大地扭曲了[参见，比如，图4，其中给出了汉森对边界层厚度测量的结果。这些结果表明从$\mathrm{Re}_x=3.2\times 10^5$开始，这个厚度开始增加得比方程（1.49）预期的快得多]。产生这些扭曲的原因将在第2节详细讨论。

到目前为止，我们已经在纯粹假定的基础上定义了边界层厚度，当纵向速度$u(z)$达到U 足够接近于1的某个事先指定的比例（比如，等于U的99%）时的z。我们被迫采用这个某种程度上模糊的定义，因为$u(z)$仅在$z\to\infty$时渐进地接近U，没有终止值；严格地说，我们应该把边界层看作没有明确边界。然而，边界层的横向尺度可以用具有明确物理意义的量描述。一个这种量是*位移厚度*（displacement thickness）δ^*，由方程

$$\delta^*=\int_0^\infty\left[1-\frac{u(z)}{U}\right]dz. \tag{1.53}$$

定义。这个量的意义是，δ^*等于流动由于摩擦造成的边界层中纵向速度的减小而向外位移的距离。让我们实际考虑在平面前缘距离平面z_0处的一条流线（见图5）。因为通过这条流线和平面之间的每个流管截面的流体流量都必须相同，而纵向速度u由于平面上的摩擦向下游减小，流管的截面必然随着x的增大而增大。在距离平面前缘x处，流线距离平面z_1，即，它已经位移了一个距离z_1-z_0，这可以从流体通过流管初始截面的流量和通过纵向坐标x的流管截面的流量相同来确定

$$Uz_0=\int_0^{z_1}u(x,z)dz,$$

其中

$$z_1-z_0=\int_0^{z_1}\left(1-\frac{u}{U}\right)dz. \tag{1.54}$$

当$z_1\to\infty$，z_1-z_0精确趋向于位移厚度δ^*。对于流过一个平面的稳态流动

$$\delta^*=\sqrt{\frac{\nu x}{U}}\int_0^\infty[1-\varphi'(\eta)]d\eta=\lim_{\eta\to\infty}[\eta-\varphi(\eta)]\cdot\sqrt{\frac{\nu x}{U}}, \tag{1.55}$$

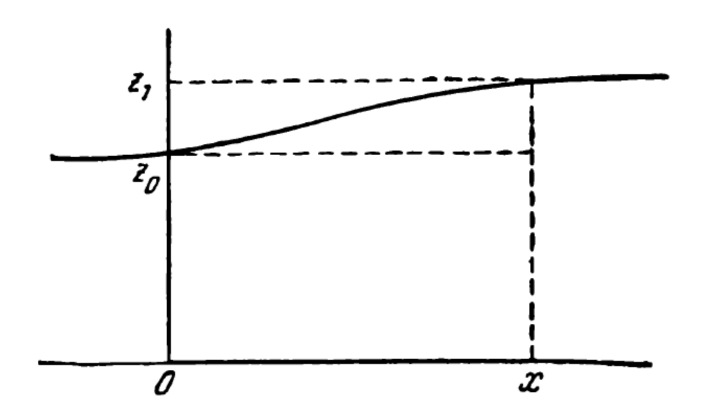


图 5 平面上方边界层中流线的图示。

我们可以得到方程

$$\delta^* \approx 1.73\sqrt{\frac{\nu x}{U}}. \tag{1.56}$$

我们注意到在此情形，我们之前对边界层厚度δ（根据等式$u(\delta) = 0.99U$定义）的计算给出一个几乎是位移厚度δ^*三倍的值。由于流线的“位移”，速度的垂向分量w在$z \to \infty$时不趋向于零（见图3），而是趋向于某个渐进值，这个值被证明等于

$$w(\infty) = 0.895U\sqrt{\frac{\nu}{Ux}}. \tag{1.57}$$

所以这个位移表明，流动在边界层之外也被扭曲了（无论边界层厚度怎么定义），即，边界层对外面的流动有影响，有时必须在计算中考虑。

表征边界层横向尺度的另一个量是*动量厚度*（momentum thickness），定义如下

$$\delta^{**} = \int\limits_0^\infty \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dz. \tag{1.58}$$

动量厚度这个术语来源于这个事实，单位时间由平面上宽度为1、从前缘$x = 0$延伸到给定x的面元的摩擦力传递的动量（即，这部分平面上方流体柱在单位时间损失的动量）可以证明为$\rho U^2\delta^{**}$。也就是说，它由长度δ^{**}表征。在以不变的速度U流过平面的稳态流的情形，这个长度为[由方程组（1.46）、（1.47）和（1.48）]：

$$\delta^{**} = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \int\limits_0^\infty \varphi'(1 - \varphi')d\eta = 2\varphi''(0)\sqrt{\frac{\nu x}{U}} = 0.664\sqrt{\frac{\nu x}{U}}; \tag{1.59}$$

所以，这里的δ^{**}几乎是δ^*的三分之一。

我们可以进一步注意到边界层理论也让我们可以解释为什么代表了流体力学方程的一个严格解的泊肃叶流只在距离管道入口$\frac{R^2U}{\nu}$量级的地方产生（见1.3 小节，例子4）。在靠近管道入口的地方，壁的阻力作用也只施加在薄薄的边界层上，而在管道中心部分，流体以不变的速度运动，不受黏滞效应影响。深入到管道中，管壁上的边界层的厚度会正比

于$\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$增加，其中x是距离入口的距离。最终，在距离入口$x \sim \frac{R^2 U}{\nu}$的距离，边界层填满整个管道截面，黏滞效应在整个流动中变得明显。当然，到这个时候方程（1.23）给出的理论上的抛物线形速度分布才建立起来[参考Schiller(1932, 1934)或者Goldstein(1938)，第1卷，第7章，第139 节]。

1.5 热量的一般方程和热传导方程；受迫和自由对流

接下来，我们主要关心纳维-斯托克斯方程组（1.6）和连续性方程（1.5）描述的不可压缩流体的流动。然而，因为第4章将专门讨论更一般的热不均匀流体，并且本书第二部分将简单考虑可压缩介质中的湍流，此时讨论可压缩流体的一般力学方程系统是有益的。这个讨论的结果使我们可以写出不可压缩、热不均匀流体的温度的方程，这在接下来的分析中会很重要。

在可压缩介质中，连续性方程（即，质量平衡）和动力学方程（即，三个动量方程的平衡）分别取（1.2）和（1.4）的形式。因为这四个方程含五个未知量，为了得到一个封闭的系统，我们必须增加第五个方程－热量方程，表达了能量守恒的物理定律。在最一般的情况下，这个方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho u^2}{2}+\rho e\right)=-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\rho u_\alpha\left(\frac{u^2}{2}+w\right)-u_\beta\sigma_{\beta\alpha}-\kappa\frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\right]+u_\alpha\rho X_\alpha, \tag{1.60}$$

其中e使单位质量流体的内能[因此，和$\rho(u^2/2+e)$给出单位体积运动流体的总能量]，$w=e+\frac{p}{\rho}$被称为焓[5]，κ 使热传导系数，T 是温度。此外，在方程（1.60）中

$$\sigma_{ij}=\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}\delta_{ij}\right)+\zeta\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}\delta_{ij} \tag{1.61}$$

是黏滞应力张量，出现在动量方程（1.3）右边的导数$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ 中[参见例如，Landau和Lifshitz(1963)，第49节]。由能量方程（1.60）我们也可以推导出熵的方程；实际上，借助用dp、$d\rho$和ds表达de和dw 的热力学方程（其中s是单位质量流体的熵），并考虑方程组（1.2）和（1.4），我们可

[5]在此，我们应该注意到，在这里和随后，热力学量和热力学关系的使用需要特别谨慎，因为具有非零速度和温度梯度的运动流体并不是热平衡系统。然而，可以证明，对于实际流体流动中碰到的适当的梯度，基本热力学量可以用这种方式定义，使得它们满足处于平衡的介质的热力学常微分方程。[见例如，Landau 和Lifshitz(1963)第49节，也参见Tolman和Fine(1948)，以及气体动理学特别手册－Chapman和Cowling(1952)，Hirschfelder, Curtiss和Bird(1954)]。

以把方程（1.60）转变为这个形式

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial s}{\partial x_\alpha}\right)=\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\right) \tag{1.62}$$

[参见Landau和Lifshitz(1963)]。于是，当方程组（1.2）和（1.4）成立时，方程组（1.60）和（1.62）彼此等价，任何一个都能同等地用于推导可压缩流体流动的封闭的方程组。

为得到一个封闭系统，有必要在热力学一般方程和所考虑的介质的状态方程（联系p、ρ和T）的帮助下，仅将热力学量e 和w 或s 用压强p 和密度ρ （或温度T）表达。在此我们将限于理想气体物态方程的简化情形，即

$$p=R\rho T \tag{1.63}$$

其中T是以开尔文为单位的温度，常数R等于定压比热c_p和定容比热c_V之差：

$$R=c_p-c_V. \tag{1.64}$$

此外，秉承气体动理学理论的推导和真实流体的实验数据，我们可以假设比热c_p和c_V 各自为常量（即，不依赖于温度）。在此情形，不难证明$e=c_VT+e_0$、$w=e+\frac{p}{\rho}=c_pT+e_0$和$s=-R\ln\rho+c_V\ln T+$常量$=-R\ln p+c_p\ln T+$常量[见例如Landau和Lifshitz(1958)，第43 节]。把这些e和w表达式代入方程（1.60）并应用方程组（1.2）和（1.4），我们不难将热量的一般方程变换为这样的形式：

$$c_V\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\right)=-p\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\right)+\rho\varepsilon, \tag{1.65}$$

或者等价地变换为这种形式

$$c_p\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\right)=\frac{\partial p}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial p}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\right)+\rho\varepsilon, \tag{1.65$'$}$$

其中

$$\rho\varepsilon=\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}=\mu\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}-\frac{2}{3}\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right)+\zeta\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma}=$$

$$\frac{\mu}{2}\sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}-\frac{2}{3}\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right)^2+\zeta\left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma}\right)^2. \tag{1.66}$$

物理量ε是ρT乘以单位时间内由于内摩擦，部分动能转化为热量造成的熵s的增加；换句话说，ϵ是单位时间单位质量流体释放的热量。由于有辐射、化学反应、相变或任何其他原因造成的额外热量内流，方程组（1.60）、（1.62）、（1.65）和（1.65'）右边必须增加一项ρQ，其中Q是单位时间传入单位质量的额外热量内流。方程组（1.2）、（1.4）和（1.65）或（1.65'）加上方程组（1.63）和（1.66）给出了确定五个未知函数$u_i(\boldsymbol{x},t), i=1,2,3$、$p(\boldsymbol{x},t)$和$\rho(\boldsymbol{x},t)$或者$T(\boldsymbol{x},t)$的五个方程的一般系统。

在（通常含义下的）热不均匀流体情形也可以得到（1.65'）类型的一个方程。这里，流体热膨胀定律

$$\rho-\rho_0=-\beta\rho_0(T-T_0) \tag{1.67}$$

起到了状态方程的作用，其中ρ和ρ_0分别是温度T和T_0时的密度，β 时热膨胀系数。可以证明在这些条件下，方程（1.62）取这样的形式

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\right)=\beta T\left(\frac{\partial p}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial p}{\partial x_\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial x_\alpha}\right)+\rho\varepsilon \tag{1.68}$$

而对于ε的表达式，在液体情形，我们可以假设$\frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma}=0$，于是

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\nu\sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right)^2 \tag{1.69}$$

[见例如，Howarth(1953)，第II卷，第14章]。对于普通液体，系数β非常小（例如，对于水，在15°C时为$\beta\approx1.5\times10^{-4}$每度）；于是在方程（1.69）中我们可以忽略含有这个系数的项。于是我们得到

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial T}{\partial x_\alpha}=\chi\Delta T+\frac{\varepsilon}{c_p} \tag{1.70}$$

其中$\chi=\frac{\kappa}{\rho c_p}$是介质的热扩散系数（或热传递系数），在这里以及后面假定为常量[参见1.1节中从方程（1.3）到方程（1.4）的转换]。方程（1.70）中的项$\frac{\epsilon}{c_p}$描述了流体内摩擦造成的介质的一般性加热；在真实条件下这种加热一般发挥完全不重要的作用，可以完全忽略。于是方程（1.70）进一步简化，变换为运动介质中热传导的常微分方程

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial T}{\partial x_\alpha}=\chi\Delta T. \tag{1.71}$$

我们在接下来的讨论中讲广泛使用这个方程。

最重要的是，方程（1.71）不仅可以应用于液体，也可以应用于气体，只要这些气体的速度远小于相应的声速$a=\sqrt{\gamma\frac{p}{\rho}}$，$\gamma=\frac{c_p}{c_V}$。可以证明在这样的速度下，在方程（1.65'）中压强变化比温度变化起的作用小得多。因此右边含有p 的项可以忽略；于是可以很快得到方程（1.70），或者再忽略由于内摩擦造成的介质加热，很快得到方程（1.71）。我们应该注意到比较方程（1.70）和（1.65）表明在方程（1.65）中，和方程（1.65'）不同，不可能忽略$-p\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}$项；在热量方程中必须考虑加热和冷却过程中密度变化导致的收缩和膨胀，甚至在速度小的时候也是如此。然而，在动力学方程中，对于速度远小于声速的运动，可以假设速度场是完全“不可压缩的”，只要温度不均匀性产生的密度变化绝对值较小，即只要流动中温度的绝对差值和平均的绝对温度T_0相比较小。在这些条件下，也可以假设在ε的表达式中，$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}=0$，即$\varepsilon$再次取方程（1.69）中的形式。在不可压缩介质的情形，$Tds=de$；于是在不可压缩流体中，ε将严格等于单位时间单位质量的内能增加，即单位时间单位质量流体的动能耗散量（转换为热量）[参见Landau和Lifshitz(1963)第16节]。尽管在温度场的计算中，这个量一般可以忽略，但它是这个运动的一个非常重要的物理特征；为了简单，我们将简单称其为“能量耗散率”。

我们必须再一次强调方程（1.72）形式上等同于扩散方程

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial\vartheta}{\partial x_\alpha}=\chi\delta\vartheta \tag{1.72}$$

它描述了介质中某种被动外加物的浓度$\vartheta(\boldsymbol{x},t)$（即，对流动的动力学没有影响的成分）。唯一的不同是在后一种情况下，系数χ必须解释为热扩散系数，而不是分子扩散系数。因为方程（1.71）和（1.72）在形式上相同，所以，在考虑方程（1.72）时，我们应该总是记住，物理量ϑ这里可以表示某种被动外加物的浓度或者温度。对于很多应用场景，考虑温度变化的重要性，为了简单，我们总是简单地认为ϑ是温度；然而，必须记住，符号ϑ 可能实际上总是表示某种被动外加物的浓度，在我们不将温度考虑为被动外加物的那些情形，我们将把它记作T而不是ϑ。

被动外加物的假设表明速度场$u_i(\boldsymbol{x},t)$可以不依赖于ϑ场，从不可压缩流体的常微分方程组确定，然后带入方程（1.72）。如果我们把ϑ取为温度，那么流体中不同地方的温度差必须足够小，产生的流体物理性质的改变对于运动没有影响。然而，同事，这些温度差必须足够大，使得内摩擦加热相比它们可以忽略。在这种情形，温度不均匀性会直接随流体运动，同时在分子热传导影响下被平滑掉；在这样的条件下产生的不均匀加热流体的运动通常被称为*受迫对流*（forced convection）。

流动在温度不能被认为是被动外加物的一个重要情形是引力场中非均匀加热的流体。这类流动由于阿基米德作用力而出现，这种作用力导致了较热的流体团向上浮，较冷的流体团向下沉。这样的温度不均匀流体的运动称为**自由对流**（free convection）。让我们确定这个情形的运动方程。假设运动速度足够小，压强变化（而不是温度变化）产生的密度变化可以忽略。所以，由此我们可以使用关于不可压缩性的常微分方程（1.5）和纳维-斯托克斯方程组（1.6），但是在方程组（1.6）中考虑体作用力$\boldsymbol{X} = -g\boldsymbol{e}_3$（其中$\boldsymbol{e}_3$是沿轴$Ox_3 = Oz$ 的单位矢量）并记住密度ρ 依赖于温度。我们现在假设（绝对）温度$T(x_1, x_2, x_3, t) = T(x, y, z, t)$可以写为$T = T_0 + T_1$的形式，其中$T_0$是某个不变的平均值，$T_1$ 是对T_0的小的偏离。在此情形明显$\rho = \rho_0 + \rho_1$，其中ρ_0 是对应T_0的不变的密度，$\rho_1 = \rho - \rho_0$定义为

$$\rho_1 = -\beta\rho_0 T_1 \tag{1.73}$$

（满足方程（1.63）的气体的热膨胀系数$\beta = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial T}\right)_p$显然将等于$1/T_0$）。然而，我们注意到对于$T = T_0 =$ 常量和$\rho = \rho_0 =$ 常量，压强p_0不会是常量，而是会随高度降低，因为一点上方的液柱重量减小了：

$$p_0 = -\rho_0 g x_3 + \text{常量}. \tag{1.74}$$

令$\rho = \rho_0 + \rho_1$，中一阶小量的精度上，我们得到

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial x_3} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_1}{\partial x_3} - \frac{\rho_1}{\rho_0^2}\frac{\partial p_0}{\partial x_3} = -g + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_1}{\partial x_3} + g\beta T_1.$$

于是很明显在此情形第三个纳维-斯托克斯方程可以写成这种形式

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + u_\alpha\frac{\partial u_3}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_1}{\partial x_3} + \nu\Delta u_3 - g\beta T_1 \tag{1.75}$$

（这个方程中存在一个含T_1的项马上表明了在此情形温度不能被认为是一个被动外加物）。然而，第一个和第二个纳维-斯托克斯方程在此情形具有通常的形式（1.6）；ρ项可以从一开始用常量ρ_0替代，p意指对压强平均值p_0的偏离p_1，不依赖于$z = x_3$。最终，如一贯那样当介质可以假设为不可压缩的时候，温度方程取运动流体热传导的常微分方程的形式

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + u_\alpha\frac{\partial T_1}{\partial x_\alpha} = \chi\Delta T_1 \tag{1.76}$$

（和往常一样，我们忽略温度方程中含ε的项）。于是我们得到五个未知

函数$u_i(\boldsymbol{x},t), i=1,2,3$、$p_1(\boldsymbol{x},t)$和$T_1(\boldsymbol{x},t)$的五个方程（1.5）、（1.6）$(i=1,2)$、（1.75）和（1.76）的近似方程组。这些方程描述了流体的自由对流。早在十九世纪，J.布西内斯克（J. Boussinesq）就首次考虑了这些方程。因此它们被称为自由对流方程或布西内斯克方程（或流体力学方程的布西内斯克近似）。关于得到这些方程的近似的详细讨论可以在例如Chandrasekhar(1961)或Mihaljan(1962)中找到。

1.6 热不均匀流体的相似性判据；热边界层

我们已经看到，只要两个流动的雷诺数相等，两个几何相似的不可压缩流体的流动也是力学相似的。然而，在热不均匀或可压缩流体的情形，这个结论不对。两个几何相似流动之间要存在力学和热力学相似性，我们需要一些无量纲特征量（“相似性判据”，我们现在考虑）同时相等。

让我们首先考虑不均匀加热流体流动的简单情形，其中温度可以认为是被动外加物。在此情形，这个流动可以用通常的不可压缩流体力学（ρ不变）的表达式（1.5）-（1.6）描述，然而，在其中必须加入关于温度的热传导方程（1.72）。为了简单，我们仅考虑稳态运动的情况，即，我们假设u_i、p和ϑ都不依赖于时间。在我们的方程中有两个常系数ν和χ（都具有量纲L^2T^{-1}，其中L和T表示长度和时间的量纲）。此外，在几何相似情形，这个问题的边界条件将用某个长度标度L、速度标度U以及温度差的标度$\vartheta_1-\vartheta_0$（例如，刚体壁和流动之间的典型温度差）。然而，因为在此情形温度是被动的，对动力学没有影响，所以温度单位可以任意选取。所以我们必须假设

$$|\vartheta_1-\vartheta_0|=\Theta,$$

其中Θ是一个不依赖于L和T的新的量纲符号（例如，“摄氏度”）。然而，在此情形，用ν、χ、L、U和$\vartheta_1-\vartheta_0$的组合只能写出两个独立的无量纲量。例如，我们可以取雷诺数$\mathrm{Re}=\frac{UL}{\nu}$和普朗特（Prandtl）数

$$\mathrm{Pr}=\frac{\nu}{\chi}. \tag{1.77}$$

其中ϑ是一个被动外加物的浓度，不是温度，所以χ是扩散系数，比例ν/χ有时称为施密特数（Schmidt number），记作Sc。

有时替代Pr，用佩克莱特（Peclét）数

$$\mathrm{Pe}=\frac{UL}{\chi}=\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Pr} \tag{1.78}$$

比较方便，这个数确定了方程（1.73）中平流项$u_\alpha \frac{\partial \vartheta}{\partial x_\alpha}$ 和$\chi \nabla^2 \vartheta$项的比例的数量级，它在温度场的研究中扮演了和雷诺数在动力学问题中类似的角色。然而，普朗特数相比佩克莱特数有一个优势，它只依赖于运动流体的性质（即，它是介质的一个特征量）并且不依赖于运动的特征。对于空气（和其他双原子气体），$\mathrm{Pr} \approx 0.7$并且几乎不依赖于温度。一般地，对于大多数气体，Pr是1的量级。对于液体（除了液体金属），普朗特数通常远远大于1，随着温度升高急剧减小；例如，对于水（在大气压下），在20°C时$\mathrm{Pr} \approx 7$，在80°C时$\mathrm{Pr} \approx 2$。对于非常黏滞的原油，Pr远比水的要大，有可能达到数百甚至上千。另一方面，对于液体金属，它们的特点是有非常大的热扩散系数。例如，对于汞，在20°C时$\mathrm{Pr} \approx 0.023$；对于其他熔化的金属，这个数通常更小（在$10^{-3}$的量级）。在$\chi$是被动外加物的扩散系数时，普朗特数或（就是用样的东西的）施密特数对于气体和液体也具有非常不同的量级。在气体介质中，扩散系数和黏滞系数有相同的量级，故$1/\chi \sim 1$。对于水这类的液体，$\nu/\chi \sim 10^3$，对于非常黏滞的液体，这个比例变得更大，可以达到10^6的量级，甚至更大。

两个几何相似流动的温度场要相似，那么它们的雷诺数Re和普朗特数Pr （或Re 和Pe）必须都相等。一般地，对于仅仅几何相似的流动，温度场将由

$$\vartheta(\boldsymbol{x}) - \vartheta_0 = (\vartheta_1 - \vartheta_0)\varphi\left(\frac{\boldsymbol{x}}{L}, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}\right) \tag{1.79}$$

确定，它和速度场相似性方程（1.31）不同，在这里φ依赖于两个无量纲参数。

用完全相同的方法，如果我们令q为通过浸入流体的物体表面的热流密度（即，我们令$q = -\chi \frac{\partial \vartheta}{\partial n}$，其中$n$正交于物体表面，向外），那么

$$q = \frac{\chi(\vartheta_1 - \vartheta_0)}{L}\psi\left(\frac{\boldsymbol{x}}{L}, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}\right).$$

换句话说，在物体边界上每一点上，比例$\mathrm{Nu} = \frac{qL}{\chi(\vartheta_1 - \vartheta_0)}$将只依赖于雷诺数和普朗特数。然而，如果我们把热流替换为物体表面单位面积的平均热流q_m （表征了物体和流体之间总的热量交换），那么在方程

$$\mathrm{Nu} = \frac{q_m L}{\chi(\vartheta_1 - \vartheta_0)} = \psi(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}) \tag{1.80}$$

中函数ψ现在不是这两个变量的普适函数，对于几何相似的流动，它确定了热量交换对流体的物理性质和长度、速度和温度差的标度的依赖。在热力工程中，物理量Nu称为努塞特数 （Nusselt number）。除了努塞

特数，我们也可以使用热量交换的特征量，**热输运系数**（heat-transfer coefficient），也称为**斯坦顿数**（Stanton number）

$$c_h = \frac{q}{c_p \rho U(\vartheta_1 - \vartheta_0)} = \frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Re\ Pr}} = \frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}. \qquad (1.80')$$

现在让我们转向自由对流的情形。这里，这个问题的微分方程含有三个有量纲系数ν、χ和$g\beta$（对于理想气体$\beta = \frac{1}{T_0}$）；现在，边界条件由典型长度L和典型温度差$T_m - T_0$描述（注意在此情形没有典型速度）。从这些条件明显看出，不可能得到两个无量纲组合。例如，我们可以取普朗特数和**格拉绍夫数**（Grashof number）

$$\mathrm{Gr} = \frac{g\beta L^3(T_m - T_0)}{\nu^2}. \qquad (1.81)$$

除了格拉绍夫数，我们也可以使用由它导出的**瑞利数**（Rayleigh number）：

$$\mathrm{Ra} = \frac{g\beta L^3(T_m - T_0)}{\nu\chi} = \mathrm{Gr} \cdot \mathrm{Pr}.$$

于是，在几何相似流动中自由对流的情形，速度和温度场只有在相似性判据Pr和Ra 相等时是相似的。然而，一般来说，在几何相似的情形，我们只能得到

$$u_i = \frac{\nu}{L} f_i\left(\frac{\boldsymbol{x}}{L}, \mathrm{Pr}, \mathrm{Gr}\right), \quad T_1 = (T_m - T_0)\varphi\left(\frac{\boldsymbol{x}}{L}, \mathrm{Pr}, \mathrm{Gr}\right), \qquad (1.82)$$

$$q_m = \frac{\chi(T_m - T_0)}{L}\psi(\mathrm{Pr}, \mathrm{Gr}),$$

形式的关系，其中$f_i, i = 1, 2, 3$、φ和ψ是新的普适函数。一般来说，对于由方程（1.2）、（1.4）、（1.63）、（1.65）和（1.66）的完整系统描述的不可压缩流体的流动，相似性判据的数量更大；然而，我们不会关心这一点。

对于佩克莱特数$\mathrm{Pe} = \frac{UL}{\chi}$非常大的流动（例如，在雷诺数大且普朗特数小或者为1的量级时），热传导方程中的$\chi\nabla^2\vartheta$将远小于非线性项$u_\alpha \frac{\partial\vartheta}{\partial x_\alpha}$，所以在一阶近似下，分子热传导的效应可以忽略。然而，正如动力学问题中的黏滞效应，这个效应只有在距离浸入流动中的刚体一段距离才可以忽略。在这样的物体表面附近可能形成一个薄的热边界层。在这一边界层中，温度迅速从物体温度ϑ_1变为接近ϑ_0的温度（这是不存在刚体时应该看到的温度）。此外，这一层中热传导的效应和温度平流效应量级相同，由$u_\alpha \frac{\partial\vartheta}{\partial x_\alpha}$项描述。所以，我们可以得到[以类似于方程（1.32）推导的方式] 热边界层的厚度δ_1为$\frac{L}{\sqrt{\mathrm{Pe}}} = \frac{L}{\sqrt{\mathrm{Re} \cdot \mathrm{Pr}}}$的量级。换句话说，它反比于$\sqrt{\mathrm{Re}}$，对于量级为1的普朗特数，它

和δ同量级。考虑$q=-\chi\frac{\partial\vartheta}{\partial n}\sim\chi\frac{\vartheta_1-\vartheta_0}{\delta_1}$，对于大雷诺数我们容易得到

$$\mathrm{Nu}=\frac{qL}{\chi(\vartheta_1-\vartheta_0)}\sim\sqrt{\mathrm{Re}}.$$

在热边界层内，热传导方程可以用类似于普通边界层中运动方程简化的方法进行简化。特别地，在流过保持在某个温度ϑ_1的平面的处于给定温度ϑ_0的流体流动的情形，热边界层中的热传导方程可以写成这种形式

$$u\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+w\frac{\partial\vartheta}{\partial z}=\chi\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2} \tag{1.83}$$

这和方程（1.41）类似。对于边界条件，显然对于$z=0$，$\vartheta=\vartheta_1$以及对于$z\to\infty$，$\vartheta=\vartheta_0$。令$\vartheta(x,z)=\vartheta_1-(\vartheta_1-\vartheta_0)\Theta\left(\sqrt{\frac{U}{\nu}}\frac{z}{\sqrt{x}}\right)$，连同方程（1.46）和（1.47）代入方程（1.83）我们容易得到

$$\Theta''+\frac{\mathrm{Pr}}{2}\varphi\Theta'=0;\quad\Theta(0)=0,\quad\Theta(\infty)=1 \tag{1.84}$$

其中φ是方程（1.48）的一个解。于是得到了$\Theta(\eta)$的一个简单的线性方程。泊尔豪森（Pohlhausen）在1921年首次给出了这个方程的显式解[见Goldstein(1938)，第2 卷，第268节；Howarth(1953)第2卷，第14章，第13节；Schlichting(1960)，第14 章，第7 节；Longwell(1966)，第2 章，第7-15节]。特别地，在$\mathrm{Pr}=1$时，比较方程（1.84）和（1.48）表明$\Theta(\eta)$的解具有$\Theta(\eta)=\varphi'(\eta)$的形式。所以在此情形，温度轮廓和速度轮廓非常类似。然而，对于其他Pr值，函数$\Theta(\eta)$可以容易地由图2上可以知道的函数$\varphi'(\eta)$数值地得到（见图6）。

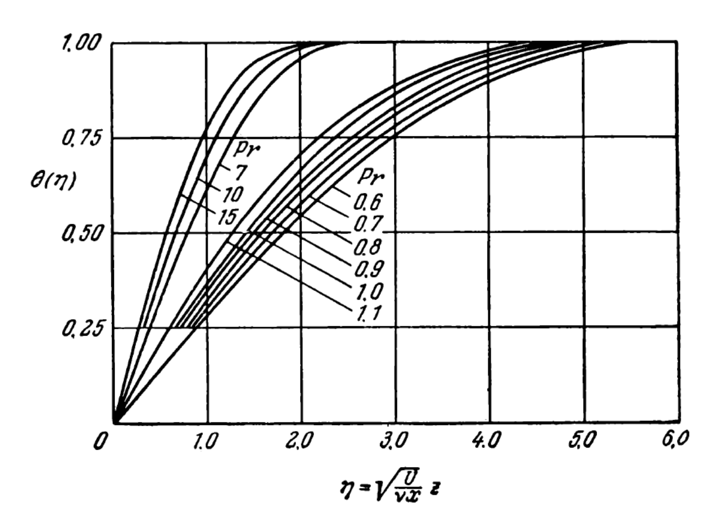


图 6 不同普朗特数的平面上方边界层中的温度轮廓。

1.7 可压缩流体中的小振荡

方程（1.2）、（1.4）、（1.63）、（1.65）和（1.66）的一般系统描述的可压缩流体

的流动一般非常复杂，它们的理论研究困难很大。在现在的阶段，我们将限制于偏离静止位置（或者匀速运动）的小振荡的情形，在这些情形可以使用线性化的方法。Carrier和Carlson(1946)、Yaglom(1949)和Kovásznay(1953) 已经证明了在此情形，所有可能的运动可以分为特征相当不同的三种类型的振荡。这种划分在本书第2卷中可压缩气体种各向同性湍流和湍流介质中波的传播的讨论中扮演了重要作角色。

让我们考虑密度ρ_0和压强p_0为常量的静态理想气体团（对于以不变的速度$\boldsymbol{u}$运动的气体当然可以通过变换到一个新的惯性坐标系转变为静态气体的情形）。我们现在假设在初始时刻气体中出现了小扰动，由流体动力学量的小变化表征，$u_i(\boldsymbol{x},t)$、$\rho'(\boldsymbol{x},t)=\rho(\boldsymbol{x},t)-\rho_0$和$p'(\boldsymbol{x},t)=p(\boldsymbol{x},t)-p_0$，其中$\frac{\rho'}{\rho_0}\ll 1$、$\frac{p'}{p_0}\ll 1$和$\frac{|u|}{a_0}\ll 1$（这里$a_0=\sqrt{\gamma\frac{P_0}{\rho_0}}$时未扰动介质中的声速，$\gamma=\frac{c_p}{c_V}$）。在此情形，场$u_i(\boldsymbol{x},t)$、$\rho'(\boldsymbol{x},t)$和$p'(\boldsymbol{x},t)$在一阶近似下的时间变化可以由（对速度分量$u_i$和对压强、密度和温度对相应未扰动值$p_0$、$\rho_0$和$T_0=\frac{p_0}{R\rho_0}$的偏差线性化的）方程（1.2）、（1.4）、（1.63）、（1.65）和（1.66）的系统确定。于是状态方程（1.63）使得我们可以立即从未知量中消去温度，得到五个未知量的五个方程的封闭系统。关于未知量，我们可以取，例如速度的三个分量和某两个压强和密度的单值函数。根据Kovásznay(1953)和Chu和Kovásznay(1958)，我们可以取这两个函数为无量纲的压强$P=\frac{p}{\gamma p_0}$和熵除以c_p：$S=\frac{s}{c_p}=\log\frac{p^{1/\gamma}}{\rho}+$常量。于是在更高阶小量的差别上

$$\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}=(P-P_0)-(S-S_0),\quad \frac{T-T_0}{T_0}=(\gamma-1)(P-P_0)+(S-S_0).$$

线性化的变量u_i、P和S的流体动力学系统将取这种形式

$$\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}=0, \tag{1.85}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+a_0^2\frac{\partial P}{\partial x_i}-\nu\nabla_i^2-\left(\frac{\nu}{3}+\eta\right)\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_i\partial x_\alpha}=0,\quad \eta=\frac{\zeta}{\rho_0},\quad i=1,2,3, \tag{1.86}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}-\chi\nabla^2 S-(\gamma-1)\chi\nabla^2 P=0. \tag{1.87}$$

引入涡度分量$\omega_k=\varepsilon_{k\alpha\beta}\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}$和散度$D=\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}$替代速度场分量$u_i$ 变换方程（1.85）和（1.86），由方程（1.86）我们有

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial t}-\nu\nabla^2\omega_k=0,\quad k=1,2,3, \tag{1.88}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t}-\nu_1\nabla^2 D+a_0^2\nabla^2 P=0,\quad \nu_1=\frac{4\nu}{3}+\eta, \tag{1.89}$$

而方程（1.85）在考虑方程（1.87）后变为

$$\frac{\partial P}{\partial t}-(\gamma-1)\chi\nabla^2 P-\chi\nabla^2 S+D=0. \tag{1.90}$$

首先，我们注意到涡度分量ω_k只出现在方程（1.88）中，这个方程与不可压缩流体涡度场的线性化方程相符。关于这种联系，我们回想在不可压缩流体中我们可以唯一地把速度场u_i用涡度场ω_k和相应的边界条件写出；另一方面，在不可压缩介质中，速度场可以用不可压缩（无散度的）和无旋（位势）分量的和来表示，后者不依赖于涡度场。所以对于只代表静止状态的弱扰动的运动，一级近似的流体动力学方程系统分为一个描述不可压缩流动的涡度场分量ω_k的封闭方程系统，和一个描述无旋位势流的D、P和S的方程系统。在这个近似中，压强和熵的涨落只通过可压缩无旋流相联系，即它们不出现在流动的不可压缩（涡度）分量中。在小扰动的更高阶近似中，这两个分量会相互作用，因而导致压强和熵的额外

变换（我们将在本小节最后简单讨论这一点）。

为了仔细研究线性化方程组（1.87）-（1.90）描述的运动的类型，特别是证明D、P和S的方程实际上描述了两种不同类型的振荡，我们使用通常的傅里叶方法。为达到这个目的，我们假设所有场$\omega_j(\boldsymbol{x},t)$、$D(\boldsymbol{x},t)$、$P(\boldsymbol{x},t)$ 和$S(\boldsymbol{x},t)$是对应某个波数矢量$\boldsymbol{k}$的空间坐标的周期函数。此外，我们把通常的时间t替换为无量纲时间$\tau=a_0kt$，其中$k=|\boldsymbol{k}|$，把散度替换为无量纲散度$\frac{D}{a_0k}$：

$$\omega_j(\boldsymbol{x},t)=\omega_j(\tau)e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}},\quad \frac{D(\boldsymbol{x},t)}{a_0k}=D(\tau)e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}},$$

$$P(\boldsymbol{x},t)=P(\tau)e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}},\quad S(\boldsymbol{x},t)=S(\tau)e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}.$$

于是方程（1.88）取这种形式

$$\frac{\mathrm{d}\omega_j(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=-\frac{\nu k}{a_0}\omega_j,\quad j=1,2,3, \tag{1.91}$$

余下的方程变换为下面通常的线性方程：

$$\frac{\mathrm{d}D(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=-\frac{\nu_1 k}{a_0}D+P;$$

$$\frac{\mathrm{d}P(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=-D-(\gamma-1)\frac{\chi k}{a_0}P-\frac{\chi k}{a_0}S;$$

$$\frac{\mathrm{d}S(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=-(\gamma-1)\frac{\chi k}{a_0}P-\frac{\chi k}{a_0}S. \tag{1.92}$$

因此得到结论，涡度场分量的幅度$\omega_j(t)$按照

$$\omega_j(t)=\omega_j(0)e^{-\nu k^2 t} \tag{1.93}$$

随时间减小，而速度散度场、压强场和熵场的幅度$D(t)$、$P(t)$和$S(t)$将具有

$$A_1e^{\lambda_1 a_0 kt}+A_2e^{\lambda_2 a_0 kt}+A_3e^{\lambda_3 a_0 kt}$$

的形式，其中λ_1、λ_2和λ_3是方程组（1.92）的特征方程

$$\lambda^3+\frac{(\nu_1+\gamma\chi)k}{a_0}\lambda^2+\left(1+\frac{\gamma\nu_1\chi k^2}{a_0^2}\right)\lambda+\frac{\chi k}{a_0}=0 \tag{1.94}$$

的三个解。

如果我们注意到方程（1.91）-（1.94）含有量级非常不同的无量纲参数，那么可以进一步简化这些结果。实际上，方程组（1.92）和方程（1.94）的所有系数都可以用下面三个无量纲参数表示：

$$\delta_1=\frac{\nu_1 k}{a_0},\quad \pi_1=\frac{\nu_1}{\chi},\quad \gamma=\frac{c_p}{c_V}; \tag{1.95}$$

然而，在方程组（1.91）中出现了无量纲参数$\delta=\frac{\nu k}{a_0}$，它和δ_1的差异仅在于黏滞系数的变化$\nu_1=\frac{4}{3}\nu+\eta=\frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho_0}+\frac{\zeta}{\rho_0}$，这由普通的运动黏滞系数$\nu$定义了一个位势流中的内摩擦。$\pi_1$类似于通常的普朗特数$\mathrm{Pr}=\frac{\nu}{\chi}$，具有相同的量级；故而对于气体介质$\pi_1\sim 1$，正如$\gamma\sim 1$（对于空气，$\gamma\approx 1.4$）。同时，$\delta=\frac{\nu k}{a_0}$具有与气体平均自由程$l$和扰动波长$\Lambda=\frac{2\pi}{k}$之比$\frac{l}{\Lambda}$相同的量级（因为$\nu\sim vl$，其中$v$是分子热运动的均方根速度，$a\sim v$，$k\sim 1/\Lambda$）。于是，在所有气体运动可以用通常流体力学方程描述的情形，$\delta\ll 1$（特别地，对于通常条件下的空气，$\frac{\nu}{a_0}\approx 0.5\times 10^{-5}\,\mathrm{cm}$，也就是说，即使$\Lambda\approx 1\,\mathrm{mm}$，也有$\delta<10^{-4}$）。此外，$\delta_1=\frac{\nu_1}{\nu}\delta$具

有相同的量级，故而$\delta_1 \ll 1$。

现在，忽略方程（1.91）-（1.92）中量级为δ（或δ_1）的项，我们得到简化的方程组

$$\frac{\mathrm{d}\omega_j(t)}{\mathrm{d}t}=0,\quad \frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}=0,\quad \frac{\mathrm{d}D(t)}{\mathrm{d}t}=a_0^2k^2P,\quad \frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}=-D. \tag{1.96}$$

和方程组（1.96）头两个方程一样，涡度场$\omega_j(\boldsymbol{x},t)$和熵场$S(\boldsymbol{x},t)$在所讨论的近似下在空间中保持不变。方程组（1.96）的最后两个方程表明

$$\frac{\mathrm{d}^2D(t)}{\mathrm{d}t^2}+a_0^2k^2D(t)=0,\quad \frac{\mathrm{d}^2P(t)}{\mathrm{d}t^2}+a_0^2k^2P(t)=0,$$

或者立即由总的场量$D(\boldsymbol{x},t)$和$P(\boldsymbol{x},t)$的单个傅里叶分量得到

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2}=a_0^2\nabla^2 D,\quad \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}=a_0^2\nabla^2 P. \tag{1.97}$$

于是对于压强场$P(\boldsymbol{x},t)$和速度散度场$D(\boldsymbol{x},t)$，我们得到相同的描述以声速a_0传播的波的波动方程。

我们看到，在（小参数δ的）零级近似下，流体动力学量的扰动分解为三个无相互作用的分量。这些分量被称为*不可压缩涡度模式*（incompressible vorticity mode，由涡度场$\omega_j(\boldsymbol{x})$描述，不随时间变化，或者用不变的未扰动速度$\boldsymbol{x}$表示，）、*熵模式*（entropy mode，由静态熵场$S(\boldsymbol{x})$描述，或用速度$\boldsymbol{x}$表示）和*位势模*或*声波模*（potential mode or acoustic mode，和速度场的位势部分的涨落和压强的涨落相联系，由一组以未扰动声速a_0传播的波代表）。

如果我们也考虑δ量级的效应，那么我们可以立刻发现涡度模式的速度场将在黏滞的影响下慢慢耗散，和方程（1.93）相符。如果我们也想写出精度δ的熵模式和声波模式，那么将方程（1.94）重写这种形式

$$\lambda^3+\left(1+\frac{\gamma}{\pi_1}\right)\delta_1\lambda^2+\left(1+\frac{\gamma}{\pi_1}\delta_1^2\right)\lambda+\frac{\delta_1}{\pi_1}=0, \tag{1.94$'$}$$

它只含有参数（1.95）。于是容易用通常的幂级数方法确定方程（1.94'）的三个δ_1量级的根。结果，我们得到

$$\lambda_1=i-\frac{\pi_1+\gamma-1}{2\pi_1}\delta_1,$$
$$\lambda_2=-i-\frac{\pi_1+\gamma-1}{2\pi_1}\delta_1,$$
$$\lambda_3=-\frac{1}{\pi}\delta_1. \tag{1.98}$$

这些方程表明，如果限于量级不超过δ_1的项，不讨论涡度模式，那么在可压缩介质中，存在三个具有相同波数矢量$\boldsymbol{k}$的不同的波。两个这种波会以同样的速率$\frac{\pi_1+\gamma-1}{2\pi_1}\delta_1 a_0 k=\frac{\nu_1+(\gamma-1)\chi}{2}k^2$ 衰减，并将沿矢量$\boldsymbol{k}$和$-\boldsymbol{k}$方向以未扰动声速a_0传播；第三个波相对于未扰动流动是静止的，衰减速率未$\frac{\chi k}{a_0}a_0k=\chi k^2$。（不难证明即使考虑量级为$\delta_1^2$的项，这也只改变根$\lambda_1$和$\lambda_2$的虚部，即它导致声波传播速度对黏滞系数和热扩散系数有弱的依赖[参见Yaglom(1948)]。）通过进一步假设$D(\tau)$、$P(\tau)$ 和$S(\tau)$对τ的依赖由因子$e^{\lambda_j\tau}$（$j=1,2,3$）确定，把相应的特解带入方程组（1.92），容易证明这个方程组的通解，包括量级为δ_1的项在内，可以用下面两个解之和的形式表示：

$$S(\tau)=S_0e^{\lambda_3\tau},\quad P(\tau)=0,\quad D(\tau)=-\frac{\delta_1}{\pi_1}S_0e^{\lambda_3\tau} \tag{1.99}$$

并且

$$D(\tau) = D_0^{(1)} e^{\lambda_1 \tau} + D_0^{(2)} e^{\lambda_2 \tau}, \quad S(\tau) = -\frac{\gamma - 1}{\pi_1} \delta_1 \left[D_0^{(1)} e^{\lambda_1 \tau} + D_0^{(2)} e^{\lambda_2 \tau} \right],$$

$$P(\tau) = D_0^{(1)} \left[i + \frac{\pi_1 - \gamma + 1}{2\pi_1} \delta_1 \right] e^{\lambda_1 \tau} + D_0^{(2)} \left[i + \frac{\pi_1 - \gamma + 1}{2\pi_1} \delta_1 \right] e^{\lambda_2 \tau} \tag{1.100}$$

于是，很明显在所考虑的近似下，扰动的熵模式对应于某个任意的不在空间中运动、但在热传导作用下逐渐平滑掉的初始熵（或温度）分布。同样与这个模式相联系的是非常弱的（量级为δ_1）速度和速度散度$D = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}$的位势模式的体积分布。这个分布是由热不均匀介质体积元的热膨胀和收缩建立的。然而，声波模式将由压强波和速度散度波组成，它们具有$D_0 e^{\mathrm{i}(kx \pm a_0 kt) - \frac{\nu_1 + (\gamma-1)}{2} k^2 t}$的形式，以速度$a_0$ 传播，被分子黏滞和热传导轻微减弱。这些波耶会产生极弱的熵输运（量级为δ_1）。

这样把任意流体动力学场的扰动分解为涡度、熵和声波模式的方法容易扩展到相对δ和δ_1 的所有阶上。然而，在实际中，在所有情况下限制于上面给出的那些项就足够了。更重要的是流体动力学方程中非线性项在单独的扰动模式中引入的变化。为了考虑这个效应，有必要进行小扰动理论中的下一个近似，它保持方程（1.87）-（1.90）中对于流体动力学量双线性的项。在这些项中，基本物理量可以根据一级近似的方程定义，即，假设它们符合上面给出的线性化方程的解。于是方程（1.87）-（1.90）在接下来的近似中会含有一些非常小的已知函数形式的附加成分，可以自然地移到方程右边并认为是相应流体动力学场的三维“源”。这些方程的解将和上面给出的均匀方程（1.87）-（1.90）的解相差相应的源产生的附加项，即线性理论的单独成分的双线性组合或“相互作用”。再一次把线性化方程的解写成涡度、熵和声波模式之和的形式，我们得到六个不同的成对的这三个模式的双线性（和二次）组合，即，六种不同的“相互作用”，每一种可以在描述任意这三个模式的解中做出一定补充，也就是说，它们“产生”这个模式。

然而，很自然的是，这样产生的18个二阶效应中的很多将用含有因子δ或δ_1 的双线性组合表示，故而发挥很小的作用。例如，由（精确到δ_1量级的项）熵模式只含有熵的涨落这个事实，我们可以得到，在对于δ的零级近似下，这个模式根本不会和自己相互作用，而它和涡度模式的相互作用仅会在扰动场的熵模式中引入一个明确的贡献[明显和方程（1.62）的平流项相联系]。对所有可能的“相互作用”的观点的完整分析可以在Chu和Kovásznay(1958)的文章中找到。这个分析的结果在下面的表格中展示，它给出了所有18个二阶效应相对δ_1的量级。除此之外，对于所有相对δ_1的零级效应，Chu和Kovásznay给出了相应的必须添加到线性化方程右边的三维源的显式表达式。但是我们不会详细研究所有零级效应，如从下表中所见，这些效应中相当一部分是流体动力学不均匀性简单地被速度场从一个流体元移动到另一个流体元。我们将仅仅详细讨论最重要的涡度模式和它自己的相互作用（回忆在通常的弱可压缩介质中，涡度模式的幅度远超过其他模式）。

相互作用	产生		
	声波模式	涡度模式	熵模式
声波模式和声波模式	$O(1)$ “声波被声波散射”以及“声波的非线性扭曲”	$O(\delta_1)$	$O(\delta_1)$
涡度模式和涡度模式	$O(1)$ “涡度产生声波”	$O(1)$“涡线拉伸”或“转动速度场对涡度的惯性输运”	$O(\delta_1)$
熵模式和熵模式	$O(\delta_1)$	$O(\delta^2)$	$O(\delta_1)$
声波模式和涡度模式	$O(1)$ “声波被速度场的转动不均匀结构散射”	$O(1)$ “声波对涡度的输运”	$O(\delta_1)$
声波模式和熵模式	$O(1)$ “声波被温度不均匀结构散射”	$O(1)$ “熵和压强相互作用产生涡度”（比耶肯斯效应）	$O(1)$ “声波输运热量”
涡度模式和熵模式	$O(\delta_1)$	$O(\delta_1)$	$O(1)$ “涡度输运热量”

因为涡度模式只和速度场扰动相联系，它和自己的相互作用只会来自流体动力学方程

中速度的双线性项。在熵方程（即，热量方程）中有这种双线性项（在$\rho\varepsilon$项中）但是含有黏滞系数，从这些项明显看到通过这个相互作用产生的熵模式的量级不超过δ。运动方程的项$u_\alpha \frac{\partial S}{\partial x_\alpha}$将发挥重要得多的作用，它对于速度是双线性的。这些项将决定所有“重要的”和涡度模式和自己相互作用相关的二阶效应。

保持运动方程中的$u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}$项，然后考虑涡度方程，我们得到方程（1.7）

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial t} + \nu \nabla^2 \omega_k = -u_\alpha \frac{\partial \omega_k}{\partial x_\alpha} + \omega_\alpha \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha},$$

这和方程（1.88）不同于右边描述了由于涡线拉伸产生涡度的过程。假设在右边，场u_α是不可压缩的，满足方程（1.88），我们得到第一个重要的“二阶效应”－速度场的涡度模式和自己相互作用导致的涡度模式的产生。这个相互作用对声波模式的影响可以用相对δ的零级近似确定，忽略流体动力学方程中所有含黏滞系数和热扩散系数的项，以及运送方程中除$u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}$ 的所有非线性项。但是在此情形容易看到，替代方程组（1.97）的最后一个方程，我们得到

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - a_0^2 \nabla^2 p = -\frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}. \tag{1.101}$$

这里，右边显然描述了与方程（1.9）一致的速度场涨落产生的额外的压强涨落，具有这样的形式

$$\nabla^2 p = -\rho \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(u_\alpha \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \right).$$

带入满足“涡度方程”（1.88）或（如果我们不假设速度涨落很小）方程（1.7）的不可压缩速度场$u_i(\boldsymbol{x}, t)$的方程（1.101）右边，我们可以得到不可压缩速度场和自己相互作用产生的声场。在此情形，方程（1.101）右边显然也可以写成$-\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}$ 或$-\frac{\partial^2 (u_\alpha u_\beta)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$。Lighthill (1952, 1954)研究了方程（1.101）描述的转动流产生声波。这是和速度场涡度模式和自己相互作用相联系第二重要的二阶效应。

2. 流体动力学不稳定性和湍流转捩

2.1 湍流的概念；管流和边界层中湍流转捩的经验数据

在前一节中，给出了描述流体运动的方程和一些较简单的解。我们也指出了，这些解不总是对应于实际中可能看到的流动。于是，在1.2节中，例子3中，我们注意到管道中的流动仅在足够大的黏滞系数和足够小的平均速度的情形下由方程（1.23）-（1.26）描述，而在1.4节中，我们强调平面上边界层方程的布拉休斯解仅在非常小的Ux/ν的情形给出对数据很好的近似。对所有其他流动的例子也是如此。通常，流体力学方程的理论解，无论是严格解还是近似解都只在特殊条件下给出对真实流动令人满意的描述。如果不满足这些条件，流动的性质就会经历剧烈变化，我们会看到流体力学量（具有图1 中所示的复杂性质）的不规则涨落，而不是所有这些量在空间和时间上规律光滑的变化。所以，流体流动可以分为非常不同的两类：光滑、平静的流动，只有当施加其上的力或者外部条件发生变化时才

随时间变化，这种流动称为层流；伴随所有这些流体力学量在时间和空间上的不规则涨落，这种流动称为湍流（turbulence）。

层流和湍流之间的差异可以从在很多工程问题中非常重要的现象中看出。例如，湍流情形中流动对刚体壁的作用（即，壁上的摩擦）和层流迥异（因为湍流介质中动量输运要强烈得多）。速度的不规则涨落也导致流体混合的剧烈增强。极强烈的混合通常被认为是湍流运动最典型的特征。随着混合的增强，流体的热导率和其他量也剧烈增大。由于所有这些原因，确定从层流向湍流转捩的条件是一个非常紧迫的问题。此外，找到湍流起始的机制必将帮助我们理解其本质并有助于湍流规律的研究，这在实际工作中非常重要。

对与层流到湍流的转捩有关的实验数据的详细调查可以在Schlichting (1959)、Dryden (1959)和Tani (1967) 的文章中找到，那里有很多其他参考文献。关于这个问题的理论有几百篇文章和几十篇综述[参见，例如Stuart(1963, 1965)、Shen(1964)、Reid(1965)、Segel(1966)、Drazin和Howard(1966)和Görtler和Velte(1967)的综述，也参见Lin(1955)、Chandrasekhar(1961)和Betchov和Criminale(1967)的专著]。在本书中我们只限于考虑最重要（和最简单）的流动，并将我们大部分注意力放在所涉及的原理上。关于数学计算的细节和实验的详细描述以及和更复杂流动有关的内容，读者可以参考之前提到的文献和专题文章。

关于湍流转捩条件的第一批结果是哈根（Hagen, 1939)得到的。哈根研究了直径相当小的直圆柱管中的水流，确定了随着水的粘滞系数逐渐降低（通过提高温度），同样压力头下的流动速度首先增加到某个极限，然后开始再减小。在达到这个极限之前的水的射流具有光滑的形态，但超过这个极限之后它会剧烈起伏。哈根解释这些现象说，对于足够小的粘滞系数，会产生内部运动和涡旋，导致阻力增加，结果降低了流动的速度。哈根也证明了可以通过改变压力头（即，平均速度）和管子的半径影响流动性质。然而，他无法得到层流向湍流转捩的任何一般性判据。

湍流转捩的一个一般性判据是O.雷诺(O. Reynolds, 1883)使用粘滞流体流动的力学相似性概念建立的。这个判据指出，只要雷诺数$\mathrm{Re}=UL/\nu$不超过某个临界值$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$，流动就是层流，而对于$\mathrm{Re}>\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$，流动将是湍流。如在1.3节中解释的，雷诺数的重要性在于给出了惯性力和粘滞力特征值的比例。惯性力导致起初遥远的流体远的接近，从而导致流动中强烈不均匀性的形成。另一方面，粘滞力导致临近点的速度变得相等，即平滑小尺度不均匀性。所以对于小的Re，当粘滞力超过惯性力，流动中不会有强烈的不均匀性，即，流体力学量会非常光滑，流动是层流。另一方面，对于大的Re，粘滞力的平滑作用弱，不规则涨落－－尖锐的小尺度不均匀性会出

现在流动中，即，流动会变成湍流。雷诺判据用这些考虑解释。

为了从实验上证实这个判据并测量$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$，雷诺用与水箱相连的圆柱玻璃管中的水流进行了一系列实验。在这些实验中，一个有颜色的流体源被放置在管子入口的轴线上。对于小的Re，有颜色的水呈现细的清晰的射流，表明流动是层流。随着Re增大，在越过临界值的一瞬间，有颜色的射流的形态剧烈改变。在管内距离入口处很小的距离上，射流散开，其中出现波动。再往后，出现分离的涡旋，而在管的末端，整个流体都被染色了。如果在这样一个实验中流动被电火花照亮，那么可以看到染色的流体有多多少少不同的涡旋组成，它们表明存在涡度。对于超临界且接近于层流中$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$的Re，可以观测到瞬变现象。这些现象包括出现短时的以奇特的“湍流蛞蝓”的形态出现高频涨落，这首先被雷诺观察到，这些涨落填满了管道的整个截面，但只是在相当短的一段里。（根据席勒(Schiller, 1934)，这种“爆发”的出现和上游端管内壁上大尺度涡旋的交错形成和破裂有关。）在管子的起始部分，$\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$，流动有类似的特征。但随着Re增加，流动不完全未湍流的这一初始部分的长度快速减小，根据罗塔（Rotta）的测量（1956），在这类中间情形中，在一个给定点观察到湍流的时间的占比（“间歇系数”）单调地随着距离管子入口的距离x增加而增加。已有的实验数据（最详细的是林德格伦（Lindgren, 1957, 1959, 1961）的）使得可以解释这种增加，“湍流蛞蝓”的前导缘的局域速度超过后随缘的局域速度，所以“蛞蝓”长度随着它沿管道运动而增加（一些“蛞蝓”偶尔赶上其他“蛞蝓”，合并形成单个更大的“蛞蝓”）。

雷诺的实验是用各种直径的、入口与水箱有光滑连接的管子进行的。雷诺数$\mathrm{Re} = U_m D/\nu$（其中U_m是流动的平均速度）的变化是通过更换新的管子（具有另外的直径D）和变化流动速度和水的粘滞系数（通过改变温度）实现的。这些实验种$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$的平均值接近12830。然而，这些结果仅仅是非常小心地保证水在进入管子前没有扰动而得到的。雷诺的研究表明，对应于层流到湍流转捩的$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$的值很大程度上依赖于进入管子的水受到扰动的程度（或者，如我们说的，依赖于“初始湍流”，主要由管子入口的条件决定），所以在不同实验中可能差异非常大。不可能产生管子中绝对稳态的流动。所以，流动中总会有扰动，由相对罕见的速度涨落表征，这些速度涨落的来源部分与从管子前缘分离的涡旋有关。这些扰动的强度（可以用参数U'/U_m表征，其中U'是速度的x分量涨落的典型幅度）可能非常大，但是由于它们不经常复现，所以这些扰动本身不会改变流动的层流本质，对速度分布、压强降低或流动的其他平均特性没有可观的影响。对于足够小的雷诺数，出现的扰动在移动到下游时被减弱。然而，随着雷诺数增加，当它达到临界值（依赖于扰动的强度并且可能依赖于扰动

的尺度和频率）的瞬间，扰动忽然产生湍流。可以发现，对应于湍流转捩的$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$越小，扰动强度越强。于是，例如，在管子具有尖锐入口穿过水箱壁的情形，管子末端会产生可观的扰动，$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$ 约等于2800。反过来，如果入口的扰动程度通过某种方式大幅降低，我们就可以推迟层流到湍流的转捩到非常大的雷诺数（这被称为*层流的持久性*（persistence of the laminar regime））。巴恩斯和科克（Barnes, Coker, 1905）能够将管中的湍流转捩推迟到$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}} \approx 20000$，埃克曼（Ekman, 1911）推迟到$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}} \approx 50000$。随后，科莫莱特（Comolet, 1950）得到管子中雷诺数在70000-75000范围的层流，普芬宁格（Pfenninger, 1961）[他放置了十二道屏，减弱管子入口和大气之间的扰动]发现管中的流动甚至在$\mathrm{Re} = 100000$也可以是完全的层流。

这些结果表明，雷诺数本身不是湍流转捩的唯一判据，对于管中的流动，显然不可能找到一个普适的临界值$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$使得对于$\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$，流动就一定是湍流。为了确定管中层流的Re值的上界，有必要知道所考虑的层流中入口处湍流的水平。所以层流的Re值的上界一般是参数U'/U_m的函数（显然随着这个参数的减小而单调增大）。

如果不知道层流中扰动的程度，我们就只能得到相当弱的表明只可能存在层流的条件的判据。为此，我们必须确定对于管子入口处层流中最大可能的扰动水平，对应于层流到湍流转捩的临界雷诺数$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr,min}}$。当$\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\mathrm{cr,min}}$ 流动总是层流，即，任何扰动，无论强度如何，都会被抑制。

雷诺自己进行了测量$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr,min}}$的实验。因为在这些实验中必须尽可能在管子中引入扰动，染料注入的方法显然不适合。结果，我们必须用其他方法确定湍流转捩（例如，用确定平均速度对压强降低依赖的表面摩擦规律的变化）。在雷诺的实验中，$\mathrm{Re} = U_m D/\nu$的最小临界值为$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr,min}} \approx 2030$。在随后的所有研究中也得到了接近的值（处于1800 到2320 之间）[包括林德格伦(Lindgren, 1959, 1961)和西布金(Sibulkin, 1962)最近的工作]。类似的工作对应矩形截面的水渠中的流动也是对的[见，例如纳拉亚南和纳拉亚娜(Narayanan, Narayana, 1967)]。

在围绕刚体的边界层流动的研究中得到了在很多方面和上面类似的关于湍流转捩判据的结果。让我们考虑，例如，再平面上方平行于平面的、匀速U的流动形成的边界层。这个边界层的雷诺数可以定义为，例如，$\mathrm{Re}_\delta = U\delta/\nu$，其中$\delta$ 是边界层的厚度。或者我们可以用更容易测量的量$\mathrm{Re}_x = Ux/\nu$，其中x是沿流动方向距离平面前缘的距离。Re_δ 和Re_x通过函数关系相联系，例如，对于层流，根据1.4节的结果，$\mathrm{Re}_\delta \approx 5\sqrt{\mathrm{Re}_x}$ [参见方程（1.49）]。向下游走，Re_δ 和Re_x都增大，在某一点x_{cr}，它们达到“临界值”，流动剧烈改变性质，变成湍流。于是，对于$x < x_{\mathrm{cr}}$（更准确

地说，对于$\mathrm{Re}_\delta < \mathrm{Re}_{\delta,\mathrm{cr}}$和$\mathrm{Re}_x < \mathrm{Re}_{x,\mathrm{cr}}$），边界层中的流动是层流，而对于$x > x_{\mathrm{cr}}$（即，$\mathrm{Re}_\delta > \mathrm{Re}_{\delta,\mathrm{cr}}$和$\mathrm{Re}_x > \mathrm{Re}_{x,\mathrm{cr}}$），流动是湍流。在中间$x = x_{\mathrm{xr}}$的邻域会形成一个“混合态”，其中只能观察到分立的湍流“爆发”；这些爆发以“湍流点”的形式出现在某点，“湍流点”尺度增大并随着向下游运动互相合并[见，例如，施利希廷(Schlichting, 1959)，第14节，科尔斯(Coles, 1962)，斯图尔特(Stuart, 1965)和埃尔德(Elder, 1960)的综述文章]。“湍流点”的出现导致在x_{cr} 附近的点有交错的层流和湍流状态。在转捩区起始处，湍流状态发生的频率和持续时间都可以忽略，而在其末端，层流状态非常罕见地发生并且时间很短。

对边界流的临界雷诺数的第一次测量是1924年博格斯（Burgers）和范·德·赫格· 齐能进行的，他们研究了风洞中经过一个平面玻璃盘的空气流。之后不久，汉森（Hansen,1928）也进行了类似的测量[特别参见图4]。根据这些作者的数据

$$\mathrm{Re}_{x,\mathrm{cr}} = \left(\frac{Ux}{\nu}\right)_{\mathrm{cr}} \sim 3 \cdot 10^5 - 5 \cdot 10^5,$$

对应于

$$\mathrm{Re}_{\delta,\mathrm{cr}} = \left(\frac{U\delta}{\nu}\right)_{\mathrm{cr}} \sim 2750 - 3500,$$

和管子中流动的$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$值量级相同。后来证明了在管子中流动的情形，边界层的临界雷诺数很大程度上依赖于周围流动的扰动程度，Re_x可以从1×10^5变化到差不多3×10^5（见图7，图中展示了$\mathrm{Re}_{x,\mathrm{cr}}$对$U'/U$的依赖，其中$3U'^2$取为等于周围流动速度涨落的平方平均）。然而，我们在图7中看到，$\mathrm{Re}_{x,\mathrm{cr}}$的值不会无限增长，而是会趋向于一个确定的极限（量级为3×10^6），在此之上，边界层变成湍动的，无论初始流动的扰动多么小。另一方面，在圆柱管道中流动的情形，实验并未显示出$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$ 随着U'/U趋向于零时的增长率有剧烈减小，所以看起来有可能在这里，随着$U'/U \to 0$，$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}} \to \infty$（即，对于任何Re值，管道中的流动都会是层流，只要可以保证入口处流动有足够小的扰动）。我们将在2.8 节中更详细地讨论边界层和管道中流动的这个重要差异。

沿具有天然或人造不规则形的粗糙平面的流动的临界雷诺数小得多这个事实和周围流动中扰动的湍动化效应有关。根据很多实验的数据，即使一个孤立的不规则性也会导致层流边界层转捩为湍流边界层，只要不规则性的高度h_0处于领域中边界层的“位移厚度”$\delta^* \approx 0.3\delta$的量级。更为重要的是很多散布于整个平面上的不规则性的效应[参见，例如，施利希廷（Schlichting, 1959），第X章或者德里登（Dryden, 1959）第5章]。即使入

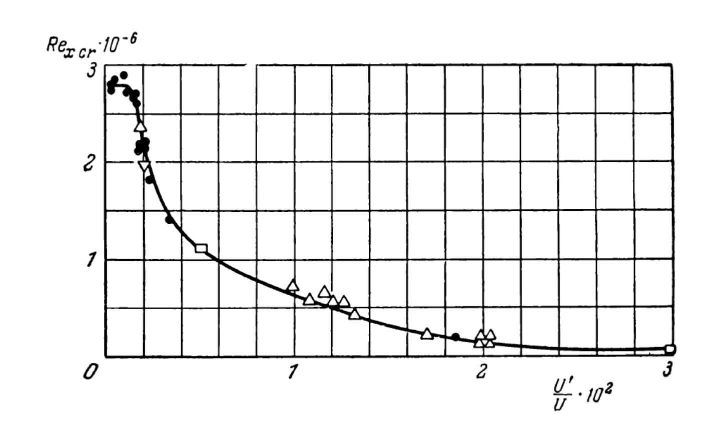


图 7 平面上边界层的临界雷诺数对自由流动扰动水平的依赖[根据德里登（Dryden, 1949）]。（图中不同的符号表示不同研究中的数据。）

射流动中有非常小的纵向压强梯度，$\mathrm{Re}_{x,\mathrm{cr}}$ 的值也会可观地变化。但我们不会详细讨论这一点，而是限于仅考虑和一个和负压强梯度的存在有关的特殊效应。

2.2 经过固体的湍流；边界层分离，阻力危机和边界层转捩的机制

经过一个固体的粘滞流体的流动中向湍流的转捩不仅在边界层中发生，也会由物体后方的湍流尾流的形成（因为宏观涡流从其表面分离）造成。

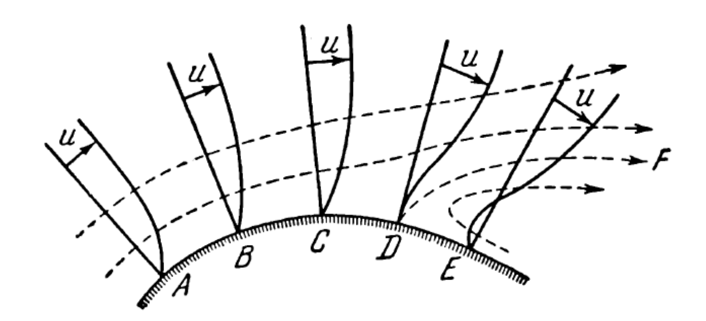


图 8 经过一个垂直圆柱的流动中不同点处的流线（点线）和速度分布（实线）的示意图。

湍流尾流的形成一般和流动中负的纵向压强梯度的阻碍作用有关。让我们考虑，例如，被垂直于其轴的无旋流动冲刷的垂直圆柱（见图8，图中展示了流动经过圆柱的上半部分）。在边界层外，流体可以假设是理想流体并且其运动是无旋的。这个位势运动的流线在圆柱的上部（点C）最接

近，结果切向速度u达到最大值。由伯努利方程

$$\frac{u^2}{2}+p/\rho=\text{常量}$$

[由1.4节，方程（1.38）前面的方程$u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$ 得到]C点处靠外的流动的压强会达到最小，所以它沿AC减小，沿CE增大。沿物体表面的这种压强变化也发生在边界层中（因为横穿边界层压强几乎不变）。结果，在CE上，边界层中的流体必须沿压强增大的方向运动，导致收到阻碍。当然，这种阻碍在流体粒子在圆柱表面运动时有最强的效应，即，具有最小的速度。在C下游的某点D，这些粒子会停住，超过D点，它们会相对远离圆柱表面还没有收到阻碍的流体粒子往回运动。在D之外物体表面形成反向流迫使靠外的流动离开圆柱表面，于是产生了我们所说的“边界层从表面分离”，在流体中形成流动分界面DF。显然，如果速度U在C点之后足够快地减小，那么边界层分离就一定会发生。即使边界层在分离之前是层流的，在分离之后它也会表现为自由射流并且会很快变成湍动的（对于比不分离的边界层小很多的Re，因为壁的存在对于流动有稳定作用）。流动分界面DF是一个速度切向不连续的面，非常不稳定（见下文），会很快转变为一个或多个涡旋。在分界面之外的FDE区域会形成一个靠近圆柱的大尺度涡旋，在圆柱的下方形成第二个这样的涡旋。这些涡旋交替从圆柱分离，向下游运动并逐渐消失；在它们的位置会形成新的涡旋（见例如，辛茨（Hinze, 1959）第8页）。

结果在物体后面形成了一个湍流尾流，其中的运动是有旋的，而在此层之外，运动是无旋的（即，位势的）。实际上，边界层外的流体可以假设为理想的；因此可以得出，沿任何封闭围道的速度环量守恒，所以在稳态运动的情形，速度的旋量沿流线为常量。所以，显然距离物体一段距离的湍动转动流区域只有在流线离开边界层（由于粘滞，其中运动是有旋的）时才会出现，即，当边界层中的流体和其外的流体有直接混合时。

同样明显的是，流线不能离开速度旋度不为零的流动区域，即湍流尾流（尽管它们可以从位势流区域进入尾流）。换句话说，流体可以从位势流区域进入湍流尾流，而不能流出湍流尾流。同时，速度的湍动涨落可以从尾流中穿透进入位势流区域，尽管有相当大的衰减。实际上，对于不可压缩流体的位势运动，运动方程（1.7）严格成立。所以，在此情形，流动由不可压缩性条件（1.5）描述。这个条件等价于速度势φ（和速度的关系为$u_i=\partial\varphi/\partial x_i$）的拉普拉斯方程$\nabla^2\varphi=0$。令$z$ 为跨尾流的坐标。于是描述速度涨落的场$\varphi(x,y,z)$可以方便地分解为$\varphi=\varphi_0(z)e^{\mathrm{i}(k_1x+k_2y)}$形式的周期性成分。由$\nabla^2\varphi=0$，可以得到$\frac{\mathrm{d}^2\varphi_0}{\mathrm{d}z^2}=k^2\varphi_0$，其中$k=\sqrt{k_1^2+k_2^2}$ 是波数，

反比于所考虑的周期性涨落的水平（Oxy平面）尺度。不考虑φ_0（随z的增大而增大）的物理含义，我们发现$z > 0$ 区域涨落幅度的减弱由e^{-kz}因子给出。所以，涨落衰减越快，尺度越小。结果，在位势流内部足够远的距离处，只会出现相对光滑的大尺度涨落。对于这些涨落，能量耗散不起很大作用，故而流动中几乎所有耗散都发生在有旋的湍流尾流中。[6]

整个湍流尾流区域中可观的能量耗散以及流动分界面的形成导致具有分离的边界层的物体可观的阻力增加。湍流尾流越窄（即，分离点在物体表面的位置越远），这个阻力通常越小。对于足够大的雷诺数（但直到分离点的边界层仍然为层流），阻力系数$C_W = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho U^2 S}$（其中$W$是总的阻力，$S$是物体的面积或截面积）不依赖于Re，因为分离点的位置不依赖于Re（可以由方程$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} = 0$看出来，可以证明雷诺数不出现）。然而，当我们接近边界层在分离点前变成湍流的那些雷诺数时，分离点会向下游移动，此时湍流尾流变得相当窄，物体阻力急速减小（很多倍）。这个现象被称为*阻力危机*（drag crisis）。这可以解释为，边界层中的动量输运在边界层变得湍动时急剧增大。所以，被边界层夹带的外部流动中的流体有很大增加，使得边界层中的流体粒子沿压强增加的方向运动的距离比层流边界层情形长得多。

经过一个球体的情形的阻力危机首先被艾弗（Eiffel，1912）观察到。在此情形，从大阻力到小阻力的转变发生在雷诺数$\mathrm{Re} = UD/\nu$（其中D是球的直径）接近5.0×10^5时；阻力系数C_W大约从$\mathrm{Re} = 10^5$的0.5降低为$\mathrm{Re} = 10^6$ 的0.15。后来，人们也在考虑非常周到的实验中发现C_W 的最小值小于0.1。圆柱体的系数C_W表现相同。球和圆柱的阻力系数对Re的依赖如图9所示。由上面的讨论很明显，周围流动的扰动越强（即，边界层中转捩为湍流的临界雷诺数越小），阻力危机出现越早。这在普朗特（Prandtl, 1914）的实验中明确得到证实，他尝试拟合球周围的线环解决经过球体的阻力危机，即在流动中引入额外的扰动导致边界层中的转捩。

边界层分离的必要条件时压强沿物体表面某个部分的流动方向增加。不仅流过凸表面的流动满足这个条件，其他情况也满足这个条件，例如，扩张的锥形管（扩散器）或急剧弯曲的管子中的流动。在这些情形也可能发生边界层分离。

在负的纵向压强梯度作用下的边界层分离也可以在一定程度上解释周围流动中的扰动对$\mathrm{Re}_{x,\mathrm{cr}}$值的影响。我们可以假设这个效应和这些扰动产生的纵向压强梯度涨落有关，导致随机形成具有不稳定的S形速度分布的位置（如图8中E 点）并因而导致边界层的分离和转捩。在这个假设的基础上，G.I.泰勒（G.I. Taylor, 1936a）尝试从理论上估计临界雷诺

[6]这个分析来自朗道和栗夫希茨（Landau, Lifshitz, 1963）；它在菲利普斯（Phillips, 1955）和斯图尔特（Stewart, 1956）对流动的湍流区域之外速度场的详细研究中也发挥了核心作用。

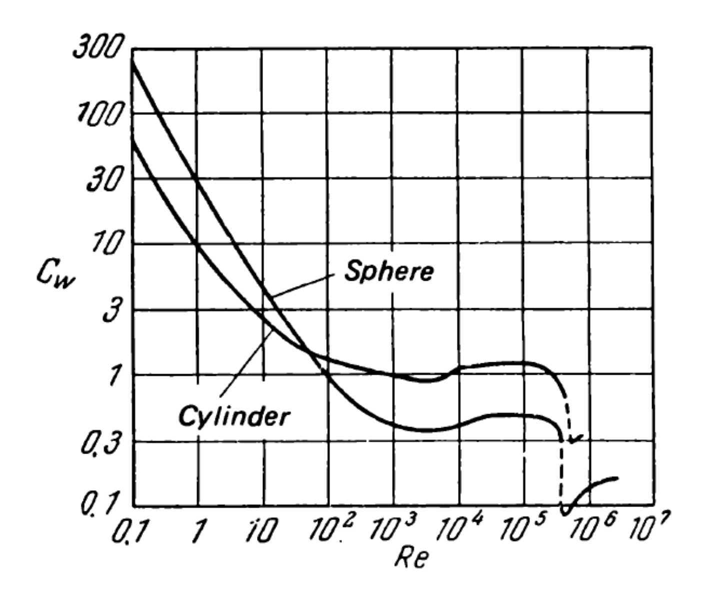


图 9 球和圆柱的阻力系数对雷诺数的依赖。

数$\mathrm{Re}_{x,\mathrm{cr}}$ 对周围流动的初始湍动水平的依赖（后来维希哈特（Wieghardt, 1940）给出了泰勒的结果的一个更短的推导）。

在他的工作中，泰勒从存在纵向压强梯度$\partial p/\partial x$的层流边界层的冯·卡门- 波尔豪森（von Kármán-Pohlhausen）近似理论出发。根据这个理论，边界层不同截面的速度分布的形式只依赖于一个无量纲参量$\Lambda = -\frac{\delta^2}{\nu U \rho}\frac{\partial p}{\partial x}$。在平面上放的边界层中$\partial p/\partial x = 0$，但可能存在压强涨落。所以泰勒提出一个固定截面上的运动特征由参数$\Lambda = -\frac{\delta^2}{\nu U \rho}\frac{\delta p'}{\delta x}$（其中$p'$是压强涨落，$\delta/\delta x$表示导数$\partial \partial x$的典型值）确定。换句话说，根据泰勒的工作，层流到湍流的转捩点由参数Λ达到某个临界值决定。但是运动方程表明，$-\frac{1}{\rho}\frac{\delta p'}{\delta x}$一定和$u'\frac{\delta u'}{\delta x} = \frac{1}{2}\frac{\delta u'^2}{\delta x}$有相同的量级，其中$u'$是周围流动中纵向速度的涨落。进一步，我们可以令$\frac{\delta u'^2}{\delta x} \sim \frac{U'^2}{\lambda}$，其中$U'$ 是速度涨落的典型值，λ是所谓的泰勒湍流微观尺度，由$\left(\frac{\delta u'}{\delta x}\right)^2 = \frac{U'^2}{\lambda^2}$ 的条件确定（这个尺度在本书后面的章节中将被多次用到）。尺度λ可以用湍流的外尺度L（定义了速度涨落的瞬时值之间的某种关系还明显的最大距离的量级）表示如下：平均能量耗散率$\bar{\varepsilon} \sim \nu\left(\frac{\delta u'}{\delta x}\right)^2$另一方面正比于$\frac{\nu U'^2}{\lambda^2}$，另一方面对于大的$U'L/\nu$值，它也正比于$U'^3/L$（我们将在本书第二卷中更详细地讨论这一点）。结果

$$\lambda \sim L\left(\frac{U'L}{\nu}\right)^{-1/2}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\delta p'}{\delta x} \sim \frac{U'^2}{\lambda} \sim \left(\frac{U'^5}{\nu L}\right)^{1/2}.$$

考虑到对于平面上方层流边界层，$\delta \sim (\nu x/U)^{1/2}$，我们得到

$$\Lambda = -\frac{\delta^2}{\nu U \rho}\frac{\delta p'}{\delta x} \sim \left(\frac{U'}{U}\right)^{5/2}\left(\frac{x}{L}\right)^{1/2}\left(\frac{Ux}{\nu}\right)^{1/2}.$$

所以，令$\mathrm{Re}_{x,\mathrm{cr}} = \varphi(\Lambda_{\mathrm{cr}})$，我们得到

$$\mathrm{Re}_{x,\mathrm{cr}} = \left(\frac{Ux}{\nu}\right)_{\mathrm{cr}} = F\left[\frac{U'}{U}\left(\frac{x}{L}\right)^{1/5}\right]. \tag{2.1}$$

我们可以把这个方程中的长度L取为产生湍流的装置的某个特征尺度（例如，如果湍流是风洞中的一个网格产生的，那么L会近似等于网格的线段之间的距离）。

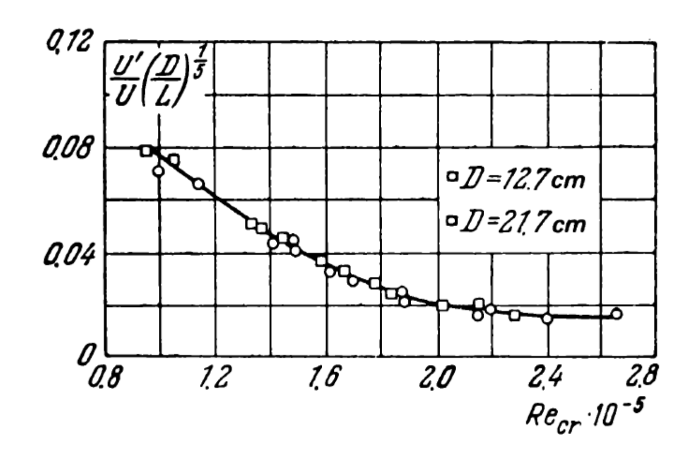


图 10 经过球的流动的$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$ 对$\frac{U'}{U}\left(\frac{D}{L}\right)^{1/2}$的依赖。

这里已经对经过平面的流动的情形推导了（2.1），根据这个结果，$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$只依赖于$\frac{U'}{U}\left(\frac{x}{L}\right)^{1/5}$。但是，它可以推广到经过其他物体的流动，通过把坐标x替换为s，把与流动撞击物体的点的距离换为与边界层从层流向湍流转捩的点、沿物体轮廓的距离，或者换为物体的某个特征尺度D，以及用$\mathrm{Re}_s = Us/\nu$或$\mathrm{Re} = UD/\nu$替代$\mathrm{Re}_x = Ux/\nu$。尽管推导缺乏严格性，但这个结果和实验数据符合得非常好（见，例如图10，图中给出了德里登、舒鲍尔、莫克和施克拉姆施塔德（Dryden, Schubauer, Mock, Skramstad, 1937），他们测量了自由流动中具有不同强度和尺度湍流的不同半径的球体边界层的$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$值）。

2.3　流体动力学不稳定性

在湍流转捩问题的理论分析中，我们必须从这个事实开始，任何流体流动的速度和压强场，无论是层流还是湍流，都是流体力学方程在一定初始条件和边界条件下的解。特别地，稳态层流由这些方程的稳态解描述；然而，在湍流的情形，每个流动的例子都对应于动力学方程的非常复杂的非稳态解。对于足够大的雷诺数不可能存在层流（尽管对于任何Re，流体力学方程都有一个稳态解）清楚地表明，并非每一个解都对应于一个真实的流体运动。可以自然地把这个事实和熟悉的推测相联系：真实的运动不仅要满足动力学方程，而且必须对于小扰动是稳定的。换句话说，总是存在的运动中的小扰动必须随时间衰减，从而不改变流动的一般性质。另

一方面，如果这些扰动随时间增长，那么初始运动会产生可观的扭曲，结果，这个运动无法在可观的时间内继续存在。

所以我们可以预期$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$的值对应于失去稳定性的条件；对于$\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$，层流是稳定的，而对于$\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$，它是不稳定的，在小扰动的影响下变成湍流。但如果是这样的，那么通过对运动方程的层流解的数学研究，我们就可以（至少原则上）理论上确定对应的临界雷诺数。

湍流由流动中非常复杂的不规则速度涨落和其他特征所表征。这些涨落起始的力学可以从一般力学的观点来解释。只需要把流体流动考虑为一个具有非常多自由度的动力学系统，其中从外流入的能量导致自激振荡。

自由度概念的应用必须立即引入一些唯一地描述位型的广义坐标。为了定义这些广义坐标，我们可以从把运动分解为基本分量开始。这些分量必须保证它们的能量之和等于流动的总能量，而每个分量的状态由相当少量的参数表征。所有这些运动的基本分量的参数可以作为流动的广义坐标，这些坐标的数量（可以在给定的外界条件下变化）是流动的自由度总数。从数学的观点看，把运动分解为基本分量等价于把速度场用正交函数系展开；这些函数中的每一个描述运动相应的基本分量，而展开系数是流动的广义坐标。任意正交函数系的选择由流动的边界形式决定。对应有限体积中的流动，正交坐标系总是可数的，所以这些流动最多有一个可数的广义坐标集。[7]

对应稳态层流，广义坐标值唯一地由给定的外部和边界条件定义，使得层流的自由度数为零。有限体积中湍流的自由度数将非常大，但也是有限的。实际上，当速度场分解为一系列正交函数，各个分量将描述不同尺度的基本运动。随着分量的阶无限增大，相应的尺度趋向于零。然而，由于粘滞，尺度太小的涨落不存在。于是，对于稳态外部条件，速度场的展开系数不依赖于时间。这意味着流动的自由度数目是有限的。自由度数也必须随着粘滞系数的减小而增大，换句话说，随着Re的增大而增大。根据朗道和栗夫希茨（Landau, Lifshitz, 1963）的估计，对于足够大的Re，有限体积中湍流的自由度数正比于$\mathrm{Re}^{9/4}$，其中Re是总体流动的雷诺数（这个结果将在第2卷中讨论）。所以，自由度数将随Re的增大而快速增大，对于具有大雷诺数的发展充分湍流，自由度数会达到非常之大。

如果我们不仅要描述系统的位型还要描述其随时间的变化，我们除了广义坐标的值还需要相应的广义速度值。所有广义坐标和广义速度值的选择定义了一个系统的相空间中的某个点，完全表征了这个系统的瞬时状

[7]无限空间中流动的概念总是理想化的。使用这种理想化，我们必须使用类似于傅里叶-斯蒂尔杰斯积分（将在第2卷中广泛使用）的展开（而不是把速度场用正交函数系展开）并允许存在连续谱。然而，在有界的时空区域，具有连续波数集的涨落当然也可以近似为可数数量的简谐振荡。

态。系统状态的变化由相空间中一条确定的线－系统的相轨道描述。描绘相轨道是描述系统演化的一种方便的方法。

让我们考虑具有固定的稳态外部条件（特别是具有不变的能量内流）但具有各种初始条件的流体流动的演化。每个初始条件集合具有来自相应相点的相轨道。这些相轨道的长期行为是一个有趣的问题。由统计力学可以知道，具有大量自由度和稳态外部条件的动力学系统倾向于收敛到某个极限平衡态，在其中平均能量内流等于系统的平均能量耗散，总能量有一个固定的值，在不同自由度有固定的分布。我们可以假设广泛类型的流动存在两种可能的极限状态－层流和湍流。流动的每条相轨道随时间的演化或者渐进趋向于对应于层流的点，或者解决某个对应于稳态湍流状态的“极限环”。湍流转捩的判据必须让我们能够从相轨道的起点预测两种极限状态中的哪种会发生。

有可能把流体运动分解为基本分量意味着流动可以考虑为一组相互作用的基本非线性振子。在每个这些振子中，由于能量内流，可能产生自激振荡。这些振荡出现的可能性由各种振幅a的振子得到的能量E^+和它损失的能量E^-之间的关系确定（见图11）。如果对于所有振幅有$E^- > E^+$（图11a），那么振荡显然对于任意初始幅度都会衰减，系统对任何扰动都是稳定的。如果对于$a_1 < a < a_0$有$E^- < E^+$，而对于$a < a_1$或$a > a_0$有$E^- > E^+$（图11b），那么初始幅度$a < a_1$的振荡会衰减，初始幅度$a > a_1$的振荡会增长，直到它们的幅度达到平衡值a_0。在此情形，系统对于小扰动是稳定的，但对于足够大幅度的扰动是不稳定的（这样的系统称为具有硬自激（hard self-excitation）的系统）。最终，如果对于任意幅度（无论多么小，图11c）都有$E^+ > E^-$，那么系统对于无限小的扰动都是不稳定的（即绝对不稳定），实际上总是处于幅度为a_0的自激振荡状态（具有软自激（soft self-excitation）的系统）。

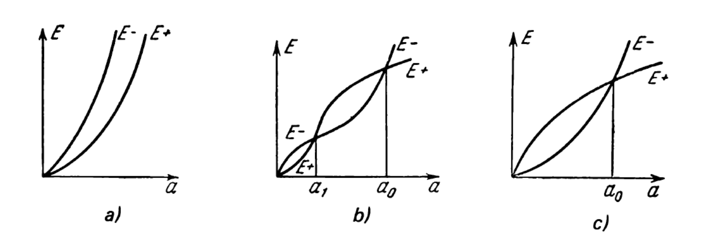


图 11 振子获得和损失的能量对振子幅度依赖的不同情形。

由下面的讨论，很自然会想到，在流体流动中会出现图11所示的所有三种情形；然而，在一个给定流动中，让我们能确定哪种情形会真正存在的精确条件仍然不清楚。

2.4 绝对稳定流体流动的简单例子

上面我们引用了和管道和边界层中流动的$\mathrm{Re_{cr}}$对初始扰动强度和层流持续时间的依赖有关的实验数据。这些数据表明，对于比$\mathrm{Re_{cr,min}}$ 稍大的Re，流动将是具有硬激发的自激系统（这样的系统中振荡激发的一个可能机制由2.2节中讲述的泰勒的理论给出）。

我们现在展示对无限小的扰动也不稳定的流体运动的一些简单例子；即，从振荡理论的观点看，它们是具有软激发的系统。

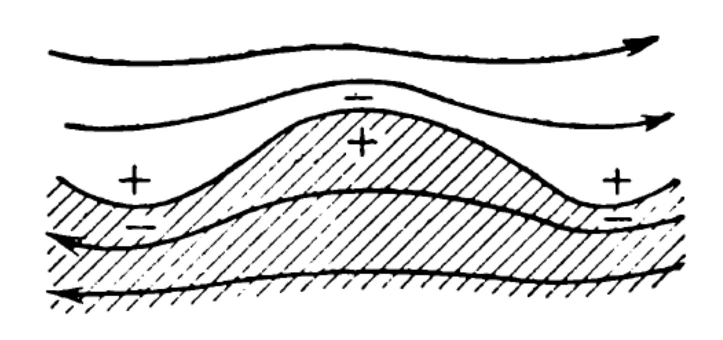


图 12 受扰动的切向速度不连续表面附近的流线和压强分布的示意图。

绝对不稳定流动的一个最简单的例子是我们在前面已经提到的在切向速度不连续表面附近的流动。在此情形，绝对不稳定性可以借助最简单的物理考虑定性解释。让我们考虑零粘滞的理想流体，两层以大小相等方向相反的速度U和$-U$相互滑动，形成一个速度不连续的表面。让我们假设由于不连续表面的某些扰动，会形成一个小振幅波（见图12）。为了简单，我们假设这个波是不行进的。在这些情形，波峰上方的流线会相互靠近，即，速度会增大，而在波谷，流线会分开，速度会减小。根据伯努利方程（Bernoulli's equation），$u^2/2 + p/\rho =$ 常量，压强在波峰上方会减小，在波谷中会增大（在图12中，这用加号和减号表示）。于是流体中出现一个横向压强梯度，倾向于增大波的振幅。随后，这个振幅增大导致波破碎为单独的涡旋，导致湍动区域的形成。

当然，在真实流体中，出现的波是行进的，但它们的演化是类似的。这些过程可以在例如从一个孔中射出的射流随后在充满同样的（但没有运动的）流体（这个射流的边界可以考虑为切向速度不连续性的表面）中膨胀的实验中观察到。亥姆霍兹（Helmholtz, 1868）首先对切向速度不连续表面的不稳定性进行了准确的定量分析[参见，兰姆（Lamb,1932），第232节，或者朗道和栗夫希茨（Landau, Lifshitz, 1963）第30节]。对于黏性流体，两层的互相滑动当然是不可能的，两个流动之间存在一个窄的转

换层（其中速度轮廓是S形的）而不是不连续表面。对这样一层的稳定性的研究会更复杂；然而，这里我们也可以证明（从理论上和实验上）它非常不稳定（见下文，2.8 节）。我们进一步注意到切向速度不连续表面的绝对不稳定性是所谓*亥姆霍兹不稳定性*（Helmholtz instability）的最简单的情形－一类特殊类型的不连续表面的绝对不稳定性分离为两个流动区域，由相同或不同流体充满，以不同速度运动。对这个领域中主要结果的综述和后来的文献可以在伯克霍夫（Birkhoff, 1962）中找到。

绝对不稳定性的另一个简单例子是密度$\rho = \rho(\mathrm{z})$随高度增加的静态分层流体的引力场中的平衡。结果，对于任意函数$\rho(z)$，不可压缩流体的运动方程会有一个解$\boldsymbol{u}(x, y, z, t) = 0$，对应于静止状态；根据

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -g, \quad \text{即}, \quad p(z) = g\int_z^\infty \rho(z')dz' + \text{常量} \tag{2.2}$$

引力场只会产生一个垂向压强变化。现在假设由于某些扰动，一些流体元从高度z位移到新的高度$z' = z + h$。如果密度ρ随高度减小，那么对于$h > 0$，这个流体元会倾向于在重力作用下向下运动，而对于$h < 0$它会倾向于在浮力作用下向上运动，所以平衡是稳定的。然而，如果密度随高度增大，那么对于任何h值，位移的流体元会进一步离开其初始位置，这个平衡态是绝对不稳定的。此外，对于理想流体（没有摩擦），运动方程对于任意$\rho = \rho(z)$和速度的x分量的任意垂向分布$u = u(z)$[速度沿其他轴的分量为零]也会有一个稳态解。使用同样的论证，这个流动对于$d\rho/dz > 0$也会是绝对不稳定的。对于$d\rho/dz < 0$，流动稳定性的问题要复杂得多，在讨论开始的此时，我们只能说，由相似性，这里的稳定性判据必须用所谓的*理查德森数*（Richardson number）即无量纲参量

$$\mathrm{Ri} = \frac{-\frac{g}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z}}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \tag{2.3}$$

表示。

对z轴分层的流体的情形对于气象学问题而言非常有趣。在气象学问题中，这种分层产生于温度分布$T = T(z)$。然而，在此情形，我们不能假设流体是不可压缩的，而必须使用状态方程和基本热力学恒等式[见例如，朗道和栗夫希茨（Landau, Lifshitz, 1963）第4节]。于是我们发现，当且仅当

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} < -\frac{gT}{c_p V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p, \tag{2.4}$$

从高度z位移到高度$z + h$的流体元对于$h > 0$会轻于周围的空气，而对于$h < 0$会重于周围的

空气，其中T现在是绝对温标，V是比体积。条件（2.4）是存在温度分布$T = T(z)$时静止状态绝对不稳定性的条件。当介质可以考虑为理想气体时，$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{R}{p} = \frac{V}{T}$，故而不稳定性判据取这种形式

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} < -\frac{g}{c_p} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{g}{R}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_V} \tag{2.5}$$

（在所有动力气象学教科书中这个判据都是这个形式）。在气象学中，$G_a = \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{g}{R}$称为绝热温度梯度（adiabatic temperature gradient，对于空气，这个梯度近似为1°C/100 m）。空气在$-(dT/dz)$ 大于、等于或小于G_a时的热分层分别称为稳定、中性或不稳定分层。

不稳定性条件（2.4）或（2.5）的另一种表示通常用于气象学中，这和所谓位势温度（potential temperature）的引入有关，位势温度定义为

$$\theta = T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \tag{2.6}$$

其中p_0是某个标准压强（通常取为海平面压强），取代通常的温度T。由理想气体的熵方程（1.7 节），$c_p \ln\theta = s +$ 常量。所以，位势温度在绝热过程中不变，θ等于空气绝热达到标准压强p_0所达到的温度。容易看出$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z} \sim \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} - G_a$。所以使用位势温度的概念，不稳定性判据（2.4）可以写为如下：静止状态不稳定，如果$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}z < 0$（即，如果位势温度随高度减小）；稳定，如果$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}z > 0$（即，如果位势温度随高度降低）。

如果存在任意风速分布，不稳定分层情形的运动也类似地是不稳定的；然而，对于稳定分层，运动的稳定性或不稳定性必须通过某种途径由理查德森数

$$\mathrm{Ri} = \frac{\frac{g}{T}\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} - G_a\right)}{\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right)^2} = \frac{\frac{g}{\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}z}}{\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right)^2} \tag{2.3$'$}$$

的值确定。

2.5 无限小扰动稳定性问题的数学表达式

在上面的每个例子中，湍流转捩的条件无论如何都不容易找到。一般来说，研究稳定性最有效的方法是小扰动的一般方法。我们现在讨论这个方法的基本思想，看一下常密度ρ的不可压缩流体的流动。小扰动方法基于把满足动力学方程的速度$u_i(\boldsymbol{x}, t)$和压强$p(\boldsymbol{x}, t)$写为$u_i = U_i + u_i'$、$p = P + p'$，其中$U_i(\boldsymbol{x}, t)$ 和$P(\boldsymbol{x}, t)$是所研究的方程的特解，u_i'和p'是小扰动。考虑到U_i和P 本身满足运动方程，忽略扰动的二阶项，我们得到这样形式的u_i'和ρ'的线性方程

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + U_\alpha\frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha} + u_\alpha'\frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu\nabla^2 u_i', \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial u_\alpha'}{\partial x_\alpha} = 0.$$

对含有$\partial u_i'/\partial t$的方程（2.7）微分，对x_i求和，使用方程组（2.7）的最后一个方程，我们可以借助和方程（1.9'）类似的方程把p'用u_i'表示。于是方程

（2.7）的一般解可以通过仅仅固定函数$u_i'(\boldsymbol{x},t)$的初始值$(\boldsymbol{x},0)$确定。于是我们可以（至少理论上）尝试确定并非所有对应于初始值问题的解都会随时间衰减的条件；这些条件也是解U_i、P绝对不稳定性[8]的条件。当然，如果相应的条件不满足，使得U_i 和P 的解是绝对稳定的（对于无穷小扰动），对于有限的扰动u_i'、p'，这个解仍有可能是不稳定的，即，这个解描述的流动时一个硬自激系统。然而，为了证明这种可能性，我们需要非常不同的研究方法（见后文2.9 节）。

在解$U_i=U_i(\boldsymbol{x})$、$P=P(\boldsymbol{x})$描述流体的层流时，方程组（2.7）的系数显然是不依赖于时间的。在此情形，这个系统会有这种形式的特解

$$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x},t)=e^{-\mathrm{i}\omega t}\boldsymbol{f}_\omega(\boldsymbol{x}),\quad p'(\boldsymbol{x},t)=e^{-\mathrm{i}\omega t}g_\omega(\boldsymbol{x}), \tag{2.8}$$

其对时间的依赖由具有一般而言为复数的“频率”ω的指数因子$e^{\mathrm{i}\omega t}$给出。特征频率ω的允许值和相应的幅度$\boldsymbol{f}_\omega(\boldsymbol{x})$、$g_\omega(\boldsymbol{x})$ 将由线性偏微分方程组的本征值问题确定。当这个方程组的系数不依赖于某些空间坐标时，方程组中独立变量的数量可以减少，通过假设幅度$\boldsymbol{f}_\omega(\boldsymbol{x})$和$g_\omega(\boldsymbol{x})$ 对相应坐标的依赖也是某个给定“波数”的指数（即，扰动的空间尺度在被扰动的流动为均匀的坐标轴方向是给定的）。于是，例如，如果未扰动的流动只依赖于坐标x_3，那么我们可以令

$$\boldsymbol{f}_\omega(\boldsymbol{x})=e^{\mathrm{i}(k_1x_1+k_2x_2)}\boldsymbol{f}_{\omega;k_1,k_2}(x_3),\quad g_\omega(\boldsymbol{x})=e^{\mathrm{i}(k_1x_1+k_2x_2)}g_{\omega;k_1,k_2}(x_3); \tag{2.9}$$

其中特征频率$\omega=\omega(k_1,k_2)$，幅度$\boldsymbol{f}_{\omega;k_1,k_2}$和$g_{\omega;k_1,k_2}$从含有参数$k_1$和$k_2$的常微分方程组的本征值问题确定。对于本质上只依赖于x_2和x_3的流动，可以得到类似的方程，$\exp[i(k_1x_1+k_2x_2)]$换为$\exp(ik_1x_1)$，以及$\boldsymbol{f}_{\omega;k_1,k_2}(x_3)$和$g_{\omega;k_1,k_2}(x_3)$。

本征函数$\boldsymbol{f}_\omega(\boldsymbol{x})$系统在所有满足连续性方程$\partial f_i/\partial x_i=0$和必要边界条件的矢量函数$\boldsymbol{f}(f_1,f_2,f_3)$的空间中通常是完备的（如果$\boldsymbol{f}_\omega(\boldsymbol{x})=e^{\mathrm{i}k_1x_1}\boldsymbol{f}_{\omega;k_1}(x_2,x_3)$或者$\boldsymbol{f}_\omega(\boldsymbol{x})=e^{\mathrm{i}k_1x_1+k_2x_2}\boldsymbol{f}_{\omega;k_1,k_2}(x_3)$，足以得出结论，对于固定的$k_1$或固定的$k_1,k_2$，函数$f_{\omega;k_1}(x_2,x_3)$或$f_{\omega;k_1,k_2}(x_3)$会在相应的一个或两个变量的矢量函数空间中形成一个完备系统）。[9]

在本征函数系统完备时，任何初值$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0)$可以展开成这些本征函数

[8]我们必须指出，这个术语还没有完全确定下来。通常，绝对不稳定性条件指的是使方程（2.7）有一个增长解的条件，即，只有存在衰减和中性稳定解的情形包括在稳定类中。然而，在此更方便的是认为存在至少一个不衰减扰动的解是不稳定解。

[9]然而，流体动力学稳定性理论中的完备性问题不简单。从数学的观点看，这里出现的本征值问题是函数空间中线性非自伴算子问题。为确定这个算子的本征函数系统（或者至少本征函数和相关缔合函数）的完备性，我们通常使用凯尔迪什（Keldysh, 1951）定理[也参见凯尔迪什和李德斯基（Keldysh, Lidskiy, 1963）]。然而，在大多数文献中，未给出任何正当理由就使用了完备性假设，在某些应用中，这个假设明显是不对的（见本节末尾）。

的数列（或积分）。所以方程组（2.7）初值问题的通解可以表示为基本的指数时间依赖解的叠加。所以在这里，一般稳定性问题可以简化为相应的本征值问题。对于这样一个层流对无限小扰动的稳定性，必要和充分条件是，所有特征频率ω具有负的虚部$\mathrm{Im}\ \omega < 0$。在对一个或多个坐标有空间均匀性时，一般来说，各种特征频率ω依赖于扰动的空间“尺度”（即，依赖于波数k_1或k_1和k_2）和Re。随着$\mathrm{Re} \to 0$，所有频率ω的虚部会趋向于负值（因为对于$\rho =$ 常量，静止状态总是稳定的）。然而，随着Re增大，某些频率的虚部可能增大，并且最终变成正的。让我们假设对应于一个固定扰动尺度（即，固定的k_1或k_1和k_2）的本征值问题具有分离的特征频率ω_j谱（这个假设对于很多重要的流动时满足的）。这里，对应于层流对一个给定尺度的无穷小扰动转变为不稳定的临界Re值由方程$\max \mathrm{Im}\ \omega_j = 0$确定。各种尺度的扰动的临界Re中的最小值是流动的临界值$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$，即对于$\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$，层流是绝对不稳定的，对于$\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$，流动是稳定的。当然，这个表征了对无穷小扰动的不稳定性的$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$必然不会小于表征流动对有些扰动的稳定性的临界雷诺数。于是，用2.1节的符号，它可以记为$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr,max}}$。另一方面，流动对于$\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\mathrm{cr,max}}$的不稳定性仅仅意味着对应这些雷诺数不存在层流；然而，这不表示流动一定是湍流。实际上，有可能失稳之后，一个层流可能转变为一个新的稳定的层流；同时，转捩为湍流只有在雷诺数远大于$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr,max}}$、这个新的湍流失稳之后才发生（见2.6-2.7节中的例子）。

在结束我们的讨论之前，我们必须再次强调，通常但不总是有可能把方程组（2.7）的任意解用方程（2.8）形式的特解表示为一个序列－这一点在讲述流体动力学稳定性时经常被忘掉。特别时如果方程组（2.7）是奇异的（即，例如，如果这个方程组的领头微商的系数在某些点变为零），情况会更复杂。在此情形，本质函数系的完备性无法简单证明，即使本质函数的概念也必须小心定义。通常，即使有固定的扰动尺度，也会出现本征值谱的一个连续部分，相应的本征函数满足不寻常的边界条件或具有更复杂的结构（例如，在无穷远不为零或者在奇点上导数有不连续性）。在应用中，这些“非正常的”本征函数有时就是没有被注意到，因而，（2.8）形式的“基本解”系明显是不完备的[见凯斯（Case, 1962）；林（Lin, 1961）；林和贝内（Lin, Benney, 1962）；德拉岑和霍华德（Drazin, Howard, 1966）]。如果由于某些原因，本征函数系统是不完备的，那么对相应本征值问题的研究显然不足以解决稳定性问题。为了对这种情形进行完整的研究，我们必须研究相应初值问题一般解的行为。这种研究非常复杂，然而，在$\nu = 0$的理想流体的特殊情形，有可能得到一些结论性的结果（见Dikiy (1960a,b)和Case (1960a,b)的工作，我们随后将详细

讨论）。

2.6 两个转动圆柱面之间流动的稳定性

绝对稳定性的一个可以进行完整的数学分析的重要例子是转动圆柱面之间的稳态圆柱库埃特（Couette）流的稳定性。令R_1和Ω_1为靠内圆柱面的半径和角速度，R_2和Ω_2 为靠外圆柱面的半径和角速度。在Oz轴沿圆柱轴的柱坐标系r, φ, z中，这个库埃特流的速度场由熟悉的方程

$$U_r = U_z = 0, \quad U_\varphi = Ar + \frac{B}{r},$$

$$A = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad B = -\frac{R_1^2 R_2^2(\Omega_2 - \Omega_1)}{R_2^2 - R_1^2} \tag{2.10}$$

定义（见1.2小节的方程（1.28））。

首先，忽略粘滞效应。然后我们可以从下面的基本物理学考虑定义不稳定性判据。在稳态层流中，施加于一个流体元上的离心力被径向压强梯度平衡。现在令质量m的流体元在扰动的作用下从坐标r_0的位置移动到坐标$r > r_0$的位置。于是，由于角动量$mrU_\varphi(r)$守恒定律，在新的位置，它的速度等于$r_0U_\varphi(r_0)/r$，因此会有离心力$m\frac{r_0^2}{r^3}U_\varphi^2(r_0)$施加其上。如果这个力大于距离轴$r$处的径向压强梯度（量级上和距离$r$处离心力未扰动的值相同），这个平衡是不稳定的。所以，不稳定性条件[对于无粘库埃特流是Rayleigh(1916a)得到的]具有这样的形式

$$[r_0U_\varphi(r_0)]^2 - [rU_\varphi(r)]^2 > 0, \quad 对于 r > r_0,$$

或者换句话说

$$\frac{\partial}{\partial r}(rU_\varphi)^2 < 0. \tag{2.11}$$

根据Coles(1965)，并考虑到U_φ/r是流动的角速度，$d(rU_\varphi)/rdr$是轴向涡度，我们容易把判据（2.11）重新表述如下：*如果涡度（局域转动）和角速度（整体转动）相反，流动是不稳定的*。在这个形式下，这个判据显然对于很多无粘环流成立。

使用方程（2.10），瑞利的不稳定性判据可以简化为这种形式$(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2)U_\varphi < 0$。如果圆柱面转动方向相反，那么$U_\varphi$将在圆柱面之间的某处改变符号，在此情形流动当然是不稳定的。当两个圆柱面转动方向相同时，我们可以令$\Omega_1 > 0, \Omega_2 > 0$，于是在每个地方都有$U_\varphi > 0$；在此情形，

瑞利不稳定性判据取这种形式

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} < \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2. \tag{2.12}$$

将扰动理论应用于无粘流体，Synge(1933) 对于轴对称（即，不依赖于φ）速度扰动扰动情形[也参见Shen(1964)]，Chandrasekhar(1960)任意扰动的情形得到了这个结果的严格数学推导。

只有用小扰动方法才能进行更完备的分析（同时考虑粘滞效应）。G. T.泰勒（1923）在一篇经典文章中首次应用到这个问题。因为在此未扰动的速度场（2.10）仅依赖于r坐标，于是，由方程（2.8）和（2.9），速度和压强扰动可以写成这种形式

$$u'_r(\boldsymbol{x},t) = e^{\mathrm{i}(kz+n\varphi-\omega t)}f^{(r)}(r), \quad u'_\varphi(\boldsymbol{x},t) = e^{\mathrm{i}(kz+n\varphi-\omega t)}f^{(\varphi)}(r),$$

$$u'_z(\boldsymbol{x},t) = e^{\mathrm{i}(kz+n\varphi-\omega t)}f^{(z)}(r), \quad p'(\boldsymbol{x},t) = e^{\mathrm{i}(kz+n\varphi-\omega t)}g(r). \tag{2.13}$$

这里，$2\pi/k$是Oz方向扰动的波长，n是非负整数，确定了扰动对角度φ的依赖，$\boldsymbol{f}(r) = \boldsymbol{f}_{\omega;k,n}(r) = [f^{(r)}(r), f^{(\varphi)}(r), f^{(z)}(r)]$和$g(r) = g_{\omega;k,n}(r)$是给定轴向波数，方位角方向波数$n$和特征频率$\omega$的依赖于$r$的扰动“幅度”。将方程（2.10）和（2.13）带入方程组（2.7）的一般系统，并考虑$r = R_1$和$r = R_2$的边界条件u$(r,\varphi,z,t) = 0$，对于给定k和n 的我们得到确定允许频率谱的本征值问题。可以证明[见，例如Di Prima(1961)]，这个问题在某些变换（特别是包括消去f^z和g）之后可以简化为下面的两个未知函数$f^{(r)}$和$f^{(\varphi)}$的两个微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[N\left(\frac{\mathrm{d}f^{(r)}}{\mathrm{d}r} + \frac{f^{(r)}}{r}\right)\right] - k^2\left(N + \frac{\nu}{r^2}\right)f^{(r)} =$$

$$= -2k^2\left(A + \frac{B}{r^2} - \mathrm{i}\frac{n\nu}{r^2}\right)f^{(\varphi)} - \mathrm{i}n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}N\left(\frac{f^{(\varphi)}}{r}\right),$$

$$-k^2\left(N + \frac{\nu}{r^2}\right)f^{(\varphi)} - \frac{n^2}{r}N\left(\frac{f^{(\varphi)}}{r}\right) =$$

$$= 2k^2\left(A - \mathrm{i}\frac{n\nu}{r^2}\right)f^{(r)} - \mathrm{i}\frac{n}{r}N\left(\frac{\mathrm{d}f^{(r)}}{\mathrm{d}r} + \frac{f^{(r)}}{r}\right), \tag{2.14}$$

其中A和B由方程（2.10）确定，N是微分算子

$$N=-\nu\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}-\frac{n^2}{r^2}-k^2\right)-\mathrm{i}\left(\omega-\frac{nU_\varphi(r)}{r}\right). \tag{2.15}$$

必须求解六阶系统（2.14）的边界条件取这个形式

$$f^{(r)}(r)=f^{(\varphi)}(r)=\frac{\mathrm{d}f^{(r)}}{\mathrm{d}r}=0,\ \ 对于r=R_1,r=R_2. \tag{2.16}$$

本征值问题（2.14）-（2.16）没有奇异性。所以明显不难证明，这个问题总是有一组分立的本征值$\omega_j=\omega_j(k,n,\Omega_1,\Omega_2,R_1,R_2)$，而相应的本征函数$f^{(r)}_{\omega;k,n}(r),f^{(\varphi)}_{\omega;k,n}(r)$ 构成了函数对$(f^{(r)},f^{(\varphi)})$空间中的完备系统，满足边界条件（2.16）。结果得到，在方程（2.13）帮助下定义、对应于所有可能的k和非负的n的初始速度$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x},0)$ 会构成一个$\boldsymbol{x}=(r,\varphi,z)$的矢量函数空间中的一个完备系统，满足无散度条件，在$r=R_1$和$r=R_2$变为零。所以，本征值问题（2.14）-（2.16）的研究完全穷尽了旋转圆柱面之间库埃特流稳定性的研究。然而，这个本征值问题非常复杂，直到最近才有一些专门研究它的工作。我们将在本节末讨论这些工作。然而，首先，让我们考虑G.I.泰勒（1923）提出并被几乎所有后世研究者采用的简化方法。

几乎所有研究库埃特流稳定性问题的研究者都不求解一般方程组（2.14）的完整本征值问题，而是假设$n=0$，即，他们把注意力限制于基本流动的速度的轴对称扰动。在这个假设之下，这个方程组被大幅简化，可以重新写为

$$\left(L-k^2+\frac{\mathrm{i}\omega}{\nu}\right)\left(L-k^2\right)f^{(r)}(r)=\frac{2k^2}{\nu}\left(A+\frac{B}{r^2}\right)f^{(\varphi)}(r),$$

$$\left(L-k^2+\frac{\mathrm{i}\omega}{\nu}\right)f^{(\varphi)}(r)=\frac{2}{\nu}Af^{(r)}(r), \tag{2.17}$$

其中

$$L=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}-\frac{1}{r^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}+\frac{1}{r}\right). \tag{2.17$'$}$$

固定k的边界值问题（2.17）-（2.16）有可数数量的本征值$\omega_j=\omega_j(k,\Omega_1,\Omega_2,R_1,R_2)$和本征函数$f_j(r)=f^{(\varphi)}_{\omega_j;k}(r)$。然而，相应的函数$e^{\mathrm{i}kz}f_{\omega_j;k}(r)$现在不构成可能的初始场$u'(\boldsymbol{x},0)=u'(r,\varphi,z)$空间中的完备系统[只要所有这些函数不依赖于$\varphi$]。然而，$(\Omega_1,\Omega_2)$平面上对应具有$\exp\left[i(kz-\omega t)\right]f(r)$形式的不稳定扰动的区域通常被简单地认为是整个不稳定性区域[见，例如，Lin (1955)、Chandrasekhar (1961)、Stuart (1963)]。换句话说，即使没有明确

指出，但也通常假设，对于所有使得至少有一个满足$n \neq 0$和$\mathrm{Im}\ \omega_j \geq 0$的本征值$\omega_j(k, \Omega_1, \Omega_2, R_1, R_2)$的$R_1$、$R_2$、$\Omega_1$ 和Ω_2 值，也会有一个$\mathrm{Im}\ \omega_j \geq 0$的本征值$\omega_j(k, \Omega_1, \Omega_2, R_1, R_2)$[对应于$n = 0$]（即，随着雷诺数增加，在$n = 0$情形会首先出现一个非负虚部）。直到最近，毫无疑问这个假设是正确的，并且实际上大多数已有的实验数据（尽管不是所有）都很好地证实了仅考虑对旋转圆柱面之间流动的整个稳定性区域的轴对称扰动而确定的稳定性区域的身份。然而，在过去一些年，得到了一些新的结果（实验的和理论的）。这些结果表明，对本征值问题（2.17）-（2.16）[对应于$n = 0$]的研究不足以完全求解库埃特流的稳定性问题。我们随后讨论这些新的结果。我们将首先考虑较早的结果，基于可以取$n = 0$的假设。

现在让我们假设半径R_1和R_2固定。容易看到，对于足够小的Ω_1和Ω_2，所有本征值$\omega_j(k, \Omega_1, \Omega_2)$和$\omega_j(k, n, \Omega_1, \Omega_2)$虚部都是负的（因为静止状态总是稳定的）。如果我们现在增大角速度Ω_1和Ω_2而不改变比例Ω_2/Ω_1（也就是，我们增大雷诺数而保持几何相似性），那么对于某个Ω_2/Ω_1，任意$\omega_j(k, \Omega_1, \Omega_2)$在任意Re下都没有为零或负的虚部。对于某个$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}} = \Omega_2 R_2^2/\nu$下的其他$\Omega_2/\Omega_1$值，首先会出现一个$k_{\mathrm{cr}}$值，使得某些$\omega_j(k_{\mathrm{cr}}, \Omega_1, \Omega_2)$虚部为零（即，运动变得不稳定）。

有趣的是，在这个问题中，对于所有Ω_2/Ω_1，从稳定到不稳定的转变发生在某个本征值ω_j，不仅$\mathrm{Im}\ \omega_j = 0$，而且事实上$\omega_j = 0$（这个事实的严格数学证明一般而言很困难，只是由Southwell(1940)和Meksyn(1946)对$R_2 - R_1 \ll (R_1 + R_2)/2$以及一些附加限制下给出了证明。然而，实验数据和直接数值方法给出的结果表明它具有更一般的特征）。这意味着，圆柱库埃特（Couette）流中的失稳导致产生了了一个新的（次级）稳态运动，速度场$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{u}'$，其中$\boldsymbol{u}' = \exp(ikz)\boldsymbol{f}(r)$。这个运动会具有所谓的*泰勒涡旋*——沿圆柱轴有规律地分布的环向涡旋（由相应本征函数$f(r)$计算的这些涡旋系统的流线形式如101页的图所示）的形式。

从稳定向不稳定转换会经过一个稳定态，对应于正好等于零的本征值$\omega = 0$，这个事实在流体力学稳定性理论中有时被称为“稳定性转换原理”。过去这个原理非常重要并且经常假设成立，但是现在知道它只在某些特殊情形成立，对于很多简单流动失效（例如，对于平面泊肃叶流）。

随着库埃特流中雷诺数继续增大，会有一个范围的波数k使得存在$\mathrm{Im}\ \omega_j \geq 0$的本征值$\omega_j$。然而，实验表明在此情形，在相当长的时间内这个受到扰动的运动保持规律的环向涡旋序列的形式，但是轴向波数无法从线形理论中导出（见下文，2.9 节）。随着Re继续大幅增加，这个周期性运动变得不稳定并转变为另一个规则的运动（这一次是非轴对称的）；随着速度继续增加，其他（更复杂的）流动形式会有序地出现消失，直到

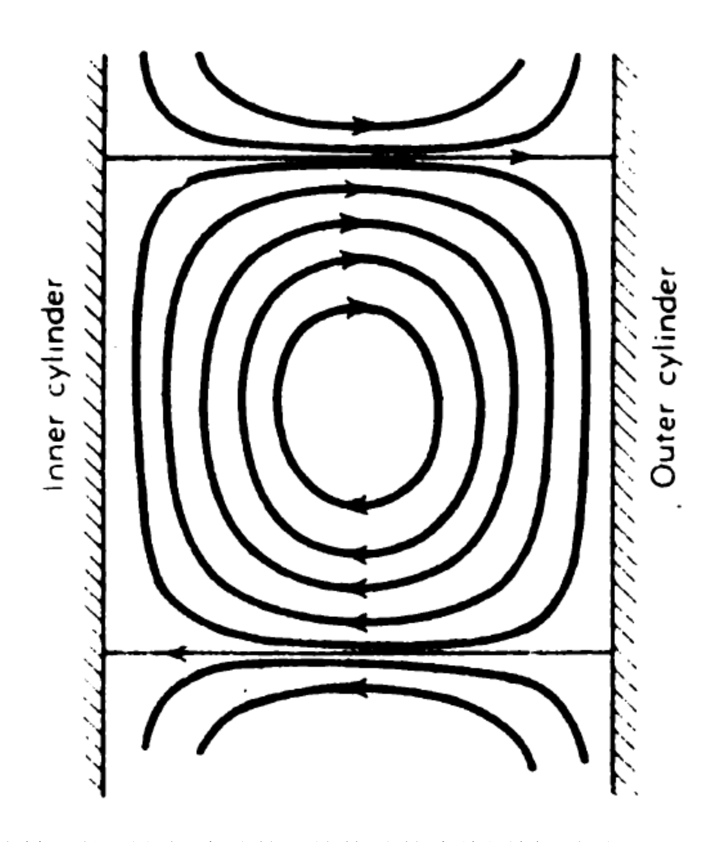


图 12 a 旋转圆柱面之间流动的涡旋扰动的流线图样（根据Shen, 1964）。

最终流动变为无序的湍流运动[见Cole(1965)和2.9 小节]。

边值问题（2.17）-（2.16）比（2.14）-（2.16）简单很多。[10]然而，求解方程（2.17）-（2.16）仍然带来很多困难。所以，泰勒（Taylor, 1923）仅对圆柱面之间非常小间隙的情形（即，对$R_2 - R_1 \leq (R_1 + R_2)/2$）首次数值计算了本征值。在这个情形，方程和数值计算都可以作相当程度的简化。泰勒的方法基于方程组（2.17）的解展开为一组特殊的正交函数；这些微分方程就变为无穷多个线性代数方程系统。后来，辛格（Synge, 1938）改进了这个方法；Peller和Southwell（1940）、Meksyn（1946）、钱德拉塞卡（Chandrasekhar, 1954, 1961）、Di Prima（1955）、Steinman（1956）、Duty和Reid（1964）、W
Tsao和Di Prima（1964）、Reed和Harris（1964）和其他人也提出了仅适用于小间隙近似的其他数值方法（特别是，一个基于把边界值问题（2.17）-（2.16）转化为变分问题的方法，伽辽金（Galerkin）方法和一些直接数值方法）。直到最近才提出了一个更一般的方法（Witting, 1958），使用了解对参数d/R_0（其中$d = R_2 - R_1, R_0 = (R_1 + R_2)/2$）的幂

[10]我们特别要注意，因为稳定性转换原理适用于方程（2.17）-（2.16），

级数展开。在钱德拉塞卡（Chandrasekhar,1958）、Chandrasekhar和Elbert（1962）、Kirchgässner(1961)、Sparrow, Munro和Jonsson(1964)、Yu Yun-Sheng和Sun Dah-Dhen （1964）、Roberts（1965）和Capriz, Ghelardoni和Lombardi(1966)的工作，发展了数值计算（2.17）-（2.16）对于任意R_1和R_2的本征值和本征函数的更一般方法，也可以参见钱德拉塞卡（Chandrasekhar, 1961）和Di Prima(1963)的文章。我们也要指出，Krylov(1963)和Yudovich(1966a)严格证明了对于某个Ω_1和Ω_2的旋转圆柱面之间的粘滞流体流动存在不稳定性，没有使用任何数值方法，但是这个证明没有提供任何方法确定不稳定区域的边界。然而，数值方法允许我们以很高精度找到这个边界并证明对于所有情形有基本相同的形式。

例如，图13a展示了(Ω_1, Ω_2)平面上对于$R_2/R_1 = 1.13$（根据泰勒的计算，和所有后来的计算符合得非常好），不依赖于φ 的不稳定扰动可能存在的区域。图13b给出了对应$R_2/R_1 = 2$的区域（根据钱德拉塞卡的计算）。在这两个情形（以及所有其他R_2/R_1），数值程序发现不稳定扰动仅在$\Omega_2/\Omega_1 < (R_1/R_2)^2$时存在。所以可以自然地想到，在$\Omega_2/\Omega_1 > (R_1/R_2)^2$区域，对于任意Re都不会产生不稳定性。所以粘滞在这里只有稳定的效应[尽管实际上对于$\Omega_2/\Omega_1 > (R_1/R_2)^2$的粘滞流，只对轴对称扰动和一些非常特殊的非轴对称扰动给出了稳定性的严格证明，参见例如，钱德拉塞卡（1961），第70节，和Schutz-Grunow(1967)]。但是，在$\Omega_2/\Omega_1 =$ 常量 $< (R_1/R_2)^2$时，根据图13 的数据，对于足够大的Re，无穷小扰动的不稳定性必然出现。

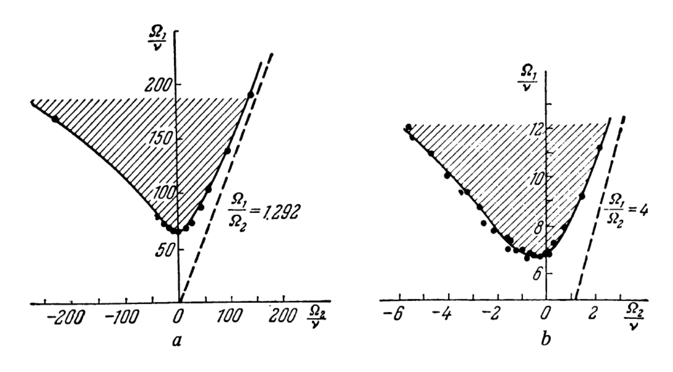


图 13 对于各种R_2/R_1比，圆柱面之间的库埃特流在(Ω_1, Ω_2)平面上不稳定区域的位置。图中不稳定区域用阴影表示。点线表示无粘流体流动的不稳定区域的边界（根据瑞利的研究）。

对应于图13未加阴影的区域的流动对于无穷小扰动当然是稳定的，但是如实验所示，对于足够大的Re，它们对于有限的扰动是不稳定的，在此情形失稳导致自发形成充分发展的湍流区域（用Coles （1965）的

术语，这是“灾变转捩”的一个例子，Cole进行了旋转库埃特流中不同类型转捩的非常聪明的实验研究）。使用各种可视化技术，泰勒和其他研究者发现泰勒自己计算的对无穷小扰动稳定的区域和实验数据符合得很好。这是流体力学扰动理论的首次巨大（甚至是划时代的）成功（见图13a，点表示失稳首次发生的若干(Ω_1, Ω_2)对的测量值）。对$R_2/R_1 = 2$情形的计算也和Donnelly 和Fults(1960)的实验数据（图13b中的点，同时参见Donnelly(1962)）符合得非常好。Snyder(1968b) 详细地将所有已有的（对环形库埃特流的轴对称扰动的）稳定性计算和各个研究者（包括他自己的）实验结果进行了比较，除了少数例外，符合得很好。那些例外的情形通常可以解释为终端效应，另一个解释和作者在下面讨论的结果相关。

Taylor（1923）和Donnelly和Fultz（1960）的实验结果[如图13所示]，看起来证实了轴对称扰动相关的不稳定性区域和一般不稳定性区域相符，换句话说，他们和这个假设符合得非常好：对于单调增长的雷诺数，环形库埃特流总是首先对$n = 0$的扰动变得不稳定。然而，同时，Lewis(1928)的工作就已经证明了对于$\mu = \Omega_2/\Omega_1$为负且很大的情况（即，对于以相对较大的转动速度反方向转动的圆柱面），运动失稳有时被称为“脉动模式”，即不是轴对称的。很多年间，Lewis的结果没有引起任何人的注意。但是，最近Nissan, Nardacci和Ho(1963)以及Snyder[见Snyder和Karlsson(1965)、Snyder(1968a)、Krueger, Gross和Di Prima(1966)] 的实验完全证实了其正确性。此外，从纯数学的观点，分析了非轴对称扰动的行为，环形库埃特流的稳定性研究才算完整。最终，广泛的实验（将在2.9节进一步讨论）表明圆柱面之间空隙中的轴对称泰勒涡旋的失稳，在雷诺数进一步增大时产生，通常导致形成新的非轴对称流。结果，圆柱面之间流动的非轴对称扰动行为的研究一定时一个重要而有趣的问题。

显然，Di Prima（1961）是第一个致力于对环形库埃特流的非轴对称扰动行为进行数学分析的。他研究了一般本征值问题（2.14）-（2.16），在一系列简化假设（包括，假设间隙$d = R_2 - R_1$相比$R_0 = (R_1 + R_2)/2$很小，以及$\mu = \Omega_2/\Omega_1 \le 0$）下展示了一种方法，对于最小的$\mathrm{Re} = \Omega_1 d^2/\nu$值得到了相继的（非常粗略的）数值结果，对于$n = 0, 1, 2$和3，首次得到了方程组（2.14）-（2.16）的一个虚部非负的本征值（具体对$d/R_0 = 1/8, \mu = 0$和$d/R_0 = 1/8, \mu = 0.5$的情形进行了计算）。所得到的结果表明（如所预期的），$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$对应于轴对称扰动。然而，一个有点出人意料的结果是，小n值的非轴对称扰动的临界雷诺数只比$n = 0$的轴对称扰动的$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$稍大一些（在所有情形都只大百分之几）。

后来，Roberts(1965)对一些固定的$\eta = R_1/R_2$值（准确地说，是对$\eta =$

$0.95, 0.90, 0.85$ 和0.75），一些n 值（在所有情况都不超过4）和$\mu = 0$（即$\Omega_2 = 0$），计算了更精确的Re_{cr} 值。他也发现，对于$\mu = 0$，Re_{cr}总是随n的增大而增大（尽管不是快速地增大）。对本征值问题（2.14）-（2.16）在$\mu < 0$的情况下（也是在小间隙极限）进行渐进分析的第一个工作室Krueger(1962)的毕业论文。根据他的估计，对于圆柱面之间小间隙以及$\mu \lesssim -0.8$ 的情形，$n = 1$的非轴对称扰动对于比轴对称扰动首次变得不稳定的圆柱角速度还小的角速度就不稳定了。Krueger, Gross和Di Prima(1966)对这个问题进行了更完整的研究。他们使用了直接的数值方法，（在数字计算机的帮助下）对一系列n和$\mu = \Omega_2/\Omega_1$在$0 \geq \mu \geq -1.25$区间（在圆柱面之间小间隙极限下）计算了所谓泰勒数Ta（正比于$\Omega_1^2 R_1 d^3/\nu^2$，所以对于固定的$\delta = d/R_1$，$\text{Ta} \propto (\text{Re})^2 = (\Omega_1 R_1/\nu)^2$）的临界值。结果是，如果$\mu > -0.78$，$\text{Ta}_{\text{cr}}$随$n$ 的增大而增大（即，轴对称扰动最先变得不稳定），但对于$\mu \leq -0.78$，Ta_{cr}的最小值是在$n \neq 0$时得到的，并且随着μ减小，n的临界值（给出Ta_{cr}或Re_{cr}的最小值）增大（当然，不是连续的，n不能取非整数值）。例如，对于$\delta = d/R_1 = 1/20$和$\mu = -0.70, -0.80, -0.90, -1.00$和-1.25，随着转动速度增大，不稳定性分别对于$n = 0, 1, 3, 4$和5的扰动首先出现。另一方面，对于固定的$\mu$，$n_{\text{cr}}$值不随无量纲间隙宽度$\delta = d/R_1$的增大而增大，即不随着$\eta = R_1/R_2$的增大而增大（小间隙近似下的计算表明，对于$\mu = -1$和$\eta = 0.95, 0.90, 0.80, 0.70$和0.60，最大的不稳定性是分别对于$n = 4, 3, 2, 2$ 和2得到的）。然而，重要的是注意到，仅由对轴对称扰动的研究确定的Ta_{cr}或Re_{cr}与其最小值的差，通常非常小。例如，对于$\delta = 1/20$和$\mu = -1$，临界值Re_{cr}（对应$n = 4$）大约只比轴对称扰动刚开始变得不稳定的Re小4%。这最后一个情形促使Krueger, Gross和Di Prima对完整的本征值问题（2.14）-（2.16）进行了更多的冗长的计算[没有使用小间隙δ假设的简化结果]，证明了之前得到的结论不变。可以发现，对于μ 的值量级为-1，即使对于$\delta = 1/20$，使用小间隙近似显著改变了Ta_{cr}值。然而，这个变化对于所有n和k几乎是相同的，所以比较各种n值的扰动的稳定性的所有定性结论在小间隙近似下和在这个问题的严格形式下是完全相同的。

Krueger, Gross和Di Prima的结果和Nissan, Nardacci和Ho(1963)以及Snyder和Karlsson(1965
实验结果符合得不错，特别地，对于小于大约-0.75的μ，环形库埃特流失稳时出现的次级运动总是非稳态和非轴对称的（具有波和旋臂结构）。Coles(1965, 以及其他工作)的结论也和这些结果相符。Coles对两个相对短的圆柱面（比大部分其他研究者的圆柱面明显要短）之间的库埃特流中的转捩进行了细致的研究。最终，Snyder(1968a)的工作尤其引人注

意，它验证了Krueger, Gross和Di Prima的结论。Snyder从实验上（对四个不同的$\eta = R_1/R_2$：0.96, 0.80, 0.50和0.20）在很宽的$\mu = \Omega_2/\Omega_1$范围，包括负值，研究了环形库埃特流的稳定性。这里，对于$\eta = 0.96$（显然对应于小间隙）可以发现和上述理论总是符合得很好。特别地，对应于$n = 1, 2, 3$和4时最不稳定的扰动首次出现时的μ值几乎精确地符合Krueger, Gross和Di Prima的结论。Snyder也对$\eta = 0.80, 0.50$和0.20得到了类似结果（小间隙假设不能很好满足）。根据所有这些结果，图13a 所示的稳定性边界的形式在图的左上角必须稍微改变一点以考虑非轴对称扰动（在图13b中，没有展示必须考虑$n \neq 0$扰动的η值范围）。

最后，我们应该注意到，圆柱面之间流动的稳定性问题是流体动力学稳定性理论中研究最详细的课题之一。除了上述结果，也有非常多经过一般性分析的问题，这些问题来源于在最初的问题中增加轴向或环向的压强梯度，或增加轴向或环向或径向的磁场，把通常的流体替换为非牛顿流体等[参见，例如，Chandrasekhar(1961), Di Prima(1963), Krueger, Di Prima(1964)以及一系列其他工作]。

2.7　从下面加热的流体层的稳定性

当流体中存在垂向的向下的温度梯度，由于浮力，流体有额外的不稳定因素，类似于弯曲流中在流体转动速度随着距离曲率中心的距离增大而减小时，离心力的效应。另一方面，向上的温度梯度对流体有稳定作用，正如，速度随距离曲率中心距离增加而增加的弯曲流的情形。于是，两个温度不同的无穷大平面之间的流体薄层的稳定性问题在数学上非常类似于两个转动圆柱面之间的不可压缩流体的稳定性问题，这并不奇怪[11]。

为了求解这个新问题，我们必须从1.5节末尾讨论的自由对流的布西涅斯克方程开始。对于限制在温度保持在T_0和T_1的刚体平面$x_3 = 0$和$x_3 = H$之间的流体层，边界条件具有这种形式：对于$x_3 = 0$，$u_i = 0, T = T_0$；对于$x_3 = H$，$u_i = 0, T = T_1$。在流体层的温度不变的自由表面，速度的边界条件修改为保证这个表面压强不变。还有其他类型的数学边界条件，对应于流体层边界上不同的物理条件[参见，例如，Sparrow, Goldstein, Jonsson(1964)，或Hurle, Jakeman, Pike(1967)]。不依赖于边界条件，稳态

[11]实际上，Jeffreys(1928)证明了，这些问题中的第一个严格等价于第二个问题中的一个特殊情形，参考Lin(1955)第7.3节。离心力和浮力效应之间的相似性也在Gr̈tler(1959)的稳定性研究中发挥了核心作用，Debler(1966)也使用了同样的思想从直接环形库埃特流的稳定性数据得到了有热源的水平流体层稳定性的数值结果。

（我们正在讨论其稳定性）将是静态的，[12]

$$u_i = 0, \quad T = T(x_3) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{H} x_3,$$

$$p = p(x_3) = p_0 - g\rho x_3. \tag{2.18}$$

令$T = T(x_3) + T', p = p(x_3) + p'$，将布西涅斯克方程对扰动$u_i, T'$和$p'$线性化，我们得到一个五个未知数五个方程的方程组，从这个方程组容易消去除了T'的所有变量。限制，如果我们变换为无量纲变量，然后，从方程（2.8）和（2.9），我们求解乘积形式

$$T'(\boldsymbol{x}, t) = \exp\left[\mathrm{i}\left(\frac{k_1 x_1}{H} + \frac{k_2 x_2}{H} - \frac{\omega \nu t}{H^2}\right)\right]\theta(\zeta), \quad \zeta = \frac{x_3}{H}, \tag{2.19}$$

的$T'(\boldsymbol{x}, t)$,我们得到下面的本征值问题：

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\zeta^2} - k^2\right)\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} - k^2 + \mathrm{i}\omega\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\zeta^2} - k^2 + \mathrm{i}\omega \cdot \mathrm{Pr}\right)\theta + k^2 \mathrm{Ra} \cdot \theta = 0,$$

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2, \quad \mathrm{Pr} = \nu/\chi, \quad \mathrm{Ra} = \frac{g\beta(T_0 - T_1)H^3}{\nu\chi}, \tag{2.20}$$

边界条件为固定温度的刚性表面，

$$\theta = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\zeta^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\zeta^2} - k^2 + \mathrm{i}\omega\mathrm{Pr}\right)\theta = 0 \tag{2.20$'$}$$

$$\theta = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\zeta^2} = \frac{\mathrm{d}^4\theta}{\mathrm{d}\zeta^4} = 0 \tag{2.20$''$}$$

[参见例如，Chandrasekhar(1961), Stuart(1963)和Lin(1955)]。对于有限热导率的刚性边界或具有变化温度但是热流固定或热流和温度有固定的线性关系的边界，也可以得到类似的边界条件。在每种情形，我们都得到一个本征值问题，对于给定的普朗特数Pr，只有两个参数，波数k和瑞利数Ra。因此，对于任意给定的k和Ra值对应有一组本征值$\omega_j(k, \mathrm{Ra})$。结果发现，对于负的或小的正值的Ra（即，当下边界温度较低，或当下边界温度仅略高于上边界时），所有本征值$\omega_j(k, \mathrm{Ra})$对于所有k有一个负的虚部。然而，超过某个“临界值”$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$后（即，超过某个临界温度差$T_0 - T_1$，也

[12]当然，在这个分析中，我们已经假设了通常的布西涅斯克近似，在考虑扰动方程时，密度ρ 随高度的变化可以忽略。所以，我们的结果只适用于H值小、相对薄的层。然而，在非常薄的液体层的情形，这些结果又不适用，因为温度分布的线性条件和理论中所假设的其他条件失效了。

依赖于两个边界平面之间的距离H），将出现一个值$k = k_{\mathrm{cr}}$，相应本征值$\omega_j(k_{\mathrm{cr}}, \mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}})$虚部为零。在此情形，正如转动圆柱面之间流动的稳定性问题中那样，稳定性交换原理适用，即第一个$\mathrm{Im}\ \omega_j = 0$的本征值$\omega_j(k, \mathrm{Ra})$被证明为零[严格的数学证明由Pellew 和Southwell(1940) 给出]。所以得到临界温度差$T_0 - T_1$的静止状态的失稳导致产生x_1和x_2之间的周期性稳态对流。

从定性的观点，从下方加热的流体层从稳定到不稳定的转变的所有基本特征非常早的时候已经由Rayleigh(1916b)描述过了，他分析了数学上简单得多（但物理上不真实）的两个固定温度的自由边界之间的流体层的对流问题。数学上，这个问题转化为满足$\zeta = 0$和$\zeta = 1$的边界条件（2.20"）的微分方程（2.20）的本征值问题。为了求得$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$和$k_{\mathrm{cr}}$，考虑$\omega = 0$ 的方程（2.20）就足够了，即

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\zeta^2} - k^2\right)^3 \theta + k^2 \mathrm{Ra}\theta = 0. \tag{2.21}$$

这个方程的解满足$\zeta = 0$和$\zeta = 1$的方程（2.20"），都具有$\theta = \sin \pi n \zeta$的形式，$n = 1, 2, ...$。于是，对于足够大的Ra值，我们有一系列不同的中性扰动（$\omega = 0$），波数满足

$$(\pi^2 n^2 + k^2)^3 = k^2 \mathrm{Ra}, \tag{2.22}$$

其中n是正整数。对每个给定的k，最小的瑞利数对应于$n = 1$的扰动。相应地，$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$由$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}} = \min_k \frac{(\pi^2+k^2)^3}{k^2}$定义。于是我们得到

$$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}} = 27\pi^4/4 \approx 657.5, \quad k_{\mathrm{cr}} = \pi\sqrt{2}/2 \approx 2.2.$$

对于固定温度的刚性边界之间的流体层中对流的真实问题，类似的计算需要使用数值方法，因为边界条件更复杂。Jeffreys(1962), Low(1929)以及Pellew和Southwell(1940)[也参见Lin(1955), Reid和Harris(1958), Chandrasekhar(1961)]进行了这些计算。结果发现在此情形，$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}} \approx 1708$以及$k_{\mathrm{cr}} \approx 3.12$。这个本征值问题的头10个本征函数的$k$和Ra 值可以在Catton(1966)中找到。此外，我们注意到，k值只确定(x_1, x_2)平面上出现的流动的周期性，但不能确定其形式。实际上，不难看到方程（2.19）中的函数$\exp[i(k_1 x_1/H + k_2 x_2/H)]$，在不改变接下来计算的情况下，可以替换为满足下面方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{k^2}{H^2}\varphi = 0 \tag{2.23}$$

的任意函数$\varphi(x_1, x_2)$。函数φ的明显形式可以确定对流破裂形成元胞的形式，但它不能在线性扰动理论的基础上唯一确定。然而，很多实验数据（例如，Chandrasekhar(1961)中所描述的，也参见Stuart(1963)和那里引用的文献）表明，最常出现的流动破裂为一组六边形棱镜形式的元胞（称为Bénard 元胞），在元胞里，流体在中间向上运动，在边缘向下运动，或反过来[13]。对应于这些元胞，函数φ有完全确定的形式，可以在Christopherson(1940)中找到。我们的问题的这个本征函数对应的速度场和Bénard元胞的观测数据的比较可以在Chandrasekhar(1961)和Stuart(1964)[他也用到了非线性对流理论的结果，我们将在2.9节中讨论] 的文章中找到，符合得很好。

在流体的上边界条件为固定温度的自由边界时，情况类似，此时我们只需要将$\xi = 1$的边界条件（2.20′）替换为（2.20″）。结果，我们得到一个新的本征值问题。数值计算表明在$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}} \approx 1100$处失稳[Pellew, Southwell (1940)、Chandrasekhar (1961)]。这个$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$值和两个刚性边界之间的对流的$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$值类似已经被实验很好地证明了[参考例如Chandrasekhar (1961)，Sutton (1950), Thompson, Sogin (1966)]。对应于其他温度边界条件的$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$值可以在一些文献中找到，例如Sparrow, Goldstein, Jonsson (1964), Hurle, Jakeman, Pike (1967)和Nield (1967)。也有很多文章讨论对流问题（首先，关于表面张力效应，它们在伯纳德的原始实验中明显起了重要作用）；这些参考文献可以在Stuart (1965) 和Nield (1967, 1968) 中找到。

随着$T_0 - T_1$进一步增大（即Ra增大）到超过$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$值，稳态“蜂窝”对流首先保留其特征，但随后变得不稳定，并且对于$\mathrm{Ra} \sim 500000$，无序的湍流运动出现。值得注意的是，在这种情况下向湍流的转捩是以一系列离散的“跳跃”的形式逐渐发生的，表征了向一系列不同的对流状态的过渡。每一种对流状态都比前一种更为复杂和无序[参见Malkus (1954a), Willis, Deardorff (1967)]。

2.8 平行流的稳定性

上面我们考虑了将小扰动方法应用到流体动力学稳定性研究中的两个例子。然而，从实验者和工程师的视角来看，这两个例子都非常特殊。更适合实验验证和实际应用的是圆管中和沿平板的流动的情形（这就是为什么在本节开始时给予它们特别关注的原因）。然而，为了说明小扰动方法，首先，我们考虑旋转圆柱面之间的流动和两个恒温平面之间的自由对

[13]值得注意的是，六边形元胞不是实验中观察到的唯一的元胞对流的形式。对这个问题更详细的讨论在2.9 节联系热对流的非线性理论给出。

流。之所以这样做是因为在这两个例子中（由于在第一种情况下存在与离心力有关的附加效应，在第二种情况下存在与浮力有关的附加效应），小扰动方法导致了相对简单的特征值问题（甚至在$\nu = 0$的情形也没有任何奇异性），所以在这些例子中可以得到非常明确的结果。然而，对于管流和边界层流动，小扰动方法的使用碰到了相对大的数学困难，这些问题甚至不能被认为已经完全解决了。

因为流动稳定性的数学分析的复杂性，几乎所有相关研究都只考虑最简单的平面平行二维流动，这些流动在某种程度上可以视为实际流动的模型。因此，我们也将从平面平行流动的稳定性问题开始讨论，只有这样，我们才能指出关于真实的管流和边界层流动的稳定性已经知道什么。此外，我们注意到，流体力学方程（1.6）表明，只有一个仅依赖于坐标$x_3 = z$的非零速度分量$U = u_1$的粘性流体的稳态平面平行流动仅在$U(z)$轮廓对z的依赖为二次多项式的条件下是可能的。换句话说，这样的流动总是线性速度轮廓的库埃特流和抛物线轮廓的泊肃叶流的组合（见1.2节的例1和例2）。然而，记住我们对平面平行流动作为更复杂的实际流动的可能模型感兴趣，我们还将考虑$U(z)$更复杂的轮廓，希望所得结果可能适用于不严格平面平行的流动。

我们假设轴$Ox_1 = Ox$沿流动方向，并且未扰动流的速度不依赖于$x_2 = y$，由任意函数$U(x_3) = U(z)$给出。值得注意的是，*在寻找这种平面平行流动的不稳定性判据时，我们可以限制于考虑$\boldsymbol{u}' = \{u'(x,z,t), w'(x,z,t)\}$形式的二维扰动*，因为更一般的三维扰动比二维扰动更晚（在更大的雷诺数）失稳。这个Squire(1933)证明的这一论断[另见Lin (1955)第3.1 节，Betchov, Criminale (1967)第18节]可以通过将扰动写成基本平面波分量的叠加来解释。二维扰动将对应于沿无扰动流传播的$\exp[i(kx - \omega t)]$形式的波，一般的三维扰动对应于沿不和未扰动流方向重合的方向传播的$\exp[i(k_1 x + k_2 y - \omega t)]$形式的波。

如果坐标系在(x, y)平面内转动，使得新的x轴沿波的方向，那么基本的流动有两个分量$U(z)$和$V(z)$，波沿x方向传播，不依赖于y。进一步，u'、ω'、p'的方程在此情形不依赖于V和v'。这些考虑表明，一个扰动的具有给定波数矢量的波分量实际上仅收到未扰动流动沿这个波数矢量方向的速度分量的影响。这个速度分量等于Uk_1/k，其中k_1是$\boldsymbol{k}$的x分量，k是模。数学上，这可以从这个事实看出，对于速度$U = U(z)$的平面平行流，把$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$的方程（2.8）和（2.9）带入一般方程（2.7），在某些变换之后[并消去所有未知函数，除了给出扰动$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x},\mathrm{t})$的分

量$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x},t)$的$f(z)=f^{(\omega)}(z)$，]得出方程

$$(k_1U-\omega)\left[\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}-k^2\right)-k_1\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}z^2}\right]f=-\mathrm{i}\nu\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}-k^2\right)^2f, k^2=k_1^2+k_2^2. \tag{2.24}$$

这个方程和相应的边界条件一起确定了这个问题的本征频率，$\omega=\omega_j, j=1,2,\ldots$。现在，如果我们考虑波束矢量$\boldsymbol{k}$的模相同的二维扰动（即形式为方程（2.8）-（2.9），$k_1=k$和$k_2=0$的扰动），那么新的方程（2.24）和老的方程的差别仅仅是把k_1U 替换为kU，即它将和上面的方程相同，但速度$U(z)$增大了一个k/k_1的因子。所以，对于相对于未扰动流动以相同角度传播的波扰动，等效雷诺数比沿未扰动流传播的同样波长的扰动要小，所以二维扰动的临界雷诺数对于三维扰动是压临界的。因此，在寻找平面平行流稳定性判据时，总是可以假设$k_2=0$，即扰动不依赖于y。我们也可以假设$u_2'(\boldsymbol{x},t)=v'(\boldsymbol{x},t)=0$，因为涨落$v'$对$u'$和$w'$的方程组没有影响（并且将随时间衰减）。[14]

对于平面平行流的二维扰动，一般的线性化方程组（2.7）使用了这种形式

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial t}+U\frac{\partial u'}{\partial x}+w\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x}+\nu\nabla^2u',\\ \frac{\partial w'}{\partial t}+U\frac{\partial w'}{\partial x}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z}+\nu\nabla^2w',\\ \frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial w'}{\partial z}&=0,\end{aligned} \tag{2.25}$$

其中

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

是二维拉普拉斯算符。这些方程的边界条件是两个速度分量u'和w'在流动的刚性边界（或者在无界流的情形，在无穷远处，即随着$z\to\infty$或者$z\to-\infty$，或者$z\to\pm\infty$，依赖于无界流的性质）都变为零。使用方程（2.25）头两个方程中的连续性方程，我们从速度分量u'和w'变换为流函数ψ，使得

$$u'=-\frac{\partial\psi}{\partial z}, w'=\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

[14]当然，这不意味着，在$\mathrm{Re}>\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$的情形也只有不依赖于$y$的二维扰动是重要的。因为已有的数据显然表明，在二维边界层向湍流转捩中，三维扰动起到了主要作用[参见，例如Klebanoff, Tidstrom, Sargent (1962)]，对这些扰动在超临界雷诺数时行为的研究也很有趣。特别地，Watson (1960b)和Michael (1961)进行了这项研究。他们展示了，在线性扰动理论的框架内，总是存在一个范围的$\mathrm{Re}, \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}<\mathrm{Re}<\mathrm{Re}_1$值，对于任意平面平行流，所有不稳定波扰动中增长最快（即具有最大的$\mathrm{Im}\ \omega$值）的扰动是某个二维扰动（尽管在具有固定波数k的扰动的情形，对于某些k值，最不稳定的扰动是三维扰动）。然而，显然，通常对于稍大于$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$的Re值三维扰动发挥了基本的作用，这本质上是非线性效应的结果（见下面的2.9节）。

在消去压强后，我们得到下面的流函数的偏微分方程[15]：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\psi-\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}z^2}\frac{\partial\psi}{\partial x}=\nu\nabla^2\psi. \tag{2.26}$$

为了得到不稳定性判据，有必要得到这个方程对于给定边界条件和给定初始值$\psi(x,z,0)=\psi_0(x,z)$的解$\psi(x,z,t)$。这里，$\psi_0(x,z)$是一个任意函数，在有限的空间区域不为零（并且满足边界条件和小扰动条件$|\nabla\psi_0\ll U|$）。$\max_{(x,z)}|\nabla\psi(x,z,t)|$的时变性质将依赖于未扰动流的雷诺数；对于足够小的Re，这个值总是减小，而对于足够大的Re，它有时会随时间增长。这些区域之间的边界的Re值（如果存在）将定义临界雷诺数。

一般来说，这个初值问题的解非常复杂。然而，因为方程（2.26）的系数不依赖于t和x，所以这个方程可能有这种形式的特解

$$\psi(x,z,t)=e^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}\varphi(z)=e^{\mathrm{i}k(x-ct)}\varphi(z), \tag{2.27}$$

其中$c=\omega/k$。如果有足够数量的这种“类波解”使得总能将这个初值问题的任意解$\psi(x,z,t)$转变为具有所有可能的（实数）波数k的方程（2.27）这种形式的解，那么寻找$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$的一般问题就简化为确定允许的$c$值。结果，我们必须将方程（2.27）带入方程（2.26）；然后我们得到下面的$\varphi(z)$的四阶常微分方程：

$$(U-c)(\varphi''-k^2\varphi)-U''\varphi=-\frac{\mathrm{i}\nu}{k}(\varphi^{\mathrm{IV}}-2k^2\varphi''+k^4\varphi) \tag{2.28}$$

（其中撇表示对z求导）。方程（2.28）被称为奥尔-索末非方程（Orr-Sommerfeld equation）。这个方程的边界条件是φ和φ'在流动的边界上（有可能在无穷远）为零。具有齐次边界条件的齐次方程（2.28）仅对参数c的某些特殊值有非平凡的解。这个问题的本征值一般来说是复数$c=c_1+\mathrm{i}c_2$，依赖于波数k和黏滞系数ν（即，依赖于雷诺数Re）。实部c_1表示波传播的相速度，虚部c_2定义了波幅度的时间变化，用因子e^{kc_2t}描述。所以，对于$c_2<0$，波的幅度会减小，对于$c_2=0$，它会保持不变（在此情形，波被称为中性的（neutral）），而对于$c_2>0$，它会随时间增长。所以$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$可以定义为使得$c_2(k,\mathrm{Re})$首次等于零（至少对于一个$k$值）的Re值。

要得到不稳定性判据，只需要把c_2定义为k和Re的函数。此外，我们注意到在$c_2(k,\mathrm{Re})$首次等于零的$\mathrm{Re}=\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$，本征值$c(k,\mathrm{Re})$（虚部$\mathrm{Im}\ c=c_2=0$）的实部$c_1$一般来说不等于零（“稳定性交换原理”的失效）。这意味着本征值c通常对应于波（2.27）沿Ox轴传播。对于比$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$大的Re值，

[15]原文中，此方程右边为$\nu\nabla^2\psi$

使c_2为正（且c_1非零）的k值范围相当小。具有这个范围k值的波会形成一个波包，它会随时间增长，同时向下游运动。实际上，kc_2值会在这个k值范围中央附近达到最大，所以接近这个中心处，$\frac{\partial}{\partial k}(kc_2) = 0$，波包的群速度$\frac{\partial}{\partial k}(kc) \approx \frac{\partial}{\partial k}(kc_1)$是实数，即它代表了波包移动的真实速度[参见Landau, Lifshitz (1963)第29 节]。在这方面，所讨论的不稳定性将不同于2.6节和2.7节中考虑的流动的不稳定性，那里的不稳定扰动不移动，并且在给定点处增加到有限值。

理想流体平面平行流动的稳定性

在方程（2.28）中带入某个实际的速度分布$U(z)$，我们得到一个非常复杂的本征值问题，它的求解需要复杂而繁琐的数学步骤。为了简化这些步骤，我们从尝试使用实验数据开始，根据实验数据，很多平面平行流的临界雷诺数异常大。于是我们可以预期，对于接近临界值的雷诺数，奥尔-索末非方程（2.28）右边的项（描述了黏滞力对小扰动的作用）和左边的项相比要小。所以，首先，我们可以尝试将流体考虑为理想流体，即我们忽略方程（2.28）右边，考虑简化的方程：

$$(U-c)(\varphi''-k^2\varphi)-U''\varphi=0, \tag{2.29}$$

瑞利（1880, 1887, 1895, 1913）对它进行了详细的研究。因为这个方程（称为瑞利方程）不是四阶的，而只是二阶的，我们不再要求满足四个边界条件。然而，我们必须限于理想流体流动的通常要求，例如在边界墙上，只有速度的垂直分量等于零。记住流函数ψ的定义和方程（2.27），我们得出结论，$\varphi=0$这个条件在墙上必须满足。

然而，通过完全忽略粘性和使用简化的方程（2.29），我们碰到很多困难。首先这些困难和这个事实有关：对于真实的本征值c（对应于中性波，这对于得到不稳定性判据相当重要），可能有一个z值（比如$z=z_0$）使得未扰动流的速度$U(z_0)=U_0$等于c，所以z_0是方程（2.29）的奇点。此外，瑞利[以及后来Tollmien, Pretsch (1946)用另一个方法]证明，在理想流体平面平行流动的情形，*中性波的相速度c总是介于未扰动流最小和最大速度之间（即$U_{\min}\le c\le U_{\max}$）*，故而流动中一定有一个奇点$z_0$。[16] 如果$U'(z_0)\neq 0$，那么在这个点的邻域，我们可以令$U(z)-c\approx U'(z_0)[z-z_0]$，并且当$z\to z_0$，函数$\varphi''$ 会以$\frac{U''(z_0)\varphi(z_0)}{U'(z_0)(z-z_0)}$ 趋向于无穷大。所以一个奇点的邻

[16]最简单的证明如下[参考Drazin, Howard (1966)]。让我们将瑞利方程（2.29）重写为

$$((U-c)^2F')'-k^2(U-c)^2F=0, F=\varphi/(U-c).$$

将这个方程乘以复共轭函数F^*并从z_1积分到z_2（其中z_1和z_2是流动的边界，在$z=z_1$和$z=$

域的中性扰动速度的x分量有这种形式

$$u' \sim \varphi' \sim \frac{U''(z_0)\varphi(z_0)}{U'(z_0)} n(z - z_0).$$

所以，对于中性波，简化的方程（2.29）的两个线性无关解中的一个是不连续的并且是多值的，这提出了一个问题：我们取这个多值函数的哪一支？

一个进一步的困难是，当方程（2.29）中的c[对应于本征函数$\varphi(z)$]是一个复数，它的复共轭c^*也会是这个方程的本征值[对应于本征函数$\varphi^*(z)$]。相应地，除了衰减的波，流函数方程将总有一个增长波形式的解。因此，对于无黏性流体，将稳定情形定义为只发生阻尼振荡的情形是没有意义的。因此，必须改变基于考虑基本类波解的稳定性定义。稳定性现在必须定义为没有增长的类波扰动（故而稳定性判据是，对于任意k，瑞利方程仅有实的本征值c）。

克服所有这些困难通常的方法要回到完整的奥尔-索末非方程（2.28）。这里，我们通过仔细研究四阶方程（2.28）在$\nu \to 0$时（即，在$\mathrm{Re} \to \infty$时）的渐近行为选择简化的方程（2.29）解的描述中性振荡的合适分支，以及$\mathrm{Im}\ c \neq 0$的有物理意义的波动解。[17]

特别地，用这种方法发现方程（2.29）的有物理意义的增强和衰减波动解彼此不共轭，并且在某些情形，这些解必须通过将z的不同定义域的不同表达式“粘在一起”来构建[见，例如，Lin (1955) 第8章；Stuart (1963)；Shen (1964)和Reid (1965)]。当然，这种无黏稳定性理论的方法相当麻烦，而方程（2.29）相对简单的优点实际上已经丧失了。然而，同样的问题还有另一种方法，允许使用相对简单的无黏方程。这将在后面讨论。

现在让我们给出平面平行无黏流稳定性理论的主要结果。瑞利的重要工作（上面提到过）是这个理论的出发点。特别地，早在1880 年，他就证明了如果$U''(z)$在流动中的每个地方都不为零，那么简化方程（*2.29*）不可

---

z_2，$F = 0$），对于非奇异的F可以得到

$$\int_{z_1}^{z_2} (U - c)^2 \{|F'|^2 + k^2|F|^2\} \mathrm{d}z = 0.$$

这个方程表明在c为实数时（所以c不会在U的范围之外）F不是奇异的。

进一步注意到，对于$c_2 \neq 0$虚部的复数$c = c_1 + ic_2$，上面的积分关系表明$c_1 = \mathrm{Re}c$不会位于U的范围之外（这个结果也是首先由瑞利证明的）。最后，Howard (1961)对同一个积分的实部和虚部的简单处理给出了半圆定理。这个定理指出，所有$\mathrm{Im}\ c > 0$ （）的c位于复c平面的一个圆心为实数点$\frac{1}{2}(U_{\max} + U_{\min})$半径为$\frac{1}{2}(U_{\max} - U_{\min})$的半圆上，所以$c$的任意本征值，无论实的还是复的，一定位于圆心为$\frac{1}{2}(U_{\max} + U_{\min})$半径为$\frac{1}{2}(U_{\max} - U_{\min})$圆内或圆上。

[17]我们注意到在中性波的情形（具有实数的c），我们仅需要在奇点$z = z_0$的邻域考虑黏性，在那里引入了一个额外的“内边界层”。

能有$\mathrm{Im}\ c \neq 0$的复本征值。这个定理的证明非常简单。把方程（2.29）重写为这种形式

$$\varphi'' - k^2\varphi - \frac{U''\varphi}{U - c_1 - \mathrm{i}c_2} = 0,$$

乘以复共轭函数φ^*并从$z = z_1$积分到$z = z_2$（其中z_1和z_2是流动的边界，在那里$\varphi(z)$等于零）我们得到

$$\int_{z_1}^{z_2} (|\varphi'|^2 + k^2|\varphi|^2)\mathrm{d}z + \int_{z_1}^{z_2} \frac{(U - c_1 + \mathrm{i}c_2)U''|\varphi|^2}{(U - c_1)^2 + c_2^2}\mathrm{d}z = 0. \tag{2.30}$$

当$c_2 \neq 0$，这个方程的虚部仅当$U''(z)$在z_1和z_2之间某处改变符号才可以变为零。因此我们得到了引用的结果。多年来人们普遍认为，瑞利定理给出了理想流体的平面平行流动（其速度分布没有拐点）的稳定性的完整证明（在没有增长扰动的意义下）。（我们注意到，对于$\nu = 0$的理想流体，从运动方程的观点来看，任何速度分布$U(z)$都是允许的，这与黏性流体的情形不同。）然而，这实际上是误导的。方程（2.29）和高阶导数变为零有关的奇异性导致出现连续的本征值c谱（除了通常的分立谱），而连续谱本征值的本征函数是“广义函数”，即它们不满足通常施加在本征函数上的条件（例如，它们可能含有狄拉克δ 函数）并且经常不被注意（特别地，瑞利定理的证明只涉及简单的离散本征值）。有趣的是，瑞利知道连续谱本征值的存在[(1894) 第2卷，391-400页]，但其重要性被完全忽略，直到最近。如果我们限制于分立谱，那么瑞利方程（2.29）的边值问题对于每个固定的k通常只有有限数量的本征函数。因此这些函数的集合明显是不完备的（例如，对于库埃特流，$U'' \equiv 0$，没有在两个边界为零的本征函数。后面我们将看到这个情况经常发生）。然而，如果我们也考虑c的连续谱部分，那么我们必须首先精确定义相应的本征函数指的是什么，并研究它们$t \to \infty$的行为；然后我们必须证明得到的函数系是完备的，这不是个简单的任务。所以，实际上，仅考虑基本的类波扰动的无黏流稳定性的证明不仅从瑞利定理出发，而是需要额外的复杂程序。

在这方面，Case (1960a, b)和Dikiy (1960a, b)互相独立地指出，对于无黏稳定性的分析，放弃考虑方程（2.27）形式的基本类波解是有利的。相反，应该求解右边为零（即$\nu = 0$），初始条件为$\psi(x, z, 0) = \psi_0(x, z)$的偏微分方程（2.26）的一般初值问题[这是我们之前提到的无黏稳定性问题的第二个方法]。两个作者都用对时间的拉普拉斯变换求解初值问题，得到了拉普拉斯积分形式的解，$t \to \infty$的渐近行为可以用复变函数理论的通常方法研究。相应拉普拉斯积分中的被积函数也可以用于精确确定方程

（2.29）的本征函数集（连续谱和分立谱）；这个函数集的完备性自动满足（因为任意初值问题的解可以用它展开）。然而，如前所述，考虑满足方程（2.29）的基本类波解对于稳定性的研究是相当不必要的，因为初值问题的一般解在$t\to\infty$的行为立即决定了流动是否稳定。Case (1960a)和Dikiy (1960b)互相独立地概述了这个事实的证明：在所有情况下，方程（2.26）的初值问题的增长解只有当相应的方程（2.29）有分立的Im $c>0$的复本征值c（或多个分立的实本征值c）时才存在。更准确地说，它们也概述了分立谱与不稳定性相关的证明（而$\psi(x,z,t)$的拉普拉斯积分表示在连续谱处，在$t\to\infty$ 时总是以$1/t$衰减）。根据瑞利定理，如果分布$U(z)$没有拐点，那么方程（2.29）的复本征值不存在。Lin (1955)第8.2节描述的对方程（2.29）更仔细的研究表明，流动中$U''(z)$符号的变换对于存在存粹实的本征值c也是必要的；换句话说，在速度分布没有拐点时，方程（2.29）根本没有分立的本征值。所以Case和Dikiy的结果给出了一般地由瑞利定理推导的速度分布无拐点的无黏平面平行流动稳定性的第一个严格证明。有趣的是，对于理想流体的平面库埃特流的特殊情形，这里描述的方法早在Orr (1906-1907) 就被使用了，他解决了这样的流动中对于小扰动的一般初值问题，证明了解总是衰减的[参见Drazin, Howard (1966)第28页]；然而，后来Orr的这个结果被搁置一边。Dikiy和Case也证明了[特别参见Case (1961)]对于完整的方程（2.26），初始条件为$\psi(x,z,0)=\psi_0(x,z)$ 的问题的解在$\nu\to 0$时总是趋向于同样问题的简化方程的解。所以，在这方面，初值问题也比方程（2.28）的边值问题有相当大的优势，其中完整方程的特征值和特征函数和简化方程的特征值和特征函数之间没有简单的连续[参见Lin (1961)和Lin, Benney (1962)]。对无黏流体动力学稳定性的研究的初值问题方法的广泛综述可以在Drazin, Howard (1966)中找到；Case和Dikiy仅仅给出概述的这个领域中一些结果的严格证明由Rosencrans, Sattinger (1966)（在额外的限制条件下）给出。

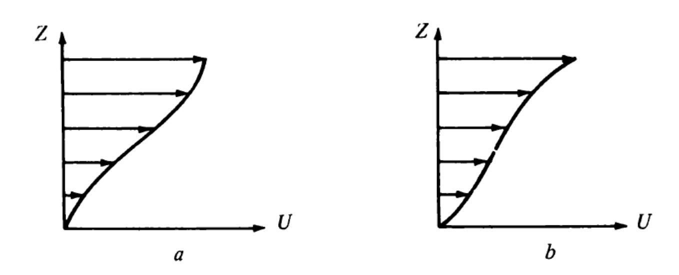


图 13 具有一个拐点的两类速度分布。

现在让我们假设速度分布有一个拐点，即$U''(z)$至少在一个点为零。根

据瑞利定理，对于无黏平面平行流动的不稳定性，这个条件是必要的但不是充分的。Fjørtoft (1950)和Hølland (1953)注意到不稳定性必须的一个非常简单的更强的条件。为了得到这个条件，我们必须把方程（2.30）的实部加上虚部乘以因子$(c_1 - U_s)/c_2$，其中$U_s = U(z_0)$是拐点处的速度值。于是我们得到

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{U''(U-U_s)|\varphi|^2}{(U-c_1)^2+c_2^2}\mathrm{d}z = -\int_{z_1}^{z_2}(|\varphi'|^2+k^2|\varphi|^2)\mathrm{d}z < 0.$$

所以，不仅$U''(z)$必须在某点$z = z_0$等于零，而且$U''(U - U_s)$在流场的某处必须为负。特别地，如果$U(z)$是单调函数并且$U''(z)$仅在一个点z_0为零，那么对于不稳定性，不等式$U''(U - U_s) < 0$必须在每个$z \neq z_0$都满足（故而，例如，具有如图a 所示速度分布的流动可能是不稳定的，但具有图b速度轮廓的流动总是稳定的）。这个新的不稳定性必要条件一般也是不充分的。例如，Tollmien (1935)证明了在$z_1 < z < z_2, z_1 < 0 < z_2$层中速度分布为$U(z) = \sin z$的流动是稳定的，如果$z_2 - z_1 < \pi$，尽管Fjørtoft-Hølland 条件在这里成立[参见Drazin, Howard (1966)第35页]。然而，在同一篇文章中，Tollmien证明了速度分布存在一个拐点对于一个非常重要情形中的不稳定性是充分的：具有对称速度分布的渠流和具有图a所示形式的速度分布的边界层类型的流动[也参见Lin (1955)8.2节；Shen (1964)G.7节和Drazin, Howard (1966)]。对于所有这种流动，$U''(z)$在某点为零表明Fjørtoft-Hølland条件也满足，并且瑞利方程（2.29）有$\mathrm{Im}\ c > 0$的本征值c。Rosenbluth, Simon (1964)给出了不稳定性的另一个必要条件，这个条件在只有一个拐点的单调分布$U(z)$情形下也为充分条件。

Case, Dikiy和Rosencrans, Sattinger的结果表明，瑞利方程的连续谱一般（甚至总是）稳定的。所以对非黏滞流体的各种平面平行流动不稳定性特征的研究等价于找到相应瑞利方程的所有分立的本征值和本征函数。这个本征值问题在光滑变换的函数$U(z)$的情形难以显示求解。然而，当$U(z)$为分段线性多边形分布时，可以找到不同z区域稳定性方程的指数解，并使用$U(z)$角上自然的“连接条件”得到显式的本征值关系。这个方法首先被亥姆霍兹（用于切向速度不连续性的情形）、开尔文和瑞利[特别参见瑞利(1984)经典著作第2卷，XXI章]使用；Drazin, Howard (1962, 1966)和Michalke, Schade (1963)最近也使用了这个方法。

电子计算机的引入改变了这个情形；现在甚至在光滑分布$U(z)$的情形也容易数值求解瑞利方程的本征值问题。这种解的很多例子可以在Drazin, Howard (1966)II.4节和Betchov, Criminale (1967)的综述中找到，那里有原

始参考文献。

具有$U(z) = \mathrm{sech}^2 z, -\infty < z < \infty$的Bickley射流和$U(z) = 0.5(1 + \mathrm{tanhz}), -\infty < z < \infty$双曲正切自由边界层情形的结果和Sato (1960), Freymuth (1966)和其他人（他们测量了在射流和射流边界层中由喇叭的声音引入的人工扰动的增长）得到的实验数据进行了比较[见Michalke, Freymuth (1966) 的综述]。

最初的比较结果是令人满意的，但更详细的研究表明，实验数据在某些方面与计算结果有偏差。一种可能的解释是，这个理论严格考虑了随时间增长的类波扰动，而在实验中，我们有沿平均流动方向上增长的时间周期扰动。为了用这个理论来解释实验数据，我们用扰动相速度把时间增长率线性变换为空间增长率（如Schubauer, Skramstad首先对黏性边界流做的那样；我们稍后将讨论这个工作）。然而，正如Gaster (1962, 1965)所解释的那样，这种变换并不严格。基于对具有固定的（实）频率$\omega = kc$和未知的本征值（通常为复数）k的瑞利方程（2.29）的本征值问题研究的时间周期性的空间增长扰动的理论更适合描述这些实验数据。Michalke (1965b) 对双曲正切剪切层以及Betchov, Criminale (1966, 1967)对一些无黏射流和尾流发展了这样的理论。对于所有适中的Strouhal数$\mathrm{St} = \omega\delta/U_0$（其中$\delta$和$U_0$是边界层厚度和射流速度的典型值），Michalke的计算结果和Freymuth (1966)的实验结果符合得非常好。对于更大的Strouhal数，有必要考虑真实速度分布对双曲正切的偏离（见Michalke (1968a)关于不同速度分布的自由剪切层中空间增长的扰动的工作）。

在流体具有随高度（即随z坐标）变化的密度的情形，即使粘滞系数不为零，我们也将碰到无黏平面平行流动不稳定性研究中出现的同样的困难，也就是，即使$\nu \neq 0$，相应的奥尔-索末非方程在$U(z) = c$的点也会有一个奇点[见，例如，Dikiy (1960a)]。[18]

因此，我们没有理由将选择多值节的适当分支的恒定密度规则转移到这种情形，如Schlichting (1935b)所做的。在所谓瑞利-泰勒不稳定性理论中研究了变化密度的重流体水平稳态层的不稳定性[见，例如，Chandrasekhar (1961)第X章；Selig (1964)]。目前，对于水平运动的黏性非均质流体的结果是非常不完备的[参见Drazin (1962)]。我们必须注意，在变密度的情形，由于相应的本征函数系统的不完备性，即使$\nu \neq 0$，在不考虑连续谱的情况下，将不稳定性判据的确定化为本征值问题也是不合理的。因此，对于密度随高度变化的流体流动，无论对于$\nu = 0$还是$\nu \neq 0$，严格的稳定性分析都要求研究相应初值问题解在$t \to \infty$ 的渐近行

[18] 实际上，如果除了非零黏滞系数，我们也考虑非零热传导系数，那么我们将再一次得到一个通常的在主项系数中没有任何奇异性本征值问题（这一次是六阶的）。

为。这个解析问题非常困难，这个领域所取得的进展是非常近期的，而且仅在$\nu = 0$的假设下（即对于理想流体）。

所以，Eliassen, Hølland, Riis (1953)以及后来Dikiy (1960a)和Case (1960b)更精确地研究了填满无界半空间并且具有线性速度分布，密度指数衰减的非均匀重流体的二维流动，其扰动的流函数初值问题解的渐近行为。他们证明，正如理想流体平面平行流体的情形，在此情形，仅当存在方程（2.27）形式的幅度增长（即$\mathrm{Im}\ c > 0$）的类波扰动时才会出现不稳定性（在存在增长的扰动的意义下）。

根据G. I. Taylor在1915年对特征值问题的研究结果[但发表得晚得多，见Taylor (1931)]，加上最近Dikiy (1960c)和Dyson (1960) 独立进行的对合流超几何函数零点的行为更严格的数学分析，可以知道，对于所有正的Richardson数Ri（不仅对于$\mathrm{Ri} > 1/4$，如Prandtl (1949) 和Schlichting (1960, 1959)著名的书和综述文章所断言的），这样的非均匀流体的流动（在所示的意义下）是稳定的。实际上，在这个情形，相应的本征值问题在$0 < \mathrm{Ri} < 1/4$时没有分立本征解，而当$\mathrm{Ri} > 1/4$只有稳定本征解。后来，Miles (1961)使用了一个类似的方法研究了具有实际的任意密度分布$\rho(z)$[对于所有z，$\rho'(z) < 0$，密度随高度单调下降]和任意单调速度分布$U(z)$ 的无黏非均质重流体一般的平面平行流。Miles展示了，在这种情况下，不稳定扰动的存在也会导致不稳定波以方程（2.27）形式的流函数存在。此外，他仔细研究了这种流动中可能的类波扰动，结果能够证明，如果所讨论的流动在所有点有$\mathrm{Ri} > 1/4$，那么它肯定是稳定的（Goldstein (1931)和Drazin (1958)关于变密度理想流体的某些特殊流动中的类波扰动的工作包含了最后这个结果的特殊情况）。Howard (1961)也（借助一些积分不等式，类似瑞利使用的）更简单地证明了Miles 的一般结果和更一般条件（不限制速度和密度分布）的结果。在同一个工作中也对一般的变密度流动证明了半圆定理（事实上，这个定理最初是在这种一般情形下证明的）。此外，Case (1960c)也分析了半平面$z > 0$中密度指数增加的无运动理想流体中扰动初值问题解的行为。他自然地发现一个随时间无限增长的解（见上面的2.4节），并且估计了其最大增长率。对密度随z增长（速度梯度不为零）的流体中扰动的初值问题的分析的其他一些例子也可以在Eliassen, Hølland, Riis (1953)的工作中找到。Miles (1963)和Howard (1963)仔细研究了具有密度分层的一些特殊平面平行流动中的类波扰动。他们证明了“稳定性交换”原理（见2.6节）仅在某些非常特殊的条件下成立，而(k, Ri)平面中的不稳定性区域可能有一些不相连的部分组成。

对（在各种力场作用下的均匀和不均匀流体）无黏平面平行流动稳定性理论的详细讨论可以在Drazin, Howard (1966)杰出的综述中找到。

黏性流体平面平行流动不稳定性的一般理论

现在让我们回到更复杂的黏性流体流动的情形。和通常一样，假设密度ρ不变。在此情形，奥尔-索末非方程（2.28）发挥了核心作用。这是一个具有纯分立谱的非奇异方程。所以没有理由怀疑方程（2.26）的任何解可以用方程（2.27）形式的“平面波”的叠加表示。[19]这里我们可以把注意力完全集中在奥尔- 索末非方程（2.28）的分立谱的通常本征值问题的研究上。这样一个研究的第一批尝试是大约1910 年由很多人（W. Orr, A. Sommerfeld, R. von Mises, L. Hopf, et al.）对具有线性速度分布的平面库埃特流的特殊情形（使用不非常严格的数学方法）进行的。这些尝试得到了结论，这样的流动对于所有雷诺数都稳定。这个结果一方面看起来非常自然（因为Orr (1906-1907) 已经严格证明了在没有黏滞时，库埃特流是稳定的，而黏滞自然假设是起稳定的作用），但另一方面，它明显和所有已知流动对于足够大的雷诺数转捩为湍流的经验事实矛盾。在20 世纪20年代初，Prandtl (1921) 和Tietjens (1925) 考虑了速度分布由直线段组成的流动稳定性的问题。他们得到了最出乎预料的结论，在存在黏滞时，这种流动对于任意雷诺数（无论多么小）都是不稳定的。在这几年中，海森堡使用小扰动方法研究平面泊肃叶流稳定性的重要工作(1924) 出现了。在这项工作中，得到了一个结果，在当时似乎是自相矛盾的（但是正确的）。通过详细研究相应的奥尔- 索末非方程解在大Re（即小ν）的渐近行为，没有黏滞时对于小扰动稳定的泊肃叶流，在黏滞流体的情形对于足够大的雷诺数将变得不稳定。海森堡的结果时通过复杂的数学步骤在物理（而不是数学）水平上严格得到的，毫不奇怪，它在很长一段时间引起严重的怀疑，泊肃叶流动稳定性的证明也持续发表了许多年（显然最后一个这种“证据”是C. L. Pekeris 在1948 年给出的）。黏滞引起的不稳定性这一非常有趣的现象的物理机制是Prandtl 在20世纪20年代提出的，但直到很久以后才变得清晰易懂[Lin (1955) 第4章，另外参见Betchov, Criminale (1967)]。

在Tollmien (1929)的工作中，小扰动方法被用于研究边界层流动的稳定性，这种流动被考虑未平面平行的，速度分布有直线和抛物线段组成。Tollmien第一个得到了(k, Re)平面上把稳定扰动和不稳定扰动区域分开的中性稳定性曲线的形式。后来，Tollmien (1930, 1947)和Schlichting (1933a,b, 1935a)把这些结果推广到任意速度分布。在1944-1945年，Lin (1945)对平面平行流稳定性的整体理论进行了批判性的重新思考，重新研究了基本算例，改进了Tollmien和Schlichting的数值结果。然而，这些用于

[19]然而，我们必须注意到这种表示的可能性的严格证明看起来仅由Haupt (1912)在一篇非常老的文章中进行了研究，或许也在Schensted (1960)未发表的学位论文中有研究。所以目前没有理由认为这个问题已经完全解决了。

奥尔-索末非方程（2.28）解的渐近分析的方法的复杂性导致即使到现在，所得到的这些结果在某些方面也是不确定的。困难在于，所使用的渐近序列通常在$U(z) - c = 0$的点z有奇异性，而初始方程在这个点是正常的。所以，寻找一致收敛的渐近展开的问题引起了人们极大的兴趣，但这种展开的表述遇到了很大的困难[见，例如，Lin, Benney (1962)]。

奥尔-索末非方程解的各种渐近近似的精细数学分析的广泛领域中许多最近的结果可以在Stuart (1963)、Shen (1964)和Reid (1965, 1966)中找到，也参见Goering (1959)、Chen, Joseph, Sparrow (1966)、Graebel (1966)、Betchov, Criminale (1967)附录II、Tam (1968)和Huppert (1968)。

我们已经指出，严格来说，黏性流体的平面平行流动只能是库埃特流和泊肃叶流的组合。因此，从考虑这两个例子开始研究黏性流体的特殊平面平行流动是自然的。让我们首先考虑*平面库埃特流*。现在，这种流动对于任意无穷小扰动都是稳定的，这是毋庸置疑的。然而，迄今，这一事实还没有得到严格证明。这个问题的大多数研究使用某些渐近展开来研究极限情况（通常是Re 非常大的情形），使用直接数值方法来计算适中参数下的本征值和本征函数。这个方法首先由Southwell, Chitty (1930)发展[然而，他们把注意力集中在纯虚的本征值，信守“稳定性交换原则”]。最近，随着渐近近似技术的改进和计算机数值计算的应用，这种方法得到了广泛的发展。Grohne (1954)做出了一个最重要的贡献，他发现了在给定k和Re的平面库埃特流中存在一系列类波扰动模式，并计算了十二个最低模式的复本征值$c = c(k, \mathrm{Re})$。对于所有k和Re，所有这些本征值对应于$c_2 = \mathrm{Im}\ c < 0$的阻尼振荡。Grohne给出的对一个固定k的十二个函数$c_2 = c_2(\mathrm{Re})$的形式也可以在Shen (1964)和Betchov, Criminale (1967) 中找到[尽管必须记住，Grohne的数值结果和后来Gallagher, Mercer (1964)的计算符合得不非常好]。在最后使用计算机的数值工作Riis (1962)[他也研究了具有线性速度分布的非均匀黏性流体中的类波扰动]、Gallagher, Mercer (1962, 1964)、Deardorff (1963)、Birikh (1965)[他特别考虑了小Re值的情形]、Hains (1967)、Ponomarenko (1968c)和其他工作中，只发现了阻尼振荡。所以非常有可能平面库埃特流中不存在不稳定扰动，尽管目前这个问题还不能认为已经板上钉钉，因为还没有穷尽整个参数空间，这用渐近估计没法处理。显然，对于任意雷诺数，具有$U(z) = Az$和方程（2.28）的本征值的唯一严格数学结果是Dikiy (1964)给出的，他证明了（没有用数值方法）这个方程所有纯虚的本征值c满足不等式$c < -k/\mathrm{Re}$ （其中Re是雷诺数，由渠的半宽度$H_1 = H/2$和流动的最大速度$U = 2AH_1$定义）。这个结果特别地表明，在这种情况下，在满足“稳定性交换原理”的情况下，不可能发生向不稳定的转变，但这不能保证不稳定性一般来说是不可能的。

平面泊肃叶流动的情况更令人满意。这里林家翘基于一个特殊类型对于大Re的渐近展开的仔细计算证实了海森堡对这种流动在足够大（但有限的）Re时的基本结论，并且可以得到Im $c(k, \mathrm{Re}) = 0$形式的中性稳定性曲线。之后这个问题由Thomas (1953)在相应本征值问题数值解的帮助下重新进行了研究，Shen (1954)、Lock (1955)、Nachtsheim (1964)、Grosch, Salwen (1968)和其他人也使用改进形式的渐近展开和/或更好的计算机进行了研究。所有这些计算的结果互相符合得较好（见例如图14）。足够大的Re的平面泊肃叶流的不稳定性也由Krilov (1964)严格证明，没有使用数值方法。Shen (1954)使用Lin的方法计算了一组稳定曲线Im $c(k, \mathrm{Re}) =$ 常量的形式，这定义了一组具有给定增长率的平面泊肃叶流的扰动[参见Lin (1955)、Shen (1964)、Betchov, Criminale (1967)]。Grosch, Salwen (1968)后来重复了同样的计算，他们的结果和Shen的结果符合得很好。

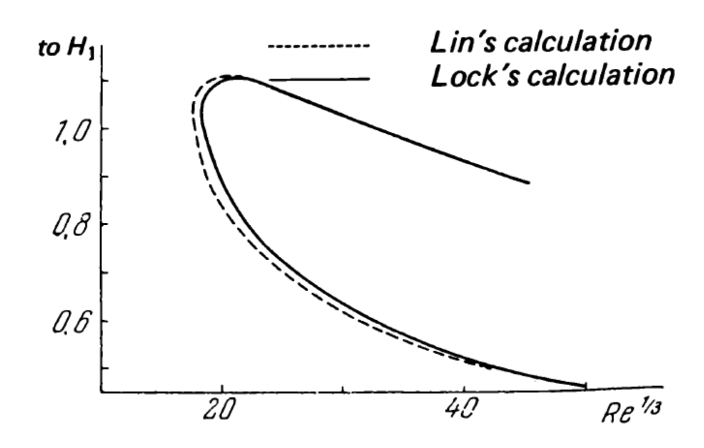


图 14 (k, Re)平面上平面泊肃叶流的中性曲线的形式，根据Lin (1945)和Lock (1955)的计算。

Lin和Lock发现的“中性曲线”Im $c(k, \mathrm{Re}) = 0, \mathrm{Re} = UH_1/\nu$的形式（$H_1$是渠的半宽，$U$是未扰动流的最大速度）如图14 所示。临界雷诺数$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$（对应于这条曲线最左边的点）大约等于6000（根据Lock的工作），5300（根据Lin的工作）。在两个计算中，这都对应于$k_{\mathrm{cr}} \approx 1/H_1$（Thomas得到了接近的值$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}} \approx 5780$和$k \approx 1.02/H_1$，而根据Nachtsheim，$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}} \approx 5767$，$k_{\mathrm{cr}} \approx 1.02/H_1$，根据Grosch, Salwen，$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}} \approx 5750$，$k_{\mathrm{cr}} \approx 1.025/H_1$）。当$\mathrm{Re} \to \infty$，中性曲线的两支（上下两分支）都趋向于零（上分支渐近正比于$\mathrm{Re}^{-1/11}$，而下分支正比于$\mathrm{Re}^{-1/7}$）。所以，随着Re增大，具有固定（但不太大的）k 的扰动首先位于稳定区（即，他们衰减），然后位于不稳定区，然后最终再次位于稳定区。从这个我们看到为什么在$\mathrm{Re} \to \infty$（即$\nu \to 0$）极限，流动变得对任意扰动都稳定。

Grohne (1954)证明了奥尔-索末非方程对于基本泊肃叶分布情形的本征值也有更高的模式。他计算了最低的十二个复本征值$c = c(k, \mathrm{Re})$并且发现所有这些模式，除了第一个（这是上面提到的所有作者都研究过的唯一一个模式），都是强烈衰减的。Grohne对平面泊肃叶流的一些结果在Shen (1964)和Betchov, Criminale (1967)重新提到。后来，Grosch, Salwen (1968)重新计算了这些更高模式的本征值和本征函数。他们得到了和Grohne的结果定性上完全相符（但定量上不太接近）的结果。

最一般的严格稳态的黏性流体平面平行流动是在有一个运动上壁的平面渠中出现的纵向压强梯度不变的组合的*平面库埃特-泊肃叶流动*。这种流动的速度分布可以写为无量纲形式，$U_1(z_1) = (4 - A)z_1 - (4 - 2A)z_1^2, 0 \neq z_1 \neq 1$，其中$z_1 = z/H, U_1(z_1) = U(z_1 H)/U(0.5H)$，$A = U_1(1)$是正比于上壁的速度的无量纲参量，从纯泊肃叶流的$A = 0$变化到纯库埃特流的$A = 2$。Potter (1966)和Hains (1967)研究了这种库埃特-泊肃叶流的稳定性，他们的结果互相吻合。根据他们的结果，在泊肃叶流上叠加库埃特流总是起到了稳定的作用，极大地增大了$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$。例如，把上壁的速度从零（对于泊肃叶流）变为最大泊肃叶速度的10%导致$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$增加236%。当$A$达到大约0.55，平面库埃特-泊肃叶流表观上变得对所有无穷小扰动稳定（即$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$趋向于无穷大），在达到$A = 2$的线性速度分布之前很久。

Potter (1967)对于具有$U_1(z_1) = (A-1)z_1^2 + Az_1 + 1, 0 \geq z_1 \geq -1, U_1(z_1) = U_1(-z_1), 0 \leq z_1 \leq 1$形式的对称抛物线无量纲速度分布的模型流的情形得到了类似的结果。这里，$A = 0$也对应于泊肃叶流，增加A对应于增加$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$。对在所有雷诺数的所有无穷小扰动完全稳定性表观上在$A \approx 0.437$时达到（即在达到$A = 1$时的对称线性速度分布之前很久）。

黏性流体平面平行流稳定性的进一步结果。边界层流动的情形

现在让我们考虑平板上边界层流动中流动最重要的情形。根据1.4节的结果，因为边界层的厚度增长相对缓慢而且垂向速度远小于水平速度，所以在此情形我们也可以以相当好的精度使用平面平行流的稳定性理论是合理的。[20]所以在他们的计算中，Tollmien 和Schlichting 花了相当大的力气在速度分布等同或接近布拉休斯分布的平面平行流的稳定性上（图2，1.4节）。结果，他们可以画出中性曲线$\mathrm{Im}\ c(k, \mathrm{Re}) = 0$，即确定$(k, \mathrm{Re})$ 平面上不稳定区域的边界，根据他们的数据，这条曲线近似和图14 中的曲线$\mathrm{Im}\ c(k, \mathrm{Re}) = 0$ 有相同的形式。临界雷诺数$\mathrm{Re}_{\delta^*,\mathrm{cr}} =$

[20]几乎（但不是严格）平面平行流的奥尔-索末非方程中的附加项的效应的一些初步估计（这使得这个假设是部分合理的）最早已经由Pretsch(1941a)得到。后来，其他人也研究了这个问题，如Reid (1965)和Betchov, Criminale (1967)第54节所讨论的，在那里可以找到其他参考文献。然而，平面平行近似在准平行流稳定性研究中的精确性目前还远远没有确定，支持这种近似的主要论据是理论结果和实验数据之间非常好的一致性。

$\left(\frac{U\delta^*}{\nu}\right)_{\mathrm{cr}}$，其中$\delta^*$是方程（1.53）定义的边界层的唯一厚度，根据Tollmien的计算等于420，根据Schlichting的计算等于575。

根据方程（1.56），这意味着$\mathrm{Re}_{x,\mathrm{cr}} = (Ux/\nu)_{\mathrm{cr}} = 0.6 \times 10^5$（根据Tollmien），$\mathrm{Re}_{x,\mathrm{cr}} = 1.1 \times 10^5$（根据schlichting）。这些数值比2.1节给出的那些低，因为失稳不一定伴随向湍流状态的转捩。在失稳的点，仅产生一些增长的振荡，随着向下游运动而放大。对于一些更大的x值，产生向充分发展湍流的转捩。

然而，另一方面，得到的$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$值自身不能看着证实了Tollmien-Schlichting理论，所以毫不奇怪早在G. I. Taylor (1938)就就表达了应用这个理论到边界层中的真实流动（实际上不是平面平行的）的合法性的怀疑。然而，Schubauer, Skramstad (1947)用边界层流动的例子对Tollmien-Schlichting理论进行的直接实验验证基本证实了这个理论的所有推论，表明对其正确性的怀疑是没有根据的。在此之后，Lin (1945)和Shen (1954)重复了Tollmien和Schlichting的计算，再次得到了$\mathrm{Re}_{\delta^*,\mathrm{cr}} = 420$。然而，他们得到的中性曲线的形式和之前发现的稍有不同（他们的结果如图15所示）。更近的时候，同样的问题被不同的研究者在机器计算的辅助下重新研究了多次[见Betchov, Criminale (1967)的综述，也参见Reid (1965)]，没有发现与Lin 和Shen 的结果有限制不同。

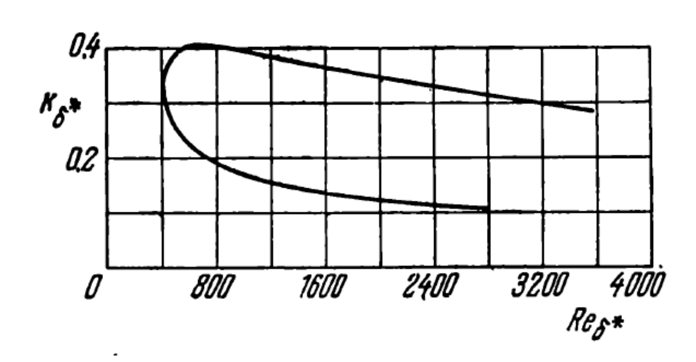


图 15 对于平板上方边界层，$(k, \mathrm{Re}_{\delta^*})$平面上中性曲线的形式。

Schubauer和Skramstad的实验是在华盛顿特区的美国国家标准局的一个有极低初始湍流的风洞完成的。这个风洞的参数U'/U在采取了谨慎的措施后可以保持在$0.0003 - 0.0002$的量级。这被证明非常重要，因为有些数据显示，当U'/U值超过0.002（即对于所有较老的实验中得到的值），边界层中向湍流的转捩明显受到这种自由流扰动的强烈影响[和2.2节中描述的泰勒的方案一致，或者作为Criminale (1967)研究的自由流和边界层流动相互作用的另一种机制的结果]。然而，当$U'/U < 0.002$，转捩主要是由

正弦形式的随机二维扰动引起的，在一定条件下，扰动幅度向下游增大，和线性扰动理论的推论一致。早在1940年，Schubauer和Skramstad就通过仔细的热线风速仪观测证明了存在这种规则的振荡。后来，为了更准确地验证理论推导，他们在边界层中放置了一条薄金属带，通过电磁铁引入振荡，产生固定频率ω的人工扰动。他们成功证明了速度的中性的（既不增长也不衰减）几乎纯正弦波动对应于稳定图中中性曲线的点。美国国家标准局的其他人在随后一些年重复了Schubauer和Skramstad的经典实验，证实了之前的发现（参见Betchov, Criminale (1967)第VI章）。Wortmann (1955)也使用水作为流体，使用特殊的流动可视化技术进行了类似的实验。Burns, Childs, Nicol, Ross (1959)也做了类似的实验，使用放置在流体中镀银的薄片代替热线风速仪观测速度扰动的z分量引起的照射到薄片上的光束的反射光的振荡。Wortmann和Burns等人的观测得到了和Schubauer, Skramstad的结果符合很好的结果。

为了将实验数据和理论推论相比较，方便的是考虑具有固定的（实）频率ω和变化的（一般来说复的）波数k的$\psi = e^{i(kx-\omega t)}\varphi(z)$ 形式的时间周期性扰动，代替通常的具有固定的（实）波数k 的方程（2.27）形式的空间周期性扰动。换句话说，研究流动中一个固定点处设置的给定频率ω的扰动沿平板的空间变化（即随x增大）是合适的。在Schubauer-Skramstad实验的时候，仅发展了空间周期性扰动的理论，所以这些作者简单第将时间变化率用扰动相速度的方法线性转换未空间增长率。然而，如果有色散，这个过程是不严格的，看起来更合理的是用群速度而不是相速度把x从时间增长率转换为空间增长率。Gaster (1962, 1965)后来研究了这个问题，他证明了对于边界层中具有相对小的放大率的扰动（群速度和相速度大致相等），Schubauer-Skramstad变换有相当高的精度，即它是有道理的（也参见Betchov, Criminale (1967), 第53节）。另一方面，使用了现代计算机后，从未知复c（具有不变的实k）的本征值问题转变为未知复k（具有不变的实ω）的本征值问题并不会产生任何额外的困难。所以，毫不奇怪在1964-1966年间很多研究者独立进行了布拉休斯边界层中空间增长扰动的数值稳定性计算（所有这些参考文献和一些结果可以在Betchov, Criminale的第53节找到）。

图16给出了实验数据与Schubauer, Skramstad (1947)[黑点]和Burns等人(1959)[叉]关于(ω, Re)平面上具有理论中性曲线Im $k(\omega, \mathrm{Re}) = 0$的中性扰动的频率（借助Shen (1954)数据的相速度变换得到）的比较。理论和实验的一致性是完全令人满意的。在这方面，我们注意到，空间周期扰动和时间周期扰动的中性曲线总是精确相同的，因为如果Im $c = 0$，那么我们有Im ω = Im $kc = 0$。图17给出了Schubauer, Skramstad的和

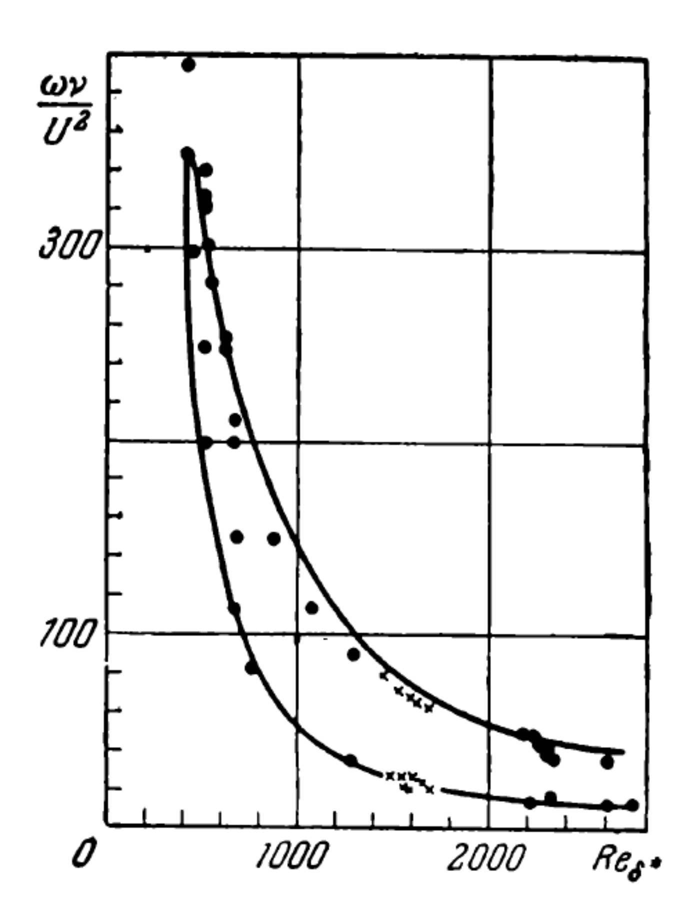


图 16 平板上方边界层在$(\omega, \mathrm{Re}_{\delta^*})$平面上中性曲线的计算形式以及中性振荡频率的实验数据。

中性扰动有关的波数相联系的数据。这些数据也非常好地位于理论曲线上。使用1959-1964年通过数字计算得到的理论曲线替代图15所示的旧的曲线时（这条新曲线可以在Betchov, Criminale的书中找到），这种一致性甚至要稍好一些。Schubauer和Skramstad测量的空间增长率Im $k = k_2(\omega, \mathrm{Re})$也和理论计算的结果符合得非常好。数据和理论推导比较的进一步材料可以在Lin (1955)、Schlichting (1959, 1960)、Dryden (1959)、Stuart (1963)、Shen (1964)和Betchov, Criminale (1967)的综述中找到。

人们也对很多其他边界层分布（例如，对应于流过弯曲表面或者存在有利或不利的压强梯度，对应于流体在有吸入的多孔板上流动，对应于壁面射流等等）的中性曲线和稳定图进行了类似的计算。这些计算的结果可以在Lin (1955)、Shen (1964)、Reid (1965)、Hughes, Reid (1965)、Betchov, Criminale (1967)和其他很多文献中找到。刚性壁

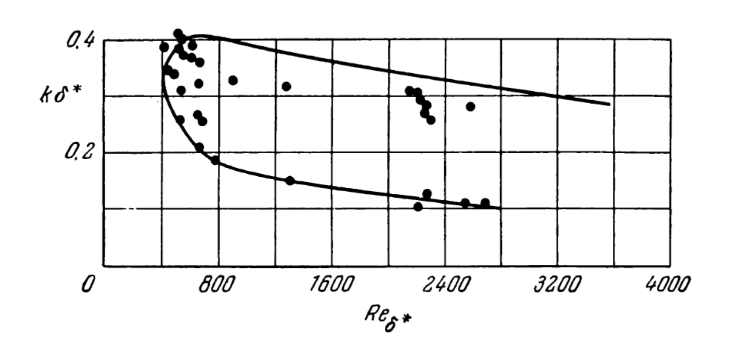


图 17 平板上方边界层中中性扰动的波数值，根据Schubauer和Skramstad的数据。

之间具有非二次速度分布的平面平行渠流的同类型结果可以在Birikh (1966)和Chen, Sparrow (1967)中找到。

有趣的是，得到的中性曲线的形式相当依赖于速度分布是否有一个拐点（即$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}z^2}$是否在某个$z$变为零）。在后一种情形，稳定图上的中性曲线和平面泊肃叶流或布拉休斯边界层（见图14和图15）情形有相同的特征，即当$\mathrm{Re} \to \infty$，它的两个分支被拉向横坐标。所以，当速度分布没有拐点，任何具有增大的雷诺数的固定波长（或固定频率）的扰动最终会变得稳定。然而，当速度分布确实有一个拐点，中性曲线的上分支在$\mathrm{Re} \to \infty$会有一个有限的渐近值（见图18），这个渐近值的纵坐标取决于拐点到壁的距离。换句话说，存在一个波长（或频率）范围，无论雷诺数的值有多大，相应的扰动是不稳定的。显然，这与速度分布中拐点的存在对无黏不稳定性问题所起的决定性作用直接相关。

到目前为止，我们仅讲述了边界层流动中的中性和不稳定扰动。认为上面提到的所有这些结果和最低的本征模式相关，并且也存在一个类似于Grohne (1954)在平面库埃特和泊肃叶流情形发现的一系列无穷多个强烈衰减的高阶模式。然而，目前对这些高阶本征模还一无所知。关于所有这些模式的信息对于研究在初始时刻引入流动中的空间局域化扰动的命运具有重要意义。实际上，这里我们必须考虑一个具有相当一般性初始条件（分解委对所有$\psi = e^{\mathrm{i}(k_1x+k_2y-kc_nt)}\varphi_n(k_1,k_2,z)$ 形式的空间周期性本征模的积分，其中$k=(k_1^2+k_2^2)^{1/2}$，指数n表示模式数）的初值问题。因为现有的所有证据都表明，只有第一个模式是不稳定的，其他模式都是衰减的，所以我们有理由希望，对于足够大的r值的渐近估计，只有$n=1$的展开项起重要作用。然而，相应的近似难以处理，因为我们对奥尔-索末非方程的本征函数知之甚少，甚至对于第一个模式也是如此。所以在Criminale, Kovásznay (1962)[另见Betchov, Criminale (1967)]考虑的布拉休斯边界层中

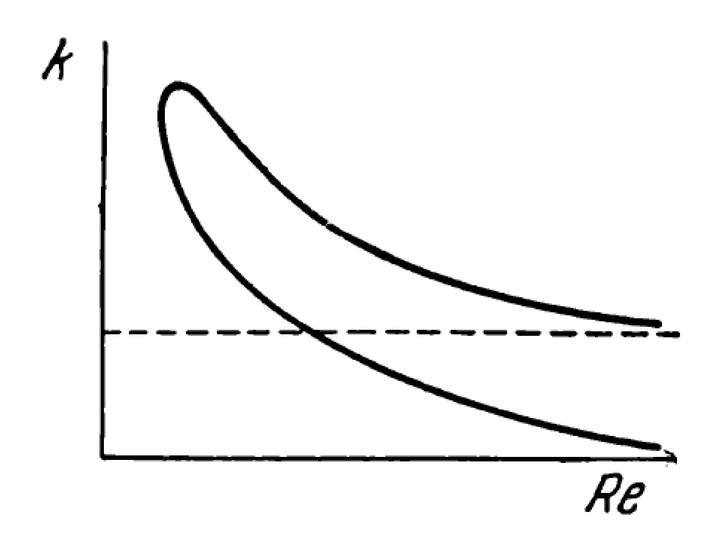


图 18 对于速度分布有一个拐点（例如，对于存在逆压强梯度的边界层）的流动，(k, Re)平面上中性曲线的示意形式。

三维局域化扰动初值问题的具体例子中，作了一些相当粗糙的简化假设，所得结果与试图检验这个理论的Vasudeva (1967)的实验数据不太接近。然而，Criminale, Kovásznay的解的定性特征和实验结果符合得很好。Tam (1967)的计算也是如此，他使用了Case (1960a)和Dikiy (1960b)的方法，证明了略微超临界平面流动中强烈局域化的“点状”扰动在向下游运动时发展为三维湍流斑，很多实验者观测到了这种斑。另一方面，Iordanskiy, Kulikovskiy (1965)对足够大雷诺数下二维流动中二维局域化[在(x, z)平面中的]扰动的演化进行了非常一般性的渐近分析。他们假设波数在中性曲线$\mathrm{Im}\ c(k, \mathrm{Re}) = 0$的分支趋向于零并得出结论，在此情形，局域化的扰动显然必须在流动的任何有限区域内随$t \to \infty$衰减（另见Kulikovskiy (1966)的相关文章，分析了有限长度渠中的平面泊肃叶流的稳定性）。

无界空间中某些平面平行流动的稳定性

作为分布有拐点的流动的具体例子，让我们考虑无限空间$-\infty < z < \infty$中的平面平行流动，它的速度分布为

$$U(z) = U_0 \mathrm{sech}^2 \frac{z}{H} = \frac{4U_0}{(e^{z/H} + e^{-z/H})^2} \tag{2.31}$$

（见图19a）。根据Schlichting和Bickley的计算（例如，见Schlichting (1960)或Goldstein (1938)第1卷，57节），这种类型的方程代表了层流平面射流（从沿着$x = 0, z = 0$的无限薄线性出口喷出，进入充满同样流体的空间）中纵向速度分布$u_1 = U$的相似解。这里参量U_0和H仅相对较弱地依赖于x，而横

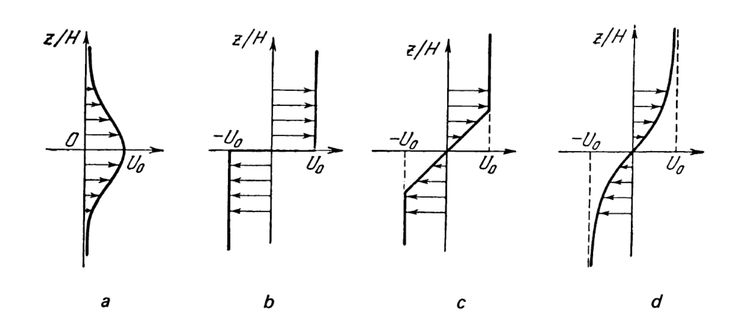


图 19 无界空间中一些平面平行流动的速度分布的示意图：a. 平面射流；b. 具有切向速度间断的流动；c. d. 两个不同速度的平面流的混合层。

向速度$u_3 = w$和纵向分量相比为小。所以具有分布（2.31）的平面平行流动可以考虑为远离出口的平面射流模型。在这方面，其稳定性已经被很多作者研究过[特别是Curie (1956)、Tatsumi, Kakutani (1958)、Howard (1959)、Klenshow, Elliott (1960)和Soprunenko (1965)]。

一如既往，对于具有（2.31）分布的流动，确定(k, Re)平面上的中性曲线导致了对相应奥尔-索末非方程（2.28）本征值问题的研究。这种流动的无界性使得相比刚性壁之间渠流的情形，可以对计算进行一些简化（因为在此情形只需要考虑方程（2.28）的在无穷远处衰减的解）。此外，由于分布（2.31）的对称性，这个情形的所有本征函数$\varphi(z)$可以分为相对z为偶的和奇的，对应于反对此和对称的速度扰动。因为实验和粗略的理论估计[参见例如Petrov (1937)] 表明偶的$\varphi(z)$ 扰动总是不稳定的，在详细计算中我们可以仅限于$0 \le z < \infty$区域以及边界条件$\varphi(\infty) = \varphi'(\infty) = 0$和$\varphi'(0) = \varphi'''(0) = 0$。用Curie (1956)和Tatsumi, Kakutani (1958)两种不同方法计算的结果如图20所示。我们看到他们一般符合得很好（除了在小k值的区域，在那里Curle的方法不够精确）。这些结果也被Kaplan的机器计算所证实，他同时得到了稳定曲线Im $c_2(k, \mathrm{Re})$ = 常量[见Betchov, Criminale (1967)]。Soprunenko的数值结果和图20的数据有小的偏离（相当小），但它们含有很多额外的信息（例如，Soprunenko也研究了对称速度扰动，发现$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}} \approx 90$，即比反对称扰动的$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$ 大，如所预期的）。根据图20，随着$\mathrm{Re} \to \infty$，所有$k < 2/H$的扰动都是不稳定的。此外，当Re增大，不稳定波数的区域单调扩大。所以，黏滞的增大对扰动仅有稳定作用（和没有拐点的速度分布的流动的情形不同）。这里的$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$被证明非常小（这对于有拐点的速度分布的流动也是典型的）。由Klenshow和Elliot 仔细的数值计算，$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}} = \left(\frac{U_0 H}{\nu}\right)_{\mathrm{cr}} \approx 3.7$和$k_{\mathrm{cr}} \approx 0.25/H$ （我们注意到对于真实的射流，通常在不能考虑为平面平行射流的流动区域得到$\mathrm{Re} \approx 4$）。所考虑的流动

的理论结果和Sato, Sakao (1964)的实验数据进行了比较，这些是由实验人员自己和Soprunenko通过扬声器在平面射流中引入的人为扰动的发展的数据。Sato和Sakao的实验数据弥散非常大，但平均值和理论稳定性计算的结果不冲突。

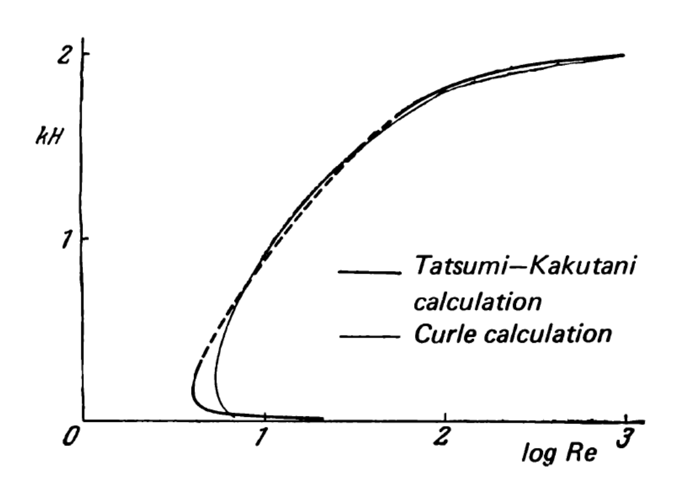


图 20 对于平面射流(k, Re)平面上中性曲线的形式，根据Curie (1956)和Tatsumi, Kakutani (1958)的计算。

Yamada (1964)研究了具有（当$|z| \le H$时$U(z) = U_0$，当$|z| > H$时$U(z) = 0$）多边形速度分布的平面射流的理想化模型的稳定性，他使用了在速度分布的拐角处具有自然"匹配条件"的相应的奥尔-索末非方程。他发现在此情形，对于反对称速度扰动，$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}} \approx 4$和$k_{\mathrm{cr}} \approx 0.25/H$，而对于对称扰动，$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}} \approx 20$ 和$k_{\mathrm{cr}} \approx 1/H$，和具有光滑速度分布的射流的结果符合得相当好。更有趣的是，Yamada解释了反对称和对称类型本征模序列的存在。每个模式对应一个特殊的中性曲线，只有第一个模式导致上面提到的$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$和$k_{\mathrm{cr}}$值。

无界空间中速度分布$U(z)$有一个拐点的另一种重要类型的流动在$z \to +\infty$时，$U(z) \to U_0$，$z \to -\infty$时，$U(z) \to -U_0$。这种类型最简单的流动是具有图19b所示分段速度分布的理想化流动。这个流动描述了切向速度不连续的平面。更实际的同样类型的分布如图19c和19d所示，它们定量对应于两个平面平行流动（一个以不同速度在另一个上面流动）的层流混合区。如已经提到的，在忽略黏性考虑理想流体流动稳定性的时候，具有图19b和19c所示的速度分布的流动的不稳定性很早就被亥姆霍兹、开尔文和瑞利严格证明了。具有图19d所示分布的无黏流体的流动的不稳定性现在也得到了非常详细的研究[见，例如Michalke (1964)]。考虑黏性，lessen (1950) 研究了具有图19d中那种分布的流动的稳定性。

然而，Lessen的结果只考虑了具有足够大雷诺数的情形并实际上展示了$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}} < 20$[在Lin (1955)中，由此错误地假设了在此情形$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$接近20]。后来，Esch (1957)数值地研究了具有图19c所示函数$U(z)$的奥尔-索末非方程（2.28）对于所有Re的本征值问题。他第一个发现了具有这种速度分布的流动实际上对所有Re都不稳定。再后来，Tatsumi, Gotoh (1960)证明了这个结果与Esch研究的分布的特殊形式无关，而是和很宽范围的分布有关，对应于两个平行流的平面混合区[尽管Lessen, Ko (1966)研究了类似于平面混合器的半射流的稳定性，它们数值地得到了图20所示形式的中性曲线和量级为几的非零$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$]。对于平面混合区，$(k, \mathrm{Re})$平面上的中性曲线的一般形式（和Tatsumi, Gotoh的推导一致）如图21所示。这幅图给出了Betchov, Szewczyk (1963)对具有双曲正切速度分布$U(z) = U_0 \tanh(z/H)$（如图19d所示）的奥尔-索末非方程数值积分得到的结果。积分的详细步骤和很多其他结果可以在Betchov, Criminale (1967)第13节找到。

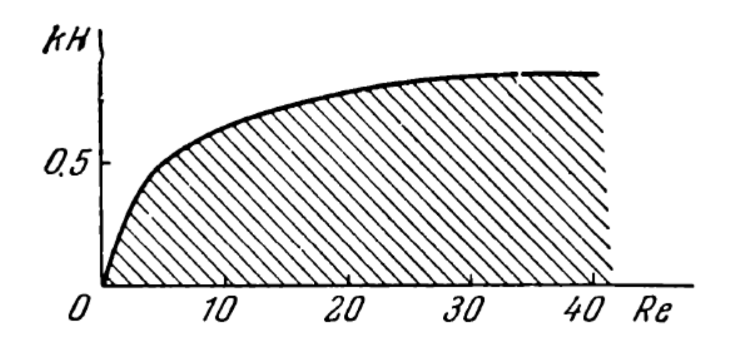


图 21 对于两个平面平行流之间的混合层，(k, Re)平面上中性曲线和不稳定区域（阴影）的位置，根据Betchov, Szewczyk (1963)。

圆泊肃叶流和其他轴对称流的稳定性

圆管中泊肃叶流的不稳定性和向湍流转捩的问题可能是与本节开头所描述的Osborne Reynolds的经典实验紧密相关的最有趣的稳定性问题。然而，这个问题也是非常困难的，我们在这个领域的知识现在仍然相当贫乏。所以，我们应该以对轴对称流的一般分析（有一些在轴对称射流和尾流中的应用）开始我们的讨论，仅在最后涉及圆泊肃叶流的特殊情形。

首先，让我们考虑一般的稳态轴对称流，即具有速度$U(y, z) = U(r), r = (y^2 + z^2)^{1/2}$的平行流，它在每个地方都平行于$x$轴，仅依赖于距离轴$y = z = 0$的距离$r$。应用小扰动理论，我们必须使用柱坐标$(x, r, \varphi)$。线性化方程组的系数将不依赖于$x$和$\varphi$，于是这里可以假设速度和压强扰动的形式为$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{f}(r)e^{\mathrm{i}(kx+n\varphi-\omega t)}$, $p(\boldsymbol{x}, t) = g(r)e^{\mathrm{i}(kx+n\varphi-\omega t)}$（参见方程（2.13），2.6节）。把这些表达式带入方程，我们得到一个和通常一样复

杂的本征值问题，和问题（2.14）-（2.16）有关（但当然不相同）。

在考虑平面平行流动的稳定性时，我们首先假设雷诺数非常大，可以忽略黏性，即把流体看作理想流体。让我们对轴对称流做同样的操作。那么，我们的本征值问题就大大简化，从扰动幅度的线性化方程中消去函数f^x、f^φ和g（和速度的轴向、环向分量以及压强有关），我们得到下面的未知函数$f^{(r)}(r) = F(r)$的方程：

$$(U-c)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{r}{n^2+k^2r^2}\frac{\mathrm{d}(rF)}{\mathrm{d}r}\right]-(U-c)F-rF\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{rU'}{n^2+k^2r^2}\right)=0$$

其中和通常一样，$c = \omega k$是这个问题的本征值。这个方程由Rayleigh (1892)给出，他也建立了轴对称情形理想流体流动的流体力学稳定性理论[也参见Batchelor, Gill (1962)重要的文章和Schade (1962)对轴对称流稳定性的一般分析]。相应的边界条件指出，在流动的刚性（圆柱）边界上，$F(r) = 0$，对于无界流当$r \to \infty$，$F(r) \to 0$，而在围绕轴$r = 0$的流动的情形，如果$n \neq 1$，$F(0) = 0$，如果$n = 1$，$F(0)$无界。

$F(r)$的瑞利方程在除以$U - c$后，乘以rF的复共轭，然后对新方程的虚部进行积分，得到

$$c_2\int_{r_1}^{r_2}|q(r)|^2Q'(r)dr = 0,$$

其中$c_2 = \mathrm{Im}\, c$，$q(r) = rF(r)/(U-c)$，$Q(r) = rU'/(n^2+k^2r^2)$，而r_1和r_2是流动的边界（没有排除$r_1 = 0$和/或$r_2 = \infty$的情形）。所以，存在复本征值c（即增长的类波扰动）的必要条件是$Q'(r)$应该在流动的某点变号（这个条件也是瑞利首先给出的）。例如，在圆泊肃叶流（$U(r) \sim R^2 - r^2$）中，增长的非轴对称无黏扰动是不可能的。泊肃叶流中轴对称扰动（$n = 0$）的情形的例外之处在于Q'严格等于零（类似于U''严格等于零的平面平行库埃特流）。这个情形的$F(r)$的瑞利方程根本没有本征解。

不稳定性的这个必要条件和平面平行无黏流不稳定性的速度分布拐点的必要性明显类似。Fjørtoft-Hølland对于平面平行流更强的必要条件在轴对称流稳定性理论中也有一个简单对应：如果U_s是Q'变号之处的速度，那么只有不等式$Q'(U - U_s) < 0$在流场中某处成立时才可能存在一个复本征值c[相应的证明和Fjørtoft-Hølland条件类似。见Batchelor, Gill (1962)]。瑞利也证明了$c_1 = \mathrm{Re}\ c$不能位于$U(r)$的范围之外。此外，Howard的半圆定理（对于平面平行主流动（primary flow），限制了可能的c 值在复c 平面上的范围）对轴对称主流动也是正确的（有严格相同的公式）[Batchelor, Gill (1962)]。最后，Tollmien (1935)的结果展示了平面平行流的无黏不稳

定性最简单的必要条件在很多重要的情形也是充分的，可以转换到轴对称流[见Schade (1962)]。毫无疑问，Case和Dikiy关于平面平行无黏流中扰动初值问题的结果也可以对轴对称流证明，虽然这个问题显然没有被任何人研究过。

如果我们忽略c值可能的连续谱（这一般来说是明显稳定的，基于与平面平行情形的相似性），对特定无黏流的不稳定性特征的研究等价于找到$F(r)$的瑞利方程的分立本征值和本征函数。Batchelor, Gill (1962)对具有平顶分布（即，如果$r \neq R$，$U(r) = U_0$，如果$r > R$，$U(r) = 0$）和更真实的$U(r) \sim (r^2 + R^2)^{-1}$ 形式的射流轮廓的理想射流研究了这个问题。在后一种情形，只有$n = 1$的扰动是不稳定的。Sato, Okada (1966)对于$U(r) = U_0 - e^{-br^2}$形式分布的轴对称尾流得到了类似的结果。这里不稳定扰动也仅在$n = 1$时存在。Sato和Okada计算了不稳定扰动的增长率，将结果和在细长尖尾轴对称体尾流中人工扰动演化的实验数据进行了比较。理论和实验符合得相当好。Michalke, Schade (1963)也进行了轴对称射流稳定性计算。

现在让我们回去考虑更困难的黏性流体轴对称流的稳定性问题。Gill (1962)简单考虑了轴对称射流中黏滞对轴对称扰动稳定性的效应，但这个领域中绝大多数工作都与圆泊肃叶流的研究有关。相应的本征值问题异常复杂，所以所有研究都只考虑了特殊情况。人们特别关注了不依赖于φ的轴对称扰动（$n = 0$）的情形。Sexl (1927a, b)、Presch (1941b)、Pekeris (1948)、Belyakova (1950)、Corcos, Sellars (1959)、Sexl, Spielberg (1959)、Gill (1965a) 和其他一些人研究了这个特殊问题。在所有情形只发现了衰减的本征模式。Gill (1965a)综合评价了以往的研究成果，并借助具有固定（实）频率ω和未知（复）k的本征值问题的数值解计算了一些扰动的空间衰减率，并将它们和Leite (1959)关于管流中接近轴对称的人工周期扰动的衰减的实验数据进行了比较。因为还没有找到扰动方程的增长的轴对称解，该领域的大多数研究者确信管中的泊肃叶流（类似平面库埃特流）对于无穷小轴对称扰动在所有雷诺数下都是稳定的。然而，我们必须注意到，关于这个事实的严格证明的情况比平面库埃特流的情况稍差一些。

到目前为止，在求解圆泊肃叶流中非轴对称扰动（$n \neq 0$）行为的一般问题方面只迈出了第一步。到1968年，只研究了非常特殊的非轴对称扰动[例如，$k = 0$的不依赖于x的，或者$u_r(x, t) \equiv 0$的。见Kropik (1964)，在哪里可以找到更多文献]。所有这些扰动也看起来是稳定的。所以，通常认为圆管中的泊肃叶流对任意无穷小扰动都是稳定的，这里的不稳定性只有引入有限振幅的扰动时才会发生（换句话说，圆泊肃叶流时一

个具有硬激励的自激系统）。这个想法与管内层流状态持续性的实验数据非常吻合，我们已经在2.1节和2.4节提到了这一点。然而，Lessen, Fox, Bhat, Liu (1964)的实验结果，以及特别是Fox, Lessen, Baht (1968)的实验结果对这个问题的这个观点的正确性提出了一些质疑。这些研究者在层流圆泊肃叶流中（通过平面平行于管轴、运动方向与主流动方向垂直的小振动叶片）人工产生环向周期性扰动的一阶模式（$n = 1$）。观察扰动在向下游传播时的变化，他们发现了衰减和增长的扰动（以及几乎中性的扰动）。通过改变流动的雷诺数和叶片的震动频率，他们成功地得到了(ω, Re)平面上实验的中性曲线（对应于具有固定的实ω和未知的复k的正比于$e^{\mathrm{i}(\pm\varphi+kx-\omega t)}$的扰动的本征值问题）。中性曲线在形式上类似于图16所示的曲线（但更光滑），相应的$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$值大约为2130。所以，Fox等人假设当Re 大于大约2130时，圆泊肃叶流对$n = 1$的无穷小非轴对称扰动不稳定。表面上看，这个假设似乎并不是完全不可能。这是因为当时对描述圆泊肃叶流中$n \neq 0$的扰动的行为的耦合常微分方程组的复本征值问题的解一无所知。然而，Lessen, Sadler, Liu (1968)针对$n = 1$的情形对这个问题仔细的数值研究表明这个问题存在几个本征模式，但所有模式在Fox, Lessen, Bhat (1968) 发现的不稳定的波数和雷诺数范围内都是衰减的。所以，在这个$n = 1$的扰动范围内不存在线性不稳定性。此外，Lessen等人研究了对应于大得多的Re值（高达$\mathrm{Re} = 30000$）的(k, Re)平面上的有限部分，也没有观察到不稳定性，或者任何在更大雷诺数时不稳定性的迹象。Lessen等人没有考虑$n > 1$的扰动，但他们提出了一些定性的论证，表明这种扰动比$n = 1$的扰动更稳定。他们的预期与Salwen, Grosch (1968)的发现非常一致，他们给出了$n < 5$的扰动行为的数值研究结果。他们发现对于$\mathrm{Re} < 10000$，没有不稳定性。所以现在清楚了，Fox, Lessen和Bhat观察到的不稳定性不是由于无限小扰动的线性不稳定性导致的，圆泊肃叶流对于任意无限小扰动稳定的假设现在看起来还是非常可能的。

（具有不等于零的环向速度分量$V(r)$）转动轴对称流的稳定性问题在很多方面和平行轴对称流的问题类似。一个这种问题已经在2.6节中详细考虑。Pedley (1967)和Michalke, Timme (1967)研究了这个问题的两个其他特殊情形。[具有速度$U(y, z) = (r, \varphi)$ 的]平行于x轴但依赖于两个变量的一般平行流动的稳定性理论由Hocking (1968)开始。

2.9 有限扰动的稳定性；扰动的增长和向湍流的转捩

在许多情况下，上面讨论的小扰动理论允许从理论上确定层流失稳的条件。这些结果可以解释一些和湍流转捩有关的重要事实。然而，非常清楚的是，失稳本身并不构成转捩，2.5节到2.8节讨论的线性理论最多只是

描述了湍流转捩最开始的过程，但不能给出这个过程的完整图像。此外，对于某些重要的流动，例如，两个平面之间的库埃特流或者管中的泊肃叶流，原则上小扰动理论不能帮助我们理解实验中观察到的湍流转捩，因为这些流动对于所有无限小扰动明显是稳定的。另一方面，例如，在两个平板之间的泊肃叶流（接近平面渠中的真实流动）的情形，尽管表明可能失稳，但稳定性理论表明$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$比转捩发生时大得多。Davies, White (1928)的数据表明平面泊肃叶流的转捩实际上发生在$\mathrm{Re} = UH_1/\nu \approx 1000$，而根据线性理论，$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}} \approx 6000$。最后，转动圆柱之间流动或从下面加热的静止状态流体失稳后产生的运动，和边界层流动的平面泊肃叶流之间的根本区别不能从线性扰动理论的观点来解释。所有这些事实都要求我们重视建立一个更完整的湍流起始的非线性理论。目前，这还处于发展的初级阶段。

有限扰动的能量平衡

研究受到有限幅度扰动的流动的稳定性最简单的方法和源自O. Reynolds (1894)的“能量方法”的使用有关[故这比小扰动理论古老]。这个方法的实质在于确定给定流动中扰动的能量平衡，以确定扰动能量随时间增长（或减少）的条件。

令$U_i(\boldsymbol{x},t)$和$P(\boldsymbol{x},t)$为未扰动流的速度和压强，$\boldsymbol{u}_i'(\boldsymbol{x},t)$ 和$p'(\boldsymbol{x},t)$是扰动的速度和压强。在此情形，两个场$u_i = U_i + u_i'$和U_i都必须满足纳维-斯托克斯方程（1.6）和连续性方程（1.5）[和往常一样，假设流体是不可压缩的]。将u_i和U_i的方程相减，我们得到下面的扰动速度$\boldsymbol{u}' = (u_1', u_2', u_3')$的方程：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i'}{\partial t} + U_\alpha \frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha} + u_\alpha' \frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha} + u_\alpha' \frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 u_i' \\ \frac{\partial u_\alpha'}{\partial x_\alpha} &= 0 \end{aligned} \tag{2.32}$$

（这些方程和方程组（2.7）的不同仅在于在第一个中存在一个$\boldsymbol{u}'$的非线性项，这在线性理论中是被忽略的）。然后，方程组（2.32）第一个方程乘以$u_i'/2$，对i求和然后将结果对整个流动区域积分，我们得到能量平衡方程，这确定了扰动总能量随时间的变化。特别地，如果流动发生在以刚性壁（移动或不移动，在壁上$u_i' \equiv 0$）为边界的有限体积中，扰动能量平衡方程可以写为这种形式

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\int \sum_i u_i'^2 \mathrm{d}V\right) = -\int u_i' u_\alpha' \frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha}\mathrm{d}V - \nu \int \sum_{i,j}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2 \mathrm{d}V, \tag{2.33}$$

其中dV是体积元[O. Reynolds (1894)和Orr (1906-1907)实际上使用了这个形式]。同样的结果对于很多无界流也是对的，例如，如果扰动对所有相对

无界流的坐标是周期性的，那么这是对的[在此情形，方程（2.33）沿轴的积分必须只积分一个扰动周期]。

方程（2.33）右边第一项描述了未扰动流和扰动流之间的能量交换，通常是正的（能量通常从未扰动流传输到扰动）。然而，右边第二项描述了黏滞导致的能量耗散，总是负的。方程（2.33）右边两项的相对值将确定扰动能量减少还是增加。

现在如果我们把方程（2.33）变换为无量纲量，用特征长度L度量距离，用特征速度U度量速度，用L/U度量时间，右边第二项中的有量纲系数ν变换为无量纲系数1/Re。所以，显然如果雷诺数足够小，右边负的第二项会超过正的第一项，任何扰动的能量都会衰减，即流动对任意幅度的扰动都是稳定的。从方程（2.33）开始，我们可以得到$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\ min}}$（它限定了“足够小的”雷诺数的范围，在这个范围内任意扰动的能量只能减小）以下的某个估计。所以，例如，Serrin (1959)证明了对于直径D的任意有界区域内的任意无散度矢量场对$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})$和$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$（$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})$在区域的边界上为零），不等式

$$\begin{aligned} -\int u_i' u_\alpha' \frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha} \mathrm{d}V &\leq \tfrac{\nu}{2} \int \sum_{i,j} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)^2 \mathrm{d}V + \frac{U_{\max}^2}{2\nu} \int \boldsymbol{u}' \mathrm{d}V \\ \int \sum_{i,j} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right)^2 \mathrm{d}V &\geq \tfrac{3\pi^2}{D^2} \int \boldsymbol{u}'^2 \mathrm{d}V \end{aligned} \tag{2.34}$$

成立，其中$U_{\max}$是场$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$模的最大值。把这些方程带入方程（2.33），我们发现在直径D的区域中的流动中，扰动能量$E(t)$显然满足不等式

$$E(t) \leq E(0) e^{\left(\frac{U_{\max}^2}{\nu} - \frac{3\pi^2 \nu}{D^2} \right) t}$$

使得

$$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\ min}} = \left(\frac{U_{\max} D}{\nu} \right)_{\mathrm{cr\ min}} \geq \sqrt{3}\pi \approx 5.44.$$

Serrin得到了场$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})$和$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$类似的不等式，对应于最大直径$D$的任意截面的直管或最大宽度$D$的渠中的流动。在第一种情况下只需要把方程（2.34）的第二个方程中的常数$3\pi^2$替换为$2\pi^2$，第二种情况替换为π^2。Serrin类似地证明了对于（任意截面的）直管中的流动，$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\ min}} \geq \sqrt{2}\pi \approx 4.43$，对于平面渠中的流动，$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\ min}} \geq \pi \approx 3.14$。后来，Velte(1962)改进了（2.34）第二个方程类型的方程的常数系数，证明了对于直径D的有界区域，$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\ min}} \geq \sqrt{6}\pi \approx 7.7$，对于直径$D$的直管，$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\ min}} \geq \sqrt{4.7}\pi \approx 6.8$，对于宽度为$D$的渠，$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\ min}} \geq \sqrt{3.7}\pi \approx 6.0$。同时，Velte展示了他的数

值计算值非常接近在方程（2.34）类型的一般不等式帮助下，对于所考虑类型的非常一般的区域所能得到的最大值。再后来，Sorger (1966)考虑了更特殊的流动区域（例如球或圆的内部或者量纲同心球或圆之间的区域），对于这些区域发现了不等式中系数的精确值，因而进一步改进了之前对于更广泛类型的稳定性问题得到的稳定性限制。Sorger的结果有一些和Serrin (1959)之前的发现相同，对半径R_1 和R_2的同心圆柱之间的环中的场$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})$和$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$也可以得到同样类型的不等式。使用这些不等式，Serrin得到了下面的圆柱之间库埃特流的任意扰动的稳定性的充分条件：

$$\frac{|\Omega_2 - \Omega_1|}{\nu} < (R_2^2 - R_1^2)\left[\frac{\pi}{R_1 R_2 \ln(R_2/R_1)}\right]^2 \tag{2.35}$$

图22显示了对于Taylor进行实验研究的情形（$R_1 = 3.55, R_2 = 4.03$），(Ω_1, Ω_2)平面上由方程（2.35）描述的区域，以及相应流动对于无穷小扰动的不稳定区域（从图13a转换而来）。

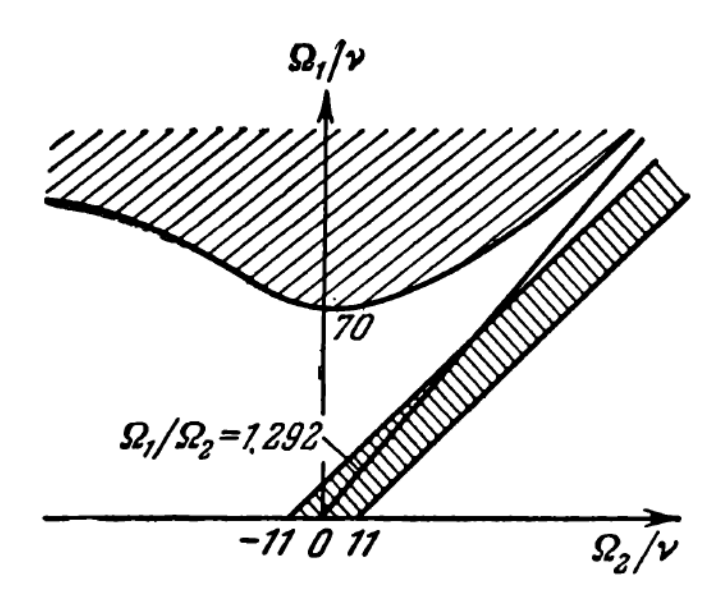


图 22 对于泰勒研究的圆柱之间的库埃特流，对无限小扰动的不稳定区和对任意有限扰动的稳定区的位置。上面的阴影区域对应于对无限小扰动不稳定，而对应于阴影带的点的流动对任何有限扰动都确实稳定。这幅图中连续的先使无黏流体情形不稳定区域的边界（参见图13a）。

上面提到的Serrin、Velte和其他人的结果是以相当简单的方式得到的，并且非常具有一般性，但它们给出$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\ min}}$ 非常粗略的估计，比实验数据低了几个量级（我们回想一下，例如，对于直管，$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\ min}}$的实验值接近2000）。Serrin发现的圆库埃特流稳定性的充分条件后来被Sorger

(1967)用更严格的不等式加强了。如果不使用（2.34）类型的一般（但粗糙）的不等式，而是得到使主流动的能量注入和黏滞作用导致的能量耗散的比值最大的扰动$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})$，可以得到更好的结果。例如，让我们考虑平面$z=0$和$z=H$之间速度$U=U(z)$ 平行于x轴的平面平行流，为了简单，取扰动$\boldsymbol{u}'$也是二维的：$\boldsymbol{u}'=[u'(x,z,t),w'(x,z,t)]$。用$H$度量距离，用$U_{\max}=\max U(z)$度量速度，用$H/U_{\max}$度量时间，我们可以把一般的能量平衡方程（2.33）重新为这种形式

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\int\frac{u'^2+w'^2}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\\ &= -\int\int u'w'\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}x\mathrm{d}z-\frac{1}{\mathrm{Re}}\int\int\left(\frac{\partial u'}{\partial z}-\frac{\partial w'}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z, \qquad (2.33')\\ \mathrm{Re} &= U_{\max}H/\nu.\end{aligned}$$

由连续性方程[方程（2.32）第二个方程]，我们现在可以引入流函数ψ，使得$u'=-\partial\psi/\partial z$，$w'=\partial\psi/\partial x$。那么不稳定性条件$\mathrm{d}E/\mathrm{d}t\geq 0$可以写为

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\leq\frac{\displaystyle\int\int\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}x\mathrm{d}z}{\displaystyle\int\int(\Delta\psi)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z}=F[\psi]. \qquad (2.36)$$

泛函$F[\psi]$在所有可能的满足给定边界条件的ψ的集合上的最大值在此情形也具有$1/\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\ min}}$的意义（因为对于小于这个最大值倒数的雷诺数，扰动能量一定会减小，当然仅对二维扰动）。可以预期，以这种方式得到的$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\ min}}$值比从一般不等式（2.34）（没有考虑特殊形式的主流动）得到的更大。然而，很明显，它们肯定会大大低于$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\ min}}$的真实值，因为使用这个方法，我们仅考虑了一个时刻的扰动速度场（和导数dE/dt），没有考虑这个场和未扰动流动速度场的和的时间演化必须满足流体动力学方程组。实际上，Lorentz (1907)、Orr (1906-1907)、Hamel (1911)、von Kármán (1924)和其他人尝试用能量方法，对某些特殊函数ψ得到了$F[\psi]$值（得到这个泛函相对大的值），或通过求解相应的变分问题（通常仅对一些特殊的扰动）确定了不稳定性判据，这些结构都得到小的$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\ min}}$值（比实际观测到的$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\ min}}$小了大约一个量级）。Petrov (1938)分析这个事实得出结论，考虑到所有函数的时间变化，$F[\psi]$取最大值的ψ显然在任何情况下都不会产生动力学上可能的运动。所以能量方法永远给不出$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\ min}}$ 的精确值，只适合对这个值进行初步的非常粗略的估计。

有趣的是注意到类似的方法也可以用于研究热对流问题，并且被证

明是更成功的。Sorokin (1953, 1954)和Joseph (1965，1966)展示了这个事实。

在对流问题中，纳维-斯托克斯方程显然必须由布西涅斯克方程替代（见1.5节）。关于速度成分u_3'布西涅斯克方程右边的额外的项$-g\beta T'$在能量平衡方程（2.33）右边产生了一个额外的项，其形式为

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\int u_i' u_\alpha' \frac{\partial U_i}{\partial x}\mathrm{d}V - g\beta\int u_3' T' \mathrm{d}V - \nu\int\sum_{i,j}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2 \mathrm{d}V. \qquad (2.33'')$$

这个方程中额外的项容易用不等式

$$g\beta\int u_3' T'\mathrm{d}V \leq g\beta\left[\int u_3'\mathrm{d}V\cdot\int T'^2\mathrm{d}V\right]^{1/2} \leq 2g\beta(EH)^{1/2}$$

估计，其中$H=\frac{1}{2}\int T'^2\mathrm{d}V$是温度扰动的强度。$T$的热传导方程和流动边界上的条件$T=$ 常量.（以及无界流的周期性条件）表明强度H的平衡方程为

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\int T' u_i' \frac{\partial T}{\partial x_i}\mathrm{d}V - \chi\int\sum_i\left(\frac{\partial T'}{\partial x_i}\right)^2\mathrm{d}V. \qquad (2.33''')$$

显然，$-\int T' u_i' \frac{\partial T}{\partial x_i} dV \leq 2\gamma(EH)^{1/2}$，其中$\gamma=(\nabla T)_{\max}$是未扰动温度梯度的最大值。此外，如果在流动边界上$T'=0$，那么可以证明下面类似于方程（2.34）第二个不等式的式子：

$$\int\sum_i\left(\frac{\partial T'}{\partial x_i}\right)^2\mathrm{d}V \geq \frac{\alpha\pi^2}{D^2}\int T'^2\mathrm{d}V = \frac{2\alpha\pi^2}{D^2}H. \qquad (2.34')$$

这里，对于直径D的有界流区域，$\alpha=3$，对于宽度D的渠流，$\alpha=1$（在后一种情形，扰动必须考虑为对于平行于渠壁的平面是空间周期性的，并且所有积分只对一个周期进行）。使用方程（2.34）和上面提到的其他所有不等式，不难从两个平衡方程（2.33″）和（2.33‴）得出下面的一般结果：

$$\sqrt{E(t)} + \lambda\sqrt{\frac{g\beta\nu}{\gamma\chi}H(t)} \leq \left[E(0)+\lambda\sqrt{\frac{g\beta\nu}{\gamma\chi}H(0)}\right]\exp[-\xi(\lambda\alpha\pi^2-\sqrt{\mathrm{Ra}})t],$$

其中$\mathrm{Re}=U_{\max}D/\nu$，$\mathrm{Ra}=g\beta\gamma D^4/\nu\chi$，假设$\lambda^2=(\delta-\mathrm{Re}^2)/2\alpha\pi^2$为正，$\delta/D^2$是（2.34）第二个不等式右边积分之前系数的最佳值，在$\lambda^2\nu/\chi\leq 1$时，$\xi=\lambda\nu/D^2$，在$\lambda^2\nu/\chi\geq 1$时，$\xi=\chi/\lambda D^2$[参见Joseph (1965)]。由这个结果得

到，对流运动对任意速度和/或温度扰动普遍稳定，如果

$$0 \le \mathrm{Ra} \le \frac{\pi^2(\delta - \mathrm{Re}^2)}{2}.$$

对于没有运动的水平流体层的特殊（$\alpha = 1$, $\delta \approx 3.7\pi^2$, $\mathrm{Re} = 0$）情形，我们得到$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr\ min}} > 1.85\pi^4 \approx 180$。这个结果容易改进。实际上方程（2.34）的第一个不等式在其左边等于零时对无运动流体情形明显是不令人满意的。如果我们简单地忽略方程（2.33'）右边第一项并重复所有这些论证，那么我们得到两倍好的估计：$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr\ min}} > 360$（和线性理论得到的值$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}} \approx 1708$比较）。如果使用方程（2.33'）右边第一项的不同估计[对于静止流体得到零]，也可以在对$(\mathrm{Ra}, \mathrm{Re})$平面上的一般稳定区的边界的估计和Re数的另一个定义[见Joseph (1965, 1966)] 中得到类似的改进。

关于对流稳定性极限的上述结果与Serrin-Velte-Sorger的非对流的结果类似：它们不依赖于流动几何或者主速度和温度场的分布的任何特定细节。使用基本流动的所有可用信息，可以得到强得多的结果。鉴于此，Joseph提出首先固定正的参数$\mu = \mathrm{Re}/(\mathrm{Ra})^{1/2}$和另一个正的参数$\lambda$，然后寻找与条件$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\gamma E(t) + \lambda g\beta H(t)] < 0$相容的Re的最大值，作为主流动的特定变分问题的解。如果$\mathrm{Ra} = \mathrm{Ra}(\lambda, \mu)$时这个问题的解，那么我们容易得到对于固定$\mu$，$\mathrm{Ra}(\lambda, \mu)$沿$\lambda$最大值[即$\mathrm{Ra} = \max\ \mathrm{Ra}(\lambda, \mu)$]。于是$(\mathrm{Ra}, \mathrm{Re})$平面上的点$(\mathrm{Ra}_\mu, \mu\sqrt{\mathrm{Ra}})$属于稳定区域的最佳边界。

对于无运动流体纯对流的特殊情形，Sorokin (1953, 1954)发展了简单得到的同样的方法，得到了惊人的强结果。为了简单，让我们仅考虑宽度D的以刚性平面为界的水平流体层的情形。容易看出，导数$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\gamma E(t) + \lambda g\beta H(t)]$在$\lambda = 1$时取最小值。所以我们必须考虑只考虑这个$\lambda$值。在引入温度量纲的新变量$v_i = u_i'(\gamma\nu/g\beta\chi)^{1/2} = u_i'[(T_1 - T_0)\nu/Dg\beta\chi]^{1/2}$和无量纲坐标$y_i = x_i/D$后，条件

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\gamma E(t) + g\beta H(t)] \le 0$$

有这种形式

$$(\mathrm{Ra})^{1/2}\int v_3 T' \mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int \left[\sum_{i,j}\left(\frac{\partial v_i}{\partial y_i}\right)^2 + \sum_i \left(\frac{\partial T'}{\partial y_i}\right)^2\right]\mathrm{d}V \ge 0.$$

所以和这个不等式相容的Ra的最佳值，即下面变分问题的解的$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr\ min}}$

值：

$$-\int v_3 T' \mathrm{d}V = \frac{1}{2(\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr\ min}})^{1/2}} = \mathrm{Max}$$

其中最大值时在函数类$\boldsymbol{v}(y,t)$、$T'(y,t)$上取得的，满足在$y_3 = 0$或1，$\boldsymbol{v} = T' = 0$，$\mathrm{div}\ \boldsymbol{v} = 0$，

$$\int \left[\sum_{i,j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} \right)^2 + \sum_i \left(\frac{\partial T'}{\partial y_i} \right)^2 \right] \mathrm{d}V = 1.$$

使用变分法的一般技术，我们可以把这个问题归结为确定偏微分方程组的一个特定本征值问题的最小本征值。不难验证，这个本征值问题和从下面加热的无运动流体层中的中性稳定扰动（即，满足稳定性交换原理的扰动）情形的线性稳定性理论的本征值问题一致。Sorrokin (1953)证明了这个事实，他同时给出了热对流问题中稳定性交换原理正确性的一个非常简单的证明（以及更强的结果，所有对应于从下面加热的无运动流体中的小扰动理论的本征值问题特征频率ω_i都是纯虚数）。后来Joseph (1965)发现了同样的事实。位置的最小本征值$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr\ min}}$代替了边界值问题中线性扰动理论的参数Ra。因此，借助能量方法所能得到的最佳估计和与存在无限小中性稳定扰动相容的Ra的最小值（即$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr\ min}} = \mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}} \approx 1708$）一致（因为Ra不会比$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$大）。我们看到，纯对流情形的能量方法给出了$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr\ min}}$的精确值，同时它证明了，在布西涅斯克的对流近似理论的框架内，从下面加热的流体层在所有小于线性扰动理论给出的瑞利数，对任意周期性扰动（不仅是无限小扰动）稳定。

对于更一般边界条件和其他流动区域的纯对流问题，Sorokin和Joseph给出了更一般的结果。在所有情形中，$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\ min}}$都和线性扰动理论给出的值吻合。特别地，在小于$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$的Ra，不存在任何幅度的稳定扰动，所以静止状态是亚临界瑞利数下布西涅斯克方程唯一的稳态解。Ukhovskiy, Yudovich (1963)、Howard (1963)、Sani (1964)和Platzman (1965)用各种方法证明了这个特殊结果。Joseph (1966)也详细研究了从下面加热的平面库埃特流的情形。他发现在此情形，能量方法的变分技术给出了这种形式的稳定区：$(\mathrm{Re})^2 + \mathrm{Ra} < 1708$。值得注意，对于纯对流（当$\mathrm{Re} = 0$），对应的估计（$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr\ min}} \approx 1708$）是严格的，而对于纯动力学问题（当$\mathrm{Ra} = 0$），这个估计（$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\ min}} > 41$）很糟糕。能量方法对热对流问题的应用的其他例子（对应于存在内热源的流动）可以在Joseph, Shir (1966)、Joseph, Carmi (1966)和Joseph, Goldstein, Graham (1968)中找到。

在动力学问题中，我们看到能量方法得到$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$的非常粗略的估计。这可以由这个事实解释，这里只使用了非常不完整的动力学方程，因为完全基于与单个瞬间有关的等式（和不等式）。实质上更有前景（但也更困难）的方法是借助完整的流体力学方程，在很长一段时间后追踪有限扰动随时间的变化。

与这种方法相关的第一个问题涉及前面几节描述的线性理论和有限扰动的严格非线性理论之间的相互关系。换言之，这个问题涉及到线性化流体力学方程的解的稳定性（或不稳定性）在多大程度上也意味着相应的完整非线性方程组的解的稳定性（或不稳定性）。

在回答这个问题之前有必要严格定义什么时候非线性系统可以称为稳定的。这样的定义已经在十九世纪末由Lyapunov给出了。为了表述它，首先必须选择函数空间中的某种“范数（norm）”，使得可以测量函数的大小（举例来说，这样的范数可以是函数的最大值，或者其平方的积分，或者在矢量函数$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$的情形，$\boldsymbol{u}^2(\boldsymbol{x})+[\nabla\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})]^2$ 的积分的空间平均值）。这样，非线性方程的一个解被称为*李雅普诺夫稳定的*（stable according to Lyapunov），如果初始时刻$t=0$这个解的扰动小可以得到这个扰动对所有$t>0$都小。确切地说，如果对于任意小的$\epsilon>0$，可以找到一个$\delta=\delta(\epsilon)$使得对于一个范数比δ小的“初始扰动”（即，与$t=0$ 所研究的解的初始条件的差异），两个相应的解的差（“扰动”）的范数对于所有$t>0$ 都不超过ϵ，那么这个解被称为*稳定的*。

这个定义和我们在线性理论中使用的不同，那里我们基本上使用了本征值ω_j的谱，对于稳定性，我们要求对于所有j，$\mathrm{Im}\ \omega_j\le 0$。然而，通常在线性理论导致不稳定的情况下，Lyapunov的不稳定性条件也不满足。实际上，如果初始扰动选择得很小，那么它显然可以用线性化方程很好地描述。因为这个原因，如果$\mathrm{Im}\ \omega_j>0$，那么至少对于一个j，初始扰动可以选为对于小的t其增长正比于$\exp[\omega_j' t]$，其中$\omega_j'=\mathrm{Im}\ \omega_j>0$。然后，随着扰动变得相对较大，线性近似不再适用，非线性项的影响通常首先导致扰动开始增长得比线性理论得到的慢，然后甚至停止增长，也就是说，它仍然是有界的（我们将在下面遇到这种行为的例子）。然而，重要的是注意到，如果我们进一步减小初始扰动的幅度（保持相同的形式），我们只能得到一个较长的时间间隔，在这个时间间隔内，线性理论是流动的合适的描述，扰动随后的命运是相同的。因此，达到的最大值不比第一种情况小。这意味着非线性方程（或方程组）的解是Lyapunov不稳定的。

显然，在很宽的条件下，逆命题成立——由线性化方程的稳定性得出完整非线性方程组在Lyapunov的意义下是稳定的。运动方程的线性化可以用于稳定性研究的假设正是具有这种意义（即具有正的虚部的线性化方程的本征值的缺失与完整的非线性方程的解在Lyapunov 意义下的稳定性之间存在一一对应关系）。在稳定性理论中，对这个假设总是不加怀疑[例如，见Lin (1955)]，但一般来说，它一点也不容易严格证明。进一步，让我们注意到，如果这个假设是真的，那么线性近似给出了给定流体流动是否允许软激发的自激振荡这个问题的完整答案。显然硬激发振荡的研究总是要求适用完整的非线性方程组。

然而，在一些特殊情形，非线性流体力学方程（相应的线性化系统是稳定的）的解（在Lyapunov意义下）稳定性的存在可以比较简单和优雅地证明。阿诺尔德(1965a, 1966a,b)对称作了实质性的澄清。让我们研究他研究过的最简单的例子——刚性壁之间的二维渠中的无黏不可压缩流体平面平行流动，并且让我们遵循阿诺尔德，限制于考虑这个流动的二维扰动。为了简单，我们将用特征长度L_0 度量所有长度，用特征速度U_0度量所有速度，于是所有的量都可以考虑为无量纲的（这意味着我们可以取它们的任意数值函数，可以将任意两个量相加）。令$U(z)=-\frac{\partial\Psi(z)}{\partial z}$为主流动的无量纲速度分布，

$$\boldsymbol{u}'=\{u'(x,z,t),w'(x,z,t)\}=\left\{-\frac{\partial\psi'}{\partial z},\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right\}$$

为无量纲扰动速度（故而Ψ是基本流动的流函数，ψ'是扰动的流函数，$\Delta\Psi=\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}z^2}$，$\Delta\psi'=\frac{\partial w'}{\partial x}-\frac{\partial u'}{\partial z}$分别是主流动的涡度和扰动的涡度）。这里运动方程简化为一个涡度$\Delta\psi=\Delta(\Psi+\psi')$守恒方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi-\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial z}=0. \tag{2.37}$$

我们考虑坐标x的周期性扰动，这样做并不丢失一般性，因为结果不依赖于周期的长度，可以取为任意大。由方程（2.37）马上得到流动的总能量$E=\frac{1}{2}\int\int(\nabla\psi)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z$（对$\mathrm{d}x$的积分可以方便地取为一个周期）对时间守恒（让我们回想一下我们在考虑零黏性的情形）。我们也知道在理想流体的流动中，涡度$\Delta\psi$是守恒的，所以涡度的任意函数$\Phi(\Delta\psi)$守恒。于是，物理量$J_\Phi=\int\int\Phi(\Delta\psi)\mathrm{d}x\mathrm{d}z$不随时间变化[等式$\frac{\mathrm{d}J_\Phi}{\mathrm{d}t}=0$容易从方程（2.37）得到]。

现在让我们假设速度分布$U(z)=-\frac{\partial\Psi}{\partial z}$没有拐点。于是$U''(z)=-\frac{\mathrm{d}^3\Psi}{\mathrm{d}z^3}\neq 0$对所有$z$成立，故而$\Delta\Psi=\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}z^2}$是$z$的单调函数，$\Delta\Psi$可以替代$z$作为一个新的横向坐标。特别地，由此，流函数$\Psi=\Psi(z)$也可以考虑为$\Delta\psi$ 的函数

$$\Psi=A(\Delta\Psi). \tag{2.38}$$

在讨论不变积分$G=E+J\Phi$时，我们应该证明单个变量$\Phi(s)$的函数可以取为这样的形式，使得流函数$\psi(x,z)$的泛函$G[\psi]$[满足在渠的刚性壁上$\psi=$ 常量.的边界条件]对$\psi(x,z)=\Psi(z)$[即对于所研究的平面平行稳态流]取最小值。这个最小值在这里被理解为具有局部特征－－相对附近流动的最小值，和基本流的差异为小扰动。然而，由此马上可以看出，如果初始扰动$\psi'(x,z,0)$很小，那么在场$\psi(x,z)$的函数空间中，$G[\psi]=G[\Psi(z)+\psi'(x,z,0)]$的"等值线"（level line）拓扑上呈现出围绕极值点$\psi=\Phi(z)$的小椭圆的外观。因为$G[\psi]$是不变泛函，所以对于所有t，$\psi(x,z,t)=\Psi(z)+\psi'(x,z,t)$属于一条给定"等值线"，即扰动$\psi'(x,z,t)$在所有时间都是小的。为了使上述断言更加严格，我们还必须定义如何测量扰动的大小，即我们必须在场$\psi'(x,z)$的函数空间引入一个范数。由这个范数可以方便地得到泛函

$$\begin{aligned}H[\psi'] &= \int\int[(\nabla\psi')^2+(\Delta\psi')^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}z\\ &= \int\int[u'^2+(\nabla\times u')^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}z\end{aligned}$$

的值（这个泛函是适定的，因为我们已经将$\nabla\psi'$和$\Delta x'$无量纲化了）。在此情形，在$G[\psi]$的一阶和二阶变分方程（在下面引入）的帮助下容易证明，存在一个函数Φ，一组坐标x,z和常数$K_1>0,K_2>K_1$和$\epsilon_1>0$使得

$$K_1H[\psi']<G[\Psi+\psi']-G[\Psi]<K_2H[\psi']$$

如果对于选定的Φ和坐标系，$H[\psi']<\epsilon_1$。此外，$G[\psi']$不随时间变化，$H[\psi']$连续变化。所以马上得到，如果对于$t=1$和$\epsilon<\epsilon_1$，$H[\psi']<K_1\epsilon/K_2$，那么对于所有$t>0$也有$H[\psi']<\epsilon$，即非线性方程（2.37）的解$\psi(x,z,t)$在Lyapunov的意义下是稳定的。

让我们开始构建泛函

$$G[\psi]=\int\int\left[\frac{1}{2}(\nabla\psi)^2+\Phi(\Delta\psi)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}z,$$

具有上面提到的性质。首先，让我们求这个泛函在$\psi=\Psi(z)$的变分，即$G[\Psi+\psi']-G[\Psi]$的

领头项。借助变分法的一般规则，我们得到

$$\delta G[\psi]|_{\psi=\Psi} = \int\int[\nabla\Psi\nabla\psi' + \Phi'(\Delta\Psi)\Delta\psi']\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \int\int[\Phi'(\Delta\Psi) - \Psi]\Delta\psi'\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

其中Φ'是函数Φ的导数（而ψ'标记流函数的扰动）。根据方程（2.38），$\delta G = 0$，如果$\Phi'(s) = A(s)$，即$\psi = \Psi(z)$是泛函$G[\psi]$的极值点。类似地，可以计算$\Phi' = A$的泛函$G[\psi]$的二阶变分：

$$\begin{aligned}
\delta^2 G[\psi]|_{\psi=\Psi} &= \int\int[A'(\Delta\Psi)\Delta\psi' - \psi']A\psi'\mathrm{d}x\mathrm{d}z \\
&= \int\int\left[\frac{\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}z}{\mathrm{d}^3\Psi/\mathrm{d}z^3}(\Delta\psi')^2 + (\nabla\psi')^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}z \\
&= \int\int\left[\frac{U(z)}{U''(z)}(\Delta\psi')^2 + (\nabla\psi')^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

其中$A'(s) = dA/ds$和方程（2.38）用于计算$A'(\Delta\Psi)$。然而，速度分布没有拐点的假设表明$U''(z)$ 在所有z 有相同的符号。因为流体力学方程是伽利略不变的，所以我们总是可以变换到一个相对于旧坐标系以恒定速度运动的新坐标系，使得$U(z)$ 对所有z只有一个符号，即和$U''(z)$一样。在这个情形，$U/U'' > 0$，即对于$\psi = \Psi(z)$，$\delta^2 G[\psi] > 0$。这意味这$\psi = \Psi$点真实对应于泛函$G[\psi]$的一个局域极小，这还需要证明。由U/U''上下都有界的事实立刻可以得出联系$G[\Psi + \psi'] - G[\Psi]$和$H[\psi']$的不等式。

我们已经知道，瑞利证明了速度分布没有拐点的无黏流体的平面平行流动在这种意义下是稳定的，线性化系统的本征值ω没有正的虚部。现在我们看到，在此情形，也有可能严格证明，如果我们选择初始扰动足够小，那么在完整的非线性理论中，它在所有$t > 0$也是小的，即有限振荡的软激发是不可能的（在我们对二维扰动的限制范围内的任何情况下）。在阿诺尔德的工作中也证明了，$U(z)$不存在拐点的假设可以换成其他更弱的条件，用这些条件可以证明很多具有（没有拐点的）分布$U(z)$ 的平面平行流动在Lyapunov意义下稳定，其线性化方程组的稳定性已经由Tollmien (1935)证明[当然，也仅限于二维扰动]。进一步，同样的方法被证明适用于很多具有曲线流线的无黏不可压缩流体二维流动稳定性的证明（不使用线性化方程）。Lyapunov意义下稳定性的一个类似证明被证明适用于理想（甚至黏性）流体在球面上的分区流动[参见Dikiy (1965b)]。然而，对于这种流动（以及三维流动）的三维扰动，这里给出的论证被证明是不够的。它只能得到少数部分结果，没有解决非线性流体力学方程解在Lyapunov意义下稳定性的最终问题[参见Arnold (1965b)、Dikiy (1965a)]。

Yudovich (1965a)给出了非常不同的方法，证明了容许用线性化来研究黏性不可压缩流体运动方程定常解稳定性的一般定理（即，证明在复ω平面上半平面的奥尔- 索末非方程本征值存在性和非线性纳维-斯托克斯方程组的解在Lyapunov意义下的稳定性的一一对应）。然而，在这个工作中引入了复杂得多的速度场空间中的范数，并且使用了复杂的数学技术。于是，结果的陈述和它们的证明都显地相当笨拙和相对缺乏启发性。

朗道的理论

对流体力学稳定性研究中线性化的容许性的研究，对于严格论证高度发展的线性稳定性理论非常重要。然而，这不是非线性稳定性理论的主要用途。当然，更吸引人的是希望借助完整的非线性动力学方程组得到关于

各种流体流动中有限扰动行为的新的基本物理结果。雷诺数[21]小于线性稳定性理论定义的临界值$\mathrm{Re_{cr}} = \mathrm{Re_{cr\ max}}$ 的流动中扰动的研究（确定给定幅度的有限扰动的临界雷诺数）和$\mathrm{Re} > \mathrm{Re_{cr}}$ 的扰动的研究（研究根据线性理论指数增长的弱扰动的进一步演化），都是有趣的。然而，目前，这两种情形都只有少数孤立的结果，它们绝大多数只和稍微不同于$\mathrm{Re_{cr}}$的雷诺数有关[对于Re 的允许值的范围的更精确的估计，见例如Stuart (1960)]。

关于Re接近$\mathrm{Re_{cr}}$的有限扰动行为不依赖于流体动力学方程实际形式的最一般结果是Landau (1944)给出的[也参见Landau, Lifshitz (1963)第27节]。让我们假设$\mathrm{Re} > \mathrm{Re_{cr}}$，但$\mathrm{Re} - \mathrm{Re_{cr}}$很小。因为当$\mathrm{Re} = \mathrm{Re_{cr}}$，首先出现一个“频率”$\omega$（虚部为零的）的扰动，对于小的正$\mathrm{Re} - \mathrm{Re_{cr}}$，存在一个速度场形式为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = A(t) f(\boldsymbol{x}) \tag{2.39}$$

的无限小扰动，其中$A(t) = e^{-i\omega t} = e^{\gamma t - i\omega_1 t}$，$\gamma = \mathrm{Im}\ \omega > 0$，当$\mathrm{Re} \to \mathrm{Re_{cr}}$，$\gamma \to 0$（对于足够小的$\mathrm{Re} - \mathrm{Re_{cr}}$，$\gamma \ll |\omega_1|$）并且$f(\boldsymbol{x})$ 是相应本征值问题的本征函数。所以明显$A(t)$满足方程

$$\frac{\mathrm{d}|A|^2}{\mathrm{d}t} = 2\gamma |A|^2. \tag{2.40}$$

然而，方程（2.40）仅在线性扰动理论的框架内成立。当$A(t)$增大，不可避免地到达一个理论不再正确的时刻，必须替换为更完整的考虑动力学方程中扰动的非线性项。于是方程（2.40）右边以考虑为$\frac{\mathrm{d}|A|^2}{\mathrm{d}t}$以$A$和$A^*$ （星号表示复共轭）展开的第一项。在随后的近似中（适用于较大的t），还需要考虑级数的下一阶项——三阶项。然而，必须考虑运动（2.39）伴随着快速（和振幅增长典型时标$1/\gamma$相当）周期性振荡，由$A(t)$表达式中的$e^{-i\omega_1 t}$因子描述。我们对这些周期性振荡不感兴趣，所以排除它们，将表达式$d|A|^2/dt$对一段和$2\pi/\omega_1$相比为大（但和$1/\gamma$相比为小）的时间平均是方便的。因为A和A^*的三阶项显然都含有周期因子，它们在平均中消失。对于四阶项，在平均后仅剩下一个正比于$|A|^4$的项。所以，保留不高于四阶的项，我们得到这种形式的方程

$$\frac{\mathrm{d}|A|^2}{\mathrm{d}t} = 2\gamma |A|^2 - \delta |A|^4 \tag{2.41}$$

（因为平均的时长远小于$1/\gamma$，$|A|^2$和$|A|^4$实际上不随平均变换，所以方程（2.41）可以认为是平均扰动幅度的严格的方程）。系数δ的符号不能忽

[21]为了简单，我们仅谈论雷诺数，尽管在某些情形，不稳定性的起始由一些其他同类型无量纲参数的临界值的转变决定。

略。一般来说，必须预期它可能是正的或负的（也可以为零，但仅在非常少见的情形）。

方程（2.41）的一般解可以写为这种形式

$$|A(t)|^2 = \frac{Ce^{2\gamma t}}{1 + \frac{\delta}{2\gamma}Ce^{2\gamma t}}, \tag{2.42}$$

其中C是积分的未定常数。由方程（2.42）得到，如果$\delta > 0$且$|A(0)|^2 = \frac{C}{1+C\delta/2\gamma}$足够小，那么振幅$A(t)$会首先指数增长（和线性理论一致），然后增长速率变慢，随着$t \to \infty$，振幅趋向一个不依赖于$A(0)$的有限值$A(\infty) = (2\gamma/\delta)^{1/2}$。我们现在注意到$\gamma$是雷诺数的函数，在$\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$的时候变为零，可以展开为$\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$的幂级数（后一个事实可以从小扰动理论推导），对于$\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$，$\delta \neq 0$。所以$\gamma \sim (\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}})$，并且对于小的$\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$，$A(\infty) = |A|_{\max} \sim (\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}})^{1/2}$。

然而，如果$\delta < 0$，方程（2.41）的解（2.42）在$t = [\ln(2\gamma/C|\delta|)]/2\gamma$形式上会变为无穷大。因此，在相当早的时候，它就已经获得了那么大的值，因此不能使用方程（2.41），这个方程是仅保留$d|A|^2/dt$对$|A|^2$展开的前两项得到的。在这种情况下，最终的幅度$A(\infty)$ 由$|A|^2$的更高次幂的系数确定，在$\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$时不为零。所以无论$\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$多么小，$A(\infty)$都将是有限的并且大致是常量。在此情形，方程（2.41）显然不适用于$\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$的过程的分析，但它可以用于研究$\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$的有限扰动的行为。实际上，对于$\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$，系数$\gamma$是负的，即（2.39）形式的小扰动会衰减。因为方程（2.41）右边第二项[等于$-\delta|A|^4$]对于$\delta < 0$为正，所以，对于足够大的$|A|^2$，导数$d|A|^2/dt$（对特别选定的时间段平均）会变成正的，即对于$\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$运动对于有限扰动也会变成不稳定的。对于不太大的可以使用方程（2.41）的振幅，如果$|A| > (2|\gamma|/|\delta|)^{1/2}$，振幅$|A|$会增长。考虑到$|\gamma| \sim (\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}} - \mathrm{Re})$，我们发现对于给定振幅$|A|$的扰动，流动对于$\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{A\mathrm{cr}} = \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}} - \alpha|A|^2$是不稳定的，其中$\alpha > 0$。所以，在此情形$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\ min}}$小于线性理论给出的$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$值。然而，$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\ min}}$的严格演化不能在近似方程（2.41）的基础上得出，这个方程只适用于小$|A|$，因为这个演化需要对任意大的$|A|$定义$\mathrm{Re}_{A\ \mathrm{cr}}$。

现在让我们回到$\delta > 0$，$\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$的情形。这里对于比$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$稍大的$\mathrm{Re}$，扰动（2.39）的增长可以描述为一个基本振子的软自激，最终导致建立稳态的正比$(\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}})^{1/2}$于小（但有限）振幅周期振荡。这里一个基本特征是，方程（2.41）仅定义了这些振荡的幅度，然而，相位没有被外部条件唯一确定，而是依赖于扰动的随机初始相位，即它实际上可以是任意的。所以这样的振子最终的稳态振荡情形的特征是存在一个自由度（和唯一由边

界条件确定故而根本没有任何自由度的稳态层流的情形不同）。

随着Re进一步增大，这个最终的周期性运动自己可能变得对小扰动$\boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x},t)$不稳定。速度场为$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x},t)$ 的流动[其中$\boldsymbol{u}$是扰动（2.39）的最终值，也依赖于$\mathrm{Re}-\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$]的不稳定性原则上可以借助通常的扰动方法进行研究。为了这个目的，只需要研究$\boldsymbol{u_2}=e^{-i\omega t}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$形式的扰动的线性方程的特解[其中$\boldsymbol{f}$是$t$的周期为$2\pi/\omega_1$的周期函数] 并确定频率$\omega=\omega_2$，随着Re增大，首先会出现（对于$\mathrm{Re}=\mathrm{Re}_{2\ \mathrm{cr}}$）一个正的虚部。于是我们可以预期对于比$\mathrm{Re}_{2\ \mathrm{cr}}$大的Re，这个频率的振荡会增大到某个有限大的极限。所以，随着$t\to\infty$发生两个频率$2\pi/\omega_1$和$2\pi/\omega_2$的准周期振荡现在有两个自由度（振荡的相位）。随着Re进一步增大，一系列新的振子随后被激发（即，导致振荡状态）。人们自然会认为，相应的“临界”雷诺数之间的间隔将不断减小，出现的振荡频率将越来越高，尺度越来越小。结果，对于足够大的Re，运动会有非常多的自由度，变得非常复杂和无序。这种运动对应于相轨道的“极限环”，其中流动的某些广义坐标假设为固定值，只有对应于相应振子的相位的坐标随时间变换（根据$\varphi(t)=\omega t+\alpha$形式的方程）。

描述“极限环”的轨迹占据相空间的一个区域，对应于振子振荡初始相位的所有可能集合，在过程中几乎通过这个区域的所有点。事实上，在时刻$t_n=2\pi n/\omega_1, n=0,1,2,...$，相位$\varphi_1(t)=\omega_1 t+\alpha_1$取值$\alpha_1$，任何其他振荡的相位$\varphi_2(t)$取值$2\pi n\omega_2/\omega_1+\alpha_2, n=0,1,2,...$。因为单个频率$\omega_1$和$\omega_2$通常是不可通约的（除了最不可能的非常特殊的情形），后者包含的值在约化到区间$[0,2\pi]$后，将与此区间中任意预先指定的数尽可能接近。所以这个情形中出现的充分发展的湍流运动拥有确定的“各态历经性”，揭示这样一个事实：随着时间推移，流体将通过尽可能接近任何可能的运动状态的状态。

这些一般性考虑是朗道湍流起始理论的本质。它们很明显，而且在物理上令人信服，但不严格，不能被认为是完备的。实际上，方程（2.41）基于这个假设，在小的正$\mathrm{Re}-\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$值，仅有一个不稳定扰动被激发，尽管在$\mathrm{Re}>\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$会存在很多这种扰动并且它们之间的相互作用可能是相当重要的（见，例如Eckhaus (1965)，那里有关于朗道的非线性不稳定性方法的完整讨论）。也有数据表明，在某些参数的临界值，不仅$\gamma=0$而且$\delta=0$（因而$|A|^2$ 方程的$|A|^6$阶项起到了重要作用，见，例如Ponomarenko (1965)），例外情形无法从流体力学不稳定性分析中消除。然而，朗道理论最重要的缺陷是，到目前位置，它没有在一个具体情形中的直接计算中被验证，它描述的湍流转捩的机制肯定不是普适的。所以，例如，在平面库埃特流或没有非轴对称扰动的圆泊肃叶流的情形，线性稳定性理论定义的雷诺

数$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}} = \mathrm{Re}_{\mathrm{cr\ max}}$显然等于无穷大（即方程（2.40）是无意义的）。因此，湍流运动必然是有限扰动的不稳定性造成的，而或许从一开始，湍流运动就具有非常大量的自由度。[22]

在边界层湍流转捩情形，有可能这个事实起了主要作用，在某个雷诺数出现的不稳定扰动会被向下游携带到一个更高雷诺数的区域。在任何情况下，边界层中转捩的数据（我们下面将要讨论）也不符合上面的考虑。这里所描述的湍流形成机制更能让人想起流过有限大刚体的流动中湍流尾迹的产生（见上面的2.2节）。显然，如果我们假设对于流过一个物体的流动，$\delta < 0$并且不同阶不稳定性的临界雷诺数互相差不多大，那么这个过程的数据可以在朗道理论的基础上解释。不幸的是，计算流过一个有限大物体的流动的临界雷诺数，计时在线性理论的框架下也是一个极端复杂的问题，没有严格的数学解。所以，定理比较朗道理论和尾流中转捩的经验数据仍然是不可能的。

圆库埃特流、平行平板之间的自由对流和平面泊肃叶流的研究要完整得多。在这些情形，线性稳定性理论可以得到相当明确的结果（见上面2.6-2.8节）。下面，我们将更详细地讨论朗道理论（或者更准确地说，朗道的方程（2.41）和它的一些推广）应用到这三种流动的问题。

圆泊肃叶流和从下方加热的流体层中的非线性不稳定性效应

在上述两种情况中，$\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$（或$\mathrm{Ra} = \mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$）引起的运动是非周期但稳态的（即$\omega_1 = 0$）。然而，上述考虑也完全适用于这些情形，因为不稳定运动在这里被证明对某些空间坐标是周期性的（第一种情况的z坐标和第二中情况的x和y坐标）。所以，我们可以对这些坐标平均而不是对时间平均。第二个更重要的复杂性出现了，因为不稳定扰动在这里指的是连续谱（它们依赖于连续变化的波数k）。严格地说，对于$\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$ （或$\mathrm{Ra} > \mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$），始终存在连续的一组不同的不稳定扰动。然而，这也最终证明不是一个原则问题，因为数据清楚地表明，对于小的$\mathrm{Re} - Re_{\mathrm{cr}}$（或$\mathrm{Ra} - Ra_{\mathrm{cr}}$），总是只有一个具有明确定义的波数的扰动“存活”（并且得到一个有限值）。我们将讨论后面这一点的可能原因。同时我们将把这一点作为一个公理，在两种情况下，都可以限于研究（2.41）形式的具有线性理论定义的固定波数k和固定$\omega = i\gamma$值的单个扰

[22]然而，我们注意到Tatusmi (1952)尝试在轴对称扰动的线性理论基础上，应用到入流区域（那里还没有形成抛物线形的Hagen-Poiseuille分布）解释圆管中湍流运动的起始。另一方面，Gill (1965b)发现只需要轻微改变平面库埃特流或的线性速度分布或者圆泊肃叶流的抛物线分布就可以使它们从对无限小扰动稳定变为不稳定。所以他提出了这些流动不稳定的“部分非线性”机制，基于这个假设，小的（但不是无限小的）扰动（在圆泊肃叶流情形是轴对称的）产生主流动速度分布小的扭曲，使得扰动可以在通常线性稳定性理论框架下增长。

动。

同心圆柱之间的流动和从下方加热的流体层的所有数据显示，在特征无量纲参数的亚临界值（即对于$\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$ 或$\mathrm{Ra} < \mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$），不存在偏离层流库埃特流的稳态运动或静止状态。在讨论能量方法在热对流问题中的应用时提到了对于从下面加热的流体层，一些研究者借助完整的非线性动力学方程解的存在性条件严格证明了这个结果[即Sorokin (1954)、Ukhovskiy, Yudovich (1963)、Howard (1963)、Sani (1964)、Platzman (1965)和Joseph (1965)]。转动圆柱之间的环中流体相应的结果即使对于最简单的轴对称流，至今也没有得到严格证明（尽管一些相关的理论推导可以在下面引用的工作中找到）。然而，毫无疑问，这个结果对于环中的流动也成立。同时，对于$\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$（或$\mathrm{Ra} = \mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$），在两种情况下，明显会发生相应非线性方程的稳态解的“分支”（branching）。在这一点会出现额外的稳态解，与普通解的不同是存在z（或者x和y）的周期项，对于小的$\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$（或$\mathrm{Ra} - \mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$）振幅正比于$(\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}})^{1/2}$[或$(\mathrm{Ra} - \mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}})^{1/2}$]。所以，对于略微超临界的雷诺数（或瑞利数），存在两个不同的稳态解分支，在临界雷诺（瑞利）数相同。慢慢增大无量纲参数到临界值以上，我们可以达到第二个临界值，在那里会出现一个新的稳态解分支。两种情形中的层流-湍流转捩可以理解为和朗道提出的一般情形完全一致的非线性方程稳态解的不断分支的过程。

从现有的关于圆库埃特流和从下方加热的流体层的实验证据来看，这些说法是非常可信的（见，例如Malkus (1954a)和Willis, Deardorff (1967)关于流体层中分立转变的数据，Coles (1965)和Schwarz, Springett, Donnelly (1964)关于圆库埃特流中分立转变的数据），尽管在库埃特流中向非稳态周期情形的转变看起来也是重要的。它们的严格证明一定是转捩现象的严格数学理论的第一步。之后还必须解释为什么一个特定的解在物理上实现，而另一个可能的解没有实现，为什么在略微超临界的无量纲参数值的实验中只观察到一个特定的波数k，尽管一个连续的k值在数学上都是可能的。然而，即使是这第一步也不简单，需要用先进的拓扑和泛函分析方法进行非常繁琐的处理。

Sorokin (1954)第一个写出了关于$\mathrm{Ra} = \mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$的非线性布西涅斯克方程的稳态解的分支的一般结果。他用一种形式化的展开技术证明了它的合理性。后来，Sorokin (1961)用同样的形式技术分析了有界流动区域（其中的流动有运动的壁驱动）中的分支现象[随后对这些现象进行了严格的数学分析，见Yudovich (1967)]。Brushlinskaya （1965）也对一些特定的简化“模型”流体动力学问题（可以用有限的常微分方程写出）证明了相关的现象。在她的证明中，她大量使用了有限维方法。Banach空间中算子方

程解分岔的一般拓扑理论是Krasnosel'skiy发展的（见，例如Krasnosel'skiy, 1964 ），并且由Velte (1964)和Yudovich (1965b) 首先应用于流体动力学问题。后来，Velte (1966)用同样的技术证明了在$\Omega_2 = 0$（即外圆柱静止的情形）的圆库埃特流中，对于任意选择的波数k，在临界雷诺数$\mathrm{Re} = \mathrm{Re}(k)$出现另一个形成泰勒涡旋的稳定解分支。同时，Yudovich (1966a) Ivanilo, Yalovlev (1966)类似地证明了更一般的结果（和任意$\mu = \Omega_2/\Omega_1 \geq 0$以及更高阶临界雷诺数有关）。圆库埃特流分支解具有$(\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}})^{1/2}$幂级数展开的严格证明首先由Kirchgäsner给出[见Gorfler, Velte (1967)]，他使用了Lyapunov和Schmidt在20世纪初发展的求解非线性积分方程的一般分析方法。

Yoduvich (1966b, 1967a,b)结合Krasnosel'skiy的拓扑方法和Lyapunov-Schmidt的分析方法详细研究了从下方加热的流体层中的对流（和一些其他对流问题）。他证明了，当Ra缓慢增加经过临界值$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$，$(x, y)$平面上出现一个给定周期的两个新的稳态解，两个解都有$(\mathrm{Ra} - \mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}})^{1/2}$ 的幂级数展开。此外，平衡解对于超临界Ra 数是不稳定的，其他两个解对于同样周期的小扰动是稳定的（故而必须考虑不同周期的扰动来解释六边形元胞在实验所展示的对流现象中的特殊作用）。

后来，Ovchinnikova, Yudovich (1968)解析地研究了两个同方向转动的圆柱之间的圆库埃特流的情形，Kirchgässner的很多结果的严格证明可以在这篇文章中找到。特别地，Ovchinnikova和Yudovich用小间隙近似证明了在一个给定波数k，库埃特流在Re数（从下方）达到临界值$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}(k)$时变得不稳定。在$\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$时，出现对任何轴对称扰动稳定的同样周期的另一个稳态流动，具有$(\mathrm{Re}-\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}})^{1/2}$的幂级数展开。这些作者没有用小间隙近似以外的方法严格证明这些结果，因为它们依赖于从复杂积分得到的两个常数为正的性质。然而，在任意固定的$\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}(k)$和$k$，这些常数可以数值地计算，Ovchinnikova和Yudovich考虑了一些这种类型的例子（所有这些常数都是正的）。对于$\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$的力矩的计算，Ovchinnikova和Yudovich也使用了$k = k_{\mathrm{cr}}$的新稳态流的数值解。他们的结果和已有的实验数据以及后面讨论的Davey (1962) 的理论结果符合得非常好。Meyer (1967)以类似方式通过直接数值求解$\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$的圆库埃特流（外圆柱固定，$\Omega_2 = 0$）中二维扰动的时间依赖方程计算了力矩。Meyer的数值解都在$t \to \infty$趋向于稳态，对应于接近Davey计算的力矩。Ivanilov(1966, 1968)简单考虑了$\mathrm{Ra} \gg \mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$的从下方加热的流体层中的对流和$\mathrm{Re} \gg \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$的转动圆柱之间的流动（$\Omega_1\Omega_2 > 0$），他证明了这些具有相对接近的速度和能量扰动值的情形中存在大量（明显不稳定的）稳态流状态。

现在让我们讨论一种更基本的方法，不使用高级的数学级数（也

不追求数学上的严格），而是引用动力学方程对现有的实验数据进行非严格的定量解释。这种方法主要是直接从问题的动力学方程（结合具体的合理近似）得到朗道方程（2.34）类型的方程，这些方程描述了根据线性理论为不稳定的扰动的演化。Stuart (1958)和Davey (1962)考虑了和圆柱之间库埃特流有关的问题。在这些工作中的第一个中，假设$d = R_2 - R_1 \ll (R_1 + R_2)/2 = R_0$，并且仅有内圆柱转动（角速度为$\Omega_1$）。这里，代替雷诺数，使用泰勒数$\mathrm{Ta} = \omega_1^2 R_1 d^3/\nu^2 \sim (\mathrm{Re})^2$方便。库埃特流在$\mathrm{Ta} > \mathrm{Ta}_{\mathrm{cr}} \approx 1708$变得不稳定。Stuart进一步假设差$\mathrm{Ta} - \mathrm{Ta}_{\mathrm{cr}}$很小（但是正的），在$t = 0$时刻，存在一个根据线性理论不稳定的$z$的周期性扰动。他也假设这个扰动的形式（可以从线性稳定性理论得到）仅略微随时间变化（故而关于幅度$A(t)$的近似方程（2.39）适用）。于是，幅度$A(t)$对时间的依赖可以容易从扰动能量平衡方程（即方程（2.33），流体动力学方程的一个推论）确定。所以，可以得到一个（2.41）形式的方程（系数γ和δ用泰勒数Ta、雷诺数$\mathrm{Re} = \Omega_1 R_1 d/\nu$、波数$k = k_{\mathrm{cr}}$显示地表示）和Chandrasekhar (1953)计算的对应于本征值问题（2.16）-（2.17）的本征函数。这些计算最重要的结果实际上是$\delta < 0$。这个结果和$\mathrm{Ta} < \mathrm{Ta}_{\mathrm{cr}}$时不存在不稳定扰动相一致，意味着存在一个有限值$|A|_{\max} = 2(\gamma/\delta)^{1/2}$，而对于小的$\mathrm{Ta} - \mathrm{Ta}_{\mathrm{cr}} > 0$，$|A|_{\max} \sim (1 - \mathrm{Ta}_{\mathrm{cr}}/\mathrm{Ta})^{1/2} \sim (\mathrm{Ta} - \mathrm{Ta}_{\mathrm{cr}})^{1/2}$。知道了$|A|_{\max}$和不稳定扰动的空间形式（由线性扰动理论给出），Stuart也能够计算力矩，即施加在圆柱表面的摩擦力的力矩。他得到的这个力矩的值被证明直到大约10倍于$\mathrm{Ta}_{\mathrm{cr}}$的Ta值都非常接近G. I. 泰勒通过直接测量得到的数据。

Davey (1962)得到了圆库埃特流中扰动幅度的一个更精确的方程，他使用了类似于Stuart (1960) 和Watson (1960)的方法[他们的工作将在后面讨论]。Davey考虑了$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{f}(r)e^{\mathrm{i}kz}$形式的初始轴对称扰动，由于动力学方程的非线性，也会阐述更高次谐波（正比于$e^{\mathrm{i}nkz}, n = 2, 3, ...$），这种扰动对$r$的这种形式的依赖也会略微随时间变化。所以扰动速度场这里写为这种形式

$$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{u}_0(r, t) + \boldsymbol{u}_1(r, t)e^{\mathrm{i}kz} + \boldsymbol{u}_2(r, t)e^{2\mathrm{i}kz} + ... \qquad (2.43)$$

（其中$\boldsymbol{u}_0(r, t)$项描述了扰动对库埃特流造成的扭曲）。进一步，假设当$t \to \infty$，方程（2.43）右边仅有$\boldsymbol{u}_1(r, t)$守恒，而对于非常小的$t > 0$，这一项变成解$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{f}(r)e^{\gamma t + \mathrm{i}kz}$，由线性扰动理论定义。于是，对于稍大一些的正$t$，这一项会变成领头项，而对于这些$t$值$\boldsymbol{u}_1(r, t)$可以写为

$$\boldsymbol{u}_1(r, t) = A(t)\boldsymbol{f}(r) + \text{高阶项}. \qquad (2.44)$$

把方程（2.43）和（2.44）带入非线性方程（2.32）[而不是像Stuart (1958)那样使用单个方程（2.33）]，我们可以马上得到$A(t)$的（2.41）形式的方程，其中γ是由线性扰动理论确定的，并且

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3. \tag{2.45}$$

这里，$\delta_1 > 0$定义了从层流库埃特流的基本扰动$\boldsymbol{u}_1(r,t)e^{\mathrm{i}kz}$（产生了扭曲$\boldsymbol{u}_0(r,t)$）流入的能量[实际上Stuart 的工作中只考虑了这一项，忽略了扰动形式的变化]，δ_2描述了基本扰动产生的高次谐波，δ_3是其径向形式的扭曲。对于方程（2.45）右边的所有三项，Davey得到了复杂的方程（含有相应线性理论的本征值问题的解）。然后对于情形a)$d \ll R_0, \Omega_2 = 0$；b)$d \ll R_0, \Omega_2/\Omega_1 \approx 1$；c)$R_2 = 2R_1, \Omega_2 = 0$，他数值计算了这些项的值。在所有情形，系数$\delta$都是正的，在情形a)他的值近似和Stuart 的不同精确的计算结果一致，在情形b)和c)它们也得出超临界条件下的力矩值，和已有的实验数据符合得很好。

摩擦力矩的计算和观测值之间的符合是一个令人信服的证据，表面Stuart和Davey得到的$\delta > 0$的朗道方程（2.41）给出了根据线性理论不稳定的轴对称扰动实际增长的相当精确的描述。然而，这仍然是一个间接证据，因为不是幅度本身和实验比较，而是根据这个特征计算的流动的积分特征——作用于圆柱上的总力矩。朗道理论（以及Davey的计算）在转动圆柱之间的流动中的适用性的直接实验验证是Donnelly, Schwarz (1965)[也参见Donnelly (1963)和Donnelly, Schwarz (1963)]和Snyder, Lambert (1966)进行的。Donnelly和Schwarz适用了一种特殊的离子技术来测量流动的扰动。它们在圆柱之间的空隙填充电解液CCl_4（其中不转动的外圆柱半径$R_2 = 2$ cm，使用了不同半径R_1的七种可替换的内圆柱，大部分对应于小的空隙$d = R_2 - R_1 \ll R_2$），测量通过它到达一个收集器（它可以匀速沿Oz轴运动）的电流。对于$\mathrm{Ta} \geq \mathrm{Ta}_{\mathrm{cr}}$，在圆柱之间的电解液中会出现一组规则的稳态环向涡旋，其速度场具有$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{f}(r)e^{ikz}$，其中系数$A$是朗道理论中的$A(\infty) = A_{\max}$。这些涡旋破坏电极周围的带电流体层，从而影响通过电解液的电流。在计算这个现象时，可以看到涡旋的外观一定对应于$\Delta j = CA\cos kz$（其中C是一个特定常数）形式的额外一项当前的j的表达式的外观。测量结果证实了，对于$\Omega_1 \geq \Omega_{\mathrm{cr}} = (\nu^2 \mathrm{Ta}_{\mathrm{cr}}/R_1 d^3)^{1/2}$，这个$z$的周期性成分实际上是存在的。其幅度的平方$(CA)^2$直到远大于$\Omega_1 = \Omega_{\mathrm{cr}}$都正比于$\Omega^2 - \Omega_{\mathrm{cr}}^2 \sim \mathrm{Ta} - \mathrm{Ta}_{\mathrm{cr}}$（和朗道的理论预测完全一致），在那之后离子信号开始剧烈衰减（见图23，对应于$R_1 = 1.9$ cm 的测量。这些曲线的其他例子可以在Donnelly, Schwarz (1965)中找到）。基于朗道理论的一般命

题，我们可以假设$\Omega_1 = \Omega_{2\ \mathrm{cr}}$时$A_{\max} \sim (\mathrm{Ta} - \mathrm{Ta}_{\mathrm{cr}})^{1/2}$的尖锐间断和泰勒数的“第二个临界值”$\mathrm{Ta}_{2\ \mathrm{cr}}$有关，此时环向涡旋变得不稳定，分解为更复杂的扰动。

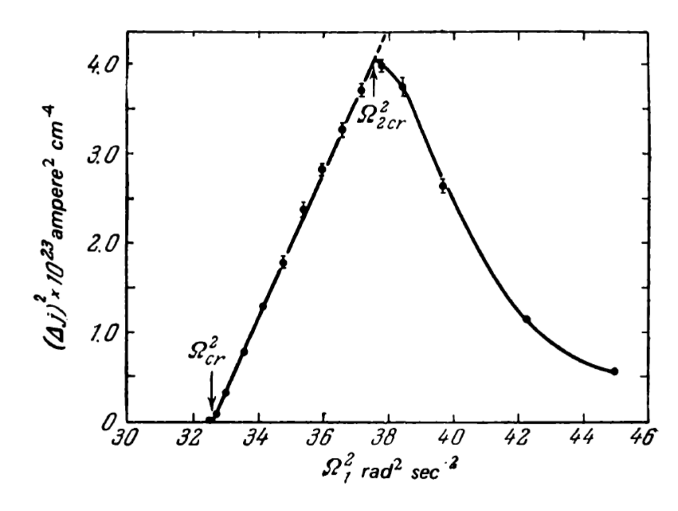


图 23 转动圆柱之间的电解液中额外电流幅度的平方$(\Delta j)^2$对内圆柱角速度的依赖[根据Donnelly (1963)]。

图23中的数据仅涉及朗道理论的最终幅度$A(\infty) = A_{\max}$。此外，Donnelly, Schwarz (1963, 1965)基于使用方程（2.42）给出了方程（2.41）的另一个验证。为了这个目的，他们重新方程（2.42）为这种形式

$$\frac{A^2(t)}{A_{\max}^2} = \frac{e^{2\gamma t}}{3 + e^{2\gamma t}}, \qquad (2.42')$$

其中未定常数C通过由条件$A(0) = \frac{1}{2}A_{\max}$选择时间原点而成功消去。Donnelly, Schwarz随后做了一系列实验，在每个实验中，速度$\Omega_1 = 3$ rad/sec （由实验条件来看是亚临界的）被突然增加到图23a每条曲线右边所示的值。结果，出现幅度变化正比于$A(t)$的离子流涨落。在对应于幅度$A = \frac{1}{2}A_{\max}$时刻测量的这个离子流随之间的变化和从方程（2.42’）对于每条曲线右边所示的γ值计算的点一起画在图23a中。理论和实验符合得非常好。对应于图23a中每条曲线的γ值也可以从具有给定R_1、R_2、Ω_1和$\Omega_2 = 0$值的线性化方程的解计算[即本征值问题（2.16）-（2.17）]。方程（2.17）中相关的波数k可以选为等于k_{cr}，因为实验表面对于适度超临界的Re或Ta值，泰勒涡旋的轴向波长仍然近似为常量，即几乎和$2\pi/k_{\mathrm{cr}}$相等。也可以从最大不稳定性判据选择k值（即，从条件$\mathrm{Im}\ \omega = \gamma = \max$），对于适中的$\mathrm{Ta} - \mathrm{Ta}_{\mathrm{cr}}$，这给出实际上相同的结果。Roberts (1965)进行了γ值的这种计算，得出的结

果和从图23a中的曲线确定的γ值符合得很好（再次证实了$\gamma \sim (\mathrm{Ta}-\mathrm{Ta}_{\mathrm{cr}})$，正如从图23的数据得到的）。

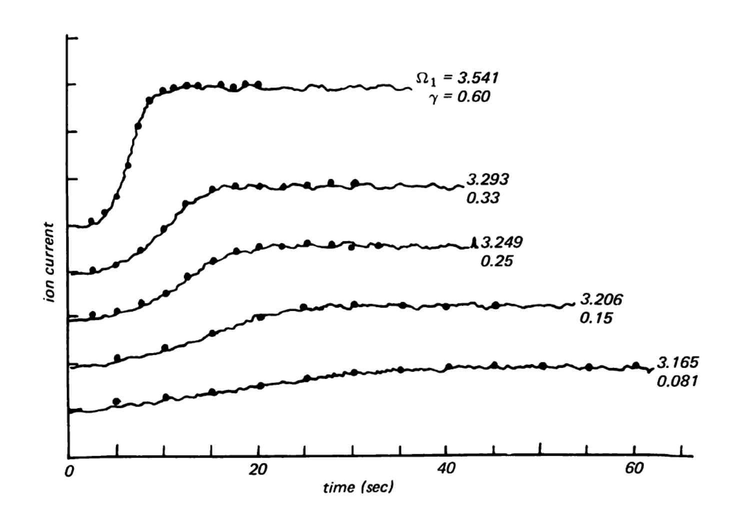


图 23 a 在速度Ω_1从临界值以下突然增加到各个超临界值情况下离子流幅度作为时间的函数。点代表每条曲线右边所示γ相应的理论曲线（根据Donnelly, Schwarz (1965)）。

Donnelly, Schwarz辉煌的实验结果基本上证实了朗道提出的理论概念。然而，定量来看，它们似乎不够完备。方程（2.42'）由一个单一参数γ，因此图23a的数据仅可以验证这个参数根据线性理论的计算结果（以及关于像方程（2.41）这样具有正的系数δ的方程正确性的定性结论）。从图23得不出关于δ值的结论。从这个观点来看，Snyder, Lambert (1966)的结果似乎含有更多信息。它们使用了一个特殊的热电阻风速计，测量间隙壁上的总速度梯度。因为Davey在他的计算中仅考虑了轴对称扰动，而对于仅稍微超过临界值$\mathrm{Ta}_{\mathrm{cr}}$的Ta 值，小间隙圆库埃特流非轴对称扰动变得不稳定，Snyder和Lambert选择验证Davey研究的第三种情形（$R_2/R_1=2, \Omega_2=0$），对于大的$\mathrm{Ta}-\mathrm{Ta}_{\mathrm{cr}}$值，非轴对称扰动会产生不稳定性。在他们的装置中产生了一个小的轴向流（对应的轴向雷诺数大约为2），据此他们可以固定速度梯度对z坐标的依赖，（借助频谱分析仪）挑出正比于$\cos kz$的基本扰动和它的一次、二次和三次谐波。他们发现得到的基本扰动和一次谐波（正比于$\cos 2kz$）的幅度和基于Davey的γ、δ和δ_2值的计算结果在非常宽的泰勒数Ta范围（直到$4\mathrm{Ta}_{\mathrm{cr}}$）内符合得很好。

Stuart (1958)和Davey (1962)的理论结论与Donnelly, Schwarz (1963, 1965)和Snyder, Lambert (1966)的实验数据符合得很好，它们共同很好地描述了轴对称泰勒涡旋的非线性变化。然而，这不意味着可以认为圆库埃特

流中的所有主要非线性效应都被理解了。实际上，很多研究者的实验[第一个是Coles (1965)]表明，随着雷诺数（或泰勒数）增长到超过临界值，转变到新的非轴对称流动状态看起来非常快。Coles证认了一整个系列的从一个状态到另一个状态的相继的分立转变。如果圆柱两端之间有m个涡旋，每个涡旋有一个环向波数n，用符号m/n表征流动状态，那么d对于$\Omega_2 = 0$和增大的转动速度Ω_1，那么接下来的状态在非常确定（和可重复）的速度相继出现：28/0（泰勒涡旋）；28/4；24/5；22/5；22/6等（在所有25个不同状态）。[23] 其中，在所有$n \neq 0$ 的情形，相继的涡旋之间的边界有类似波的形式。Coles 的结果和其他研究者的结果有些不同。于是，例如Schwarz, Springett, Donnelly (1964) 研究了一个长得多（含有多达260 个泰勒涡旋）并且圆柱间的间隙小得多的装置中的库埃特流，发现了向$n = 1$的非轴对称态的第一次转变（Ta 仅超过$\mathrm{Ta}_{\mathrm{cr}}$ 3-8%）。然而，重要的是注意到这些实验也证实了流动的非轴对称态的存在。

上面描述的实验给人的印象是，随着Ta（或Re）增大，对于相对适中的超临界值，轴对称泰勒涡旋变得对具有大致相同的轴向波数k但轴向相位不同（否则相继的涡旋之间的边界仍然是平的，不是波浪状的。）的非轴对称扰动不稳定。从Davey, Di Prima, Stuart (1968) 的理论计算（其中使用了一种非标准的方法研究小间隙情形泰勒涡旋的稳定性）也得到相同的结论。这些研究者假设在$t = 0$时刻在圆库埃特流中出现了四个以下形式的独立扰动：

$$A_c f_0(r)\cos kz; \quad A_s f_1(r)\sin kz; B_c f_2(r)\cos kz e^{\mathrm{i}n\varphi}; B_s f_3(r)\sin kz e^{\mathrm{i}n\varphi}. \tag{2.46}$$

随着时间演化，所有四个幅度$A_c = A_c(t)$、$A_s = A_s(t)$、$B_c = B_c(t)$和$B_s = B_s(t)$都会变化，互相作用。此外，它们会扭曲基本库埃特流速度分布，稍微改变它们的形式，产生高次的轴向和环向谐波。如果假设速度场$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}'(r, \varphi, z, t)$为$z$和$\varphi$的傅里叶级数，就可以研究所有这些效应。把这个级数带入纳维-斯托克斯方程（同时考虑由于小间隙近似得到的简化的边界条件），令得到的等式左右两边的傅里叶级数相应的项的系数相等。进行必要的计算，在得到的方程中仅保留不高于幅度A和B四次方的项[对应于仅保留方程（2.41）右边$|A|^2$ 和$|A|^4$阶的项]，Davey等人得到了幅度A_c、A_s、B_c、B_s的一组四个微分方程。得到的方程组在形式上类似于下面给出的方程组（2.49）和（2.52），但复杂得多，需要八行才能写得下。它的右边含有九个数值系数[方程组（2.52）的γ、a、δ_1和δ_2那样的

[23]如2.6中已经注意到的，对于在所有雷诺数对无限小扰动保持稳定圆库埃特流的情形，雷诺数的增大导致非常不同类型的湍流转捩，特征是在流动中出现一个单独的湍流区域[参见Coles (1965)、Van Atta (1966)、Coles, Van Atta (1967)]。

类型]，通过对描述单独的扰动（2.46）的本征值问题（2.14）-（2.16）解的繁琐处理来定义。Davey等人研究了这个系统对于超临界Ta值的所有稳态解。其中一个解自然是泰勒涡旋流，其中$A_c = (2\gamma/\delta)^{1/2}, A_s = B_c = B_s = 0$[这里$\gamma$和$\delta$和方程（2.41）和（2.45）中的相同]。进一步考虑对泰勒涡旋小扰动的情形，即假设$A_c(t) = (2\gamma/\delta)^{1/2} + a_c(t)$，$A_s = A_s(t)$，$B_c = B_c(t)$，$B_s = B_s(t)$，其中$a_c$、$A_s$、$B_c$、$B_s$的幅度小，在对一般的振幅方程线性化后得到新的方程

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}a_c}{\mathrm{d}t} &= -2\gamma a_c, \frac{\mathrm{d}A_s}{\mathrm{d}t} = 0\\ \frac{\mathrm{d}B_c}{\mathrm{d}t} &= (\gamma_B + \gamma\delta_{1B}/\delta)B_c, \frac{\mathrm{d}B_s}{\mathrm{d}t} = (\gamma_B + \gamma\delta_{2B}/\delta)B_s.\end{aligned}$$

这些新的方程（在线性化稳定性理论的框架下）确定了形式为（2.46）对泰勒涡旋形式流动的扰动的时间演化。这里γ_B是一个在线性化理论中描述非轴对称扰动时间演化的系数，正比于$\exp[i(kz + n\varphi)]$，δ_{1B}和δ_{2B}是上面提到的九个系数之外的两个系数，出现在振幅方程中。

因为对于$\mathrm{Ta} > \mathrm{Ta}_{\mathrm{cr}}$，$\gamma > 0$，$a_c(t)$是衰减的。结果，泰勒涡旋的稳定性或不稳定性是由$\gamma_B + \gamma\delta_{1B}/\delta$和$\gamma_B + \gamma\delta_{2B}/\delta$的实部的符号决定的。

对各个k、n、Ω_1、Ω_2和R_1、R_2精确计算系数γ_B、δ_{1B}和δ_{2B}似乎是极端复杂和工作量巨大的问题。因为这个原因，Davey等人仅考虑了$\Omega_2 = 0$，$k = k_{\mathrm{cr}}$的情形，引入了一些简化近似。这里，对于所采用的近似，对于所有$\mathrm{Ta} - \mathrm{Ta}_{\mathrm{cr}} > 0$，$\mathrm{Re}[\gamma_B + \gamma\delta_{1B}/\delta] < 0$（即，泰勒涡旋对于同相的非轴对称扰动是稳定的）。同时，对于$\mathrm{Ta}/\mathrm{Ta} \approx 1.08$，$\mathrm{Re}[\gamma_B + \gamma\delta_{2B}/\delta]$变为正的。于是，泰勒涡旋对于仅超过$\mathrm{Ta}_{\mathrm{cr}}$8%的Ta的异相非轴对称扰动不稳定（由于数值计算中所作的简化，这个结果只能看作$\mathrm{Ta}_{2\ \mathrm{cr}}$大小的粗略估计）。此外，$\mathrm{Re}[\gamma_B + \gamma\delta_{2B}/\delta]$对方位角方向波数$n$的依赖相当弱，但是，一般来说，可以认为$\mathrm{Re}[\gamma_B + \gamma\delta_{2B}/\delta]$随$n$的增长而减小，故而对于$n = 1$初始不稳定性一定发生。所有这些结论和Scwarz、Springett和Donnelly在更类似于Davey等人理论假设的条件下（假设圆柱无限场，间隙很小，比Coles的实验条件更类似）的实验发现符合得相当好。

当然，Davey等人的理论不是非常严格－－他们仅考虑了特殊形式（2.46）的四个扰动的相互作用，而对于圆库埃特流中的每个$\mathrm{Ta} > \mathrm{Ta}_{\mathrm{cr}}$，存在无穷多个不稳定的扰动（对应于不稳定波数$k$的区间，包含$k_{\mathrm{cr}}$，随$\mathrm{Ta} - \mathrm{Ta}_{\mathrm{cr}}$的增大而扩张）。因为这个原因，即使是“对于适中的正$\mathrm{Ta} - \mathrm{Ta}_{\mathrm{cr}}$，为什么圆柱之间的流动会出现强烈$z$周期性的状态（由一个单独的波数$k$值表征）”这个问题现在也不能认为已经完全解决。关于这个问题的一些一般性考虑（不使用特殊形式的流体力学方程，即和非线性偏微分方程描述

的一类广泛的物理过程有关）可以在Ponomarenko (1968a)中找到。

现在让我们转向数学上简单得多的从下方加热的流体层中对流的问题。我们已经指出，对于$\mathrm{Ra} > \mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$，描述静止状态的稳态解是不唯一的。此外还会出现稳态元胞解，幅度正比于$(\mathrm{Ra}-\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}})^{1/2}$[对于小的$(\mathrm{Ra}-\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}})/\mathrm{Ra}$]。这个事实和这个想法符合得很好：对于$\mathrm{Ra} > \mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$，在从下方加热的流体层中会出现对应于$\delta > 0$ 的朗道模式的（空间上而不是时间上的）软激发振荡。Sorokin (1954)、Gor'kov (1957)、Malkus, Veronis (1958)、Kuo (1961)[这篇文章中首次使用了一种数值分析方法]、Bisshopp (1962)和其他人研究了非线性布西涅斯克方程额外的元胞解。重要的是，这些非线性对流方程的稳态解是强烈非唯一的。

让我们从Stuart (1958)最简单的方法开始，基于近似假设（2.39）[所谓的“形状假设”]，扰动形式不随时间变化并且和$\mathrm{Ra} = \mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$时出现的不稳定扰动的形式一致。于是，对于$k = k_{\mathrm{cr}}$的方程（2.23）的每个解$\varphi(x_1, x_2)$（描述不稳定扰动对水平坐标的依赖），通过平衡方程（$2.33''$）和（$2.33'''$）可以容易得到（2.41）形式的关于幅度$A = A(t)$的方程，其中$\gamma \sim (\mathrm{Ra}-\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}})$从线性扰动理论得到，而$\delta$和描述中性稳定的无限小扰动的本征值问题的本征函数[参见，例如Roberts (1966)]有关。保持Landau-Stuart方程（2.39）的假设（“形状假设”）看起来是不严格的，仅适合作为Ra略微超过$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$的一阶近似。然而，Gor'kov、Malkus, Veronis、Kuo, Bisshopp和其他人更严格的方法也可以得到大量二维波、正比于$\cos(k_1x_1 + k_2x_2), k_1^2 + k_2^2 = k_{\mathrm{cr}}^2$（所谓滚转（rolls））、正方形元胞、六角形元胞等形式的稳态解。Schlüter, Lortz, Busse (1965)发展了对于适中的$\mathrm{Ra} > \mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$值[然而适用于数倍于$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$的Ra值，参见Busse (1967a)]构造非线性方程稳态解的一种极端一般性的方法。这个方法使用了小参数ϵ这种形式的幂级数展开（和Gor'kov以及Malkus, Veronis构造某些特殊解用到的展开式有关）

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) &= \epsilon \boldsymbol{u}^{(1)}(\boldsymbol{x}) + \epsilon^2 \boldsymbol{u}^{(2)}(\boldsymbol{x}) + ..., \\
T(x) &= \epsilon T^{(1)}(\boldsymbol{x}) + \epsilon^2 T^{(2)}(\boldsymbol{x}) + ... \\
\mathrm{Ra} &= \mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}} + \epsilon \mathrm{Ra}^{(1)} + \epsilon^2 \mathrm{Ra}^{(2)} + ...
\end{aligned}
$$

如果我们令布西涅斯克方程两边的ϵ同次幂系数相等，并且每次使用边界条件，我们得到$\boldsymbol{u}^{(1)}(\boldsymbol{x})$、$T^{(1)}(\boldsymbol{x})$通常的线性化对流方程。对于序列中更高阶的项，可以得到一系列非齐次偏微分方程。众所周知，这种非齐次方程组只在满足适当的存在性条件（即，如果在$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$、$T'(\boldsymbol{x})$对的空间中定义了标量积，方程右边必须和伴随齐次方程的所有解正交）时才有解。

这些存在性条件使得可以相继地定义所有$\mathrm{Ra}^{(m)}$。借助相应的非齐次方程的解，在很多情形可以唯一地确定$\boldsymbol{u}^{(m)}(\boldsymbol{x})$和$T^{(m)}(\boldsymbol{x}), m=2,3,...$（如果对于$\boldsymbol{u}^{(1)}(\boldsymbol{x})$、$T^{(1)}(\boldsymbol{x})$我们选择一些合适的线性化问题的解），最终我们可以从等式$\mathrm{Ra}-\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}=\epsilon\mathrm{Ra}^{(1)}+\epsilon^2\mathrm{Ra}^{(2)}+...$定义参数$\epsilon$[特别参见Segel (1966)的调查文章中将这种方法应用到一个简单模型非线性偏微分方程求解的例子]。

Schlüter等人研究了选择零阶近似$\boldsymbol{u}^{(1)}(\boldsymbol{x})$、$T^{(1)}(\boldsymbol{x})$正比于函数

$$\varphi(x_1,x_2)=\sum_{n=-N}^{N}C_n\exp[\mathrm{i}(k_1^{(m)}x_1+k_2^{(m)}x_2)] \tag{2.47}$$

所得到的稳态解（其中$k_i^{(-n)}=-k_i^{(n)}, i=1,2$，$C_{-n}=C_n^*$，$(k_1^{(n)})^2+(k_2^{(n)})^2=k^2=$ 常量.）。在此情形，二阶方程（对于$\boldsymbol{u}^{(2)}$、$T^{(2)}$）解的存在性条件简化为$\mathrm{Ra}^{(1)}=0$（所以如果我们限制于不高于ϵ^2的量，那么$\epsilon\sim(\mathrm{Ra}-\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}})^{1/2}$）。如果我们取$\mathrm{Ra}^{(1)}=0$，那么$\boldsymbol{u}^{(2)}$、$T^{(2)}$的方程对于零阶近似下函数（2.47）的任意选择有唯一解。然而，三阶方程的解的存在性条件不仅唯一定义了$\mathrm{Ra}^{(2)}$，而且对函数$\varphi(x_1,x_2)$给出了限制：如果我们在方程（2.47）中有一组2-矢量$\boldsymbol{k}^{(1)}=(\boldsymbol{k}_1^{(1)},\boldsymbol{k}_2^{(1)})$, $\boldsymbol{k}^{(2)}$,...$\boldsymbol{k}^{(n)}$，那么非线性三阶方程的稳态解仅对于非常窄范围的系数$|C_1|$,...,$|C_N|$存在。所以不是每个线性化问题的解都可以成为非线性对流方程稳态解的零阶近似。此外，Schlüter等人证明，可以用于构建$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$、$T'(\boldsymbol{x})$以$\epsilon$所有阶表示的稳态阶的函数$\varphi(x_1,x_2)$的数量似乎是无穷大。所以，例如，所有存在性条件在“正规情形”（其中所有相邻$\boldsymbol{k}$矢量间的夹角相等，$|C_1|^2=...=|C_N|^2=1/2N$。正规情形包括卷、方形元胞和六边形）容易满足。这甚至对于更一般的“半正规”情形也是对的[参见Segel (1965), Busse (1967c)]。

对于远大于$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$的Ra，Gor’kov, Malkus、Veronis、Schluter等人的展开方法难以使用。在这些情形，直接数值方法看起来更好。这些（基于各种简化近似的）数值方法被用于找到Kuo (1961)、Herring (1963, 1964)、Deardorff (1964)、Fromm (1965)、Veronis (1966)、Busse (1966b)、Roberts (1966)、Schneck, Veronis (1967)、Plows (1968)和其他人工作中不同边界条件和不同Pr值的布西涅斯克方程的特定稳态解（大部分是最简单的二维卷）。这些工作中得到的结果在很多方面和已有的足够大瑞利数下对流传热以及温度和速度场的平均特性的数据符合得很好。特别地，值得注意，所有这些研究者的计算都表明，大Ra下平均（即对水平坐标平均）温度的垂向分布和$\mathrm{Ra}<\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$时看到的线性分布强烈不同。也就是说，随着Ra增大，流体层中一个厚的区域达到接近等温的状态（这个区域的厚

度随Ra的增大而增大），平均温度的几乎所有变化都集中在靠近流动边界的两个薄的热边界层中。大Ra值的温度场的特征是中心大质量的接近等温的流体和特定的蘑菇状等温线。当$\mathrm{Ra}/\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$大于几，在近乎等温的中心区域中会出现一个小的正垂向温度梯度（即温度梯度反转），这是个有趣的细节。这些结果在Veronis (1966)给出的图中最为明显。然而，从Kuo (1961)开始的所有其他研究者的数据中都可以观察到它们。流体层厚的中心区域（$\mathrm{Ra}/\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$）中的温度梯度反转也由Gille (1967)在精确的干涉测量的帮助下在实验中看到了。

现在让我们讨论一个非常重要的问题，关于真实的物理流体层中唯一出现的优先扰动模式的存在性。这个问题和目前还远没有完备的元胞对流运动的稳定性理论紧密相关。如我们从2.7节看到的，线性稳定性理论得出结论，对于$\mathrm{Ra} > \mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$一定存在一本无穷大的不稳定无限小扰动（具有指数增长率）的集合，对应于不稳定性首次出现的$k = k_{\mathrm{cr}}$周围的某个范围的波数k值。最不稳定的（即增长最快的）扰动将对应于一个确定的k值，但也会有一个无穷大的这种扰动的集合[因为对于给定的k，扰动的水平形式可以用满足方程（2.23）的任意函数$\varphi(x_1, x_2)$描述]。然而，实验表明，在每一组特定条件下，总是只会产生具有严格定义的形式（对应于将水平面分割成一组规则的六边形单元，尽管还有其他可能性）和严格定义的有限振幅的扰动。朗道的理论只能找到这种稳态的振幅[借助从非线性布西涅斯克方程得到的方程（2.41），假设函数$\varphi(x_1, x_2)$已知。参见Gor'kov (1957)]。然而，这个理论没有说明为什么流体中从来没有出现几个不同k值的扰动，以及为什么在给定k的所有扰动中，实际只观察到一个确定形式的$\varphi(x_1, x_2)$。Segel (1962)的计算部分解释了一些情形中的这个事实，波数不同的扰动之间的非线性相互作用，由于抑制了其他扰动，可能导致给定波数的扰动的剧烈增长。在这个工作中考虑了上方和下方被平面自由边界条件束缚的流体层中两个不依赖于x_2 坐标的卷简单的“对相互作用”。换句话说，Segel研究了一种扰动的演化，速度分量$\boldsymbol{u}_3(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{u}_3(\xi, \eta, \zeta, t)$，其中$\xi = x_1/H, \eta = x_2/H, \zeta = x_3/H$，$H$是流体层的深度，

$$\boldsymbol{u}_3(\boldsymbol{x}, t) = A_1(t)\cos k\xi f_1(\zeta) + A(t)\cos l\xi f_2(\zeta) + \text{小的补充项}. \qquad (2.48)$$

然后，应用Stuart (1960)和Watson (1960a)的方法（我们在后面讨论），Segel在一级非线性近似中得到了下面形式的函数A_1和A_2 的“幅度方程”：

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t} &= \gamma_1 A_1 - (\delta_1 A_1^2 + \beta_1 A_2^2)A_1, \\ \frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}t} &= \gamma_2 A_2 - (\beta_2 A_1^2 + \delta_2 A_2^2)A_2, \end{aligned} \qquad (2.49)$$

对于$A_2=0$或$A_1=0$，者显然得到了一个等价于单个扰动幅度的朗道方程（2.41）的方程。方程（2.49）显然有下面的稳态解：

$$\begin{aligned}
(\mathrm{I})A_1 &= A_2=0,\\
(\mathrm{II})A_1 &= 0, A_2=(\gamma_2/\delta_2)^{1/2},\\
(\mathrm{III})A_1 &= (\gamma_1/\delta_1)^{1/2}, A_2=0,\\
(\mathrm{IV})A_1 &= (\gamma_1\delta_2-\gamma_2\beta_1)^{1/2}(\delta_1\delta_2-\beta_1\beta_2)^{-1/2}, A_2=(\gamma_2\delta_1-\gamma_1\beta_2)^{1/2}(\delta_1\delta_2-\beta_1\beta_2)^{-1/2}.
\end{aligned}$$

这些解的稳定性可以用微分方程稳定性理论（或非线性振荡理论）的通常方法验证。可以发现在最重要的情形，$\gamma_1>0, \gamma_2>0, \delta_1>0, \delta_2>0$，由解（II）和（III）之一的稳定性得出（IV）不可能是稳定的。所以很明显存在一大类情形，其中最终状态只含有一个滚转（具有确定的波数）而不是两个的混合。对Ra仅略微超过$\mathrm{Ra_{cr}}$的方程的更详细的分析表明，如果第一个滚转的线性理论增长率γ_1超过第二个滚转的增长率γ_2的两倍，那么在最终的平衡态，仅有第一个滚转出现（即（III）是唯一稳定的稳态解）。类似地，如果$\gamma_2>2\gamma_1$，那么仅有解（II）是稳定的。也就是说，如果根据线性理论，两个相互竞争的主要扰动之一有足够大的优势，那么只有这个占优势的扰动会出现在最终状态，而不占优势的扰动会最终衰减。另一方面，如果$\gamma_2<\gamma_1<2\gamma_2$，那么解（II）和（III）都是局域稳定的，最终状态是（II）或（III），依赖于初始条件。然而，在此情形，非常小的扰动的初始条件更有可能是最终对应于解（III）的最终状态的那些条件[参见Segel (1966)]。在这个意义下，具有较大线性增长率的扰动在非线性理论中也总是占优势的。原则上，也有可能[对于方程（1.49）中的某些系数值]一个稳定扰动和一个不稳定扰动（即$\gamma_1>0$和$\gamma_2<0$的情形）的相互作用会导致不稳定扰动的增长和最终建立对应于类型（IV）的“混合态”。在机械驱动的流动中有时也可能碰到这种情形（例如在平面平行流中）。然而，对于Ra数仅略大于$\mathrm{Ra_{cr}}$、两个一次滚转都不稳定（$\gamma_1>0$、$\gamma_2>0$）的热对流问题，其中一个滚转必然会衰减。这在某种程度上解释了为什么扰动之间的相互作用导致这个事实，对于小的$\mathrm{Ra}-\mathrm{Ra_{cr}}$，在所有不稳定扰动中，仅看到具有一个确定波数值$k$的扰动。Segel对于更一般的$N$个平行的“非重复”滚转（如果$k$和$l$是两个波数，那么$(k+l)/2$ 在所考虑的波数之列）的情形得到了同样的结果。这里最终也会出现一个单一的扰动，如果其中一个滚转的线性增长率比其他的大很多，它必然会存活下来[参见Segel (1966)]。Ponomarenko (1968a)给出了一个一般方法，处理对于给定$\mathrm{Ra}>\mathrm{Ra_{cr}}$，从一整个不稳定波数的谱中选择一个有优势的波数的机制的

问题。

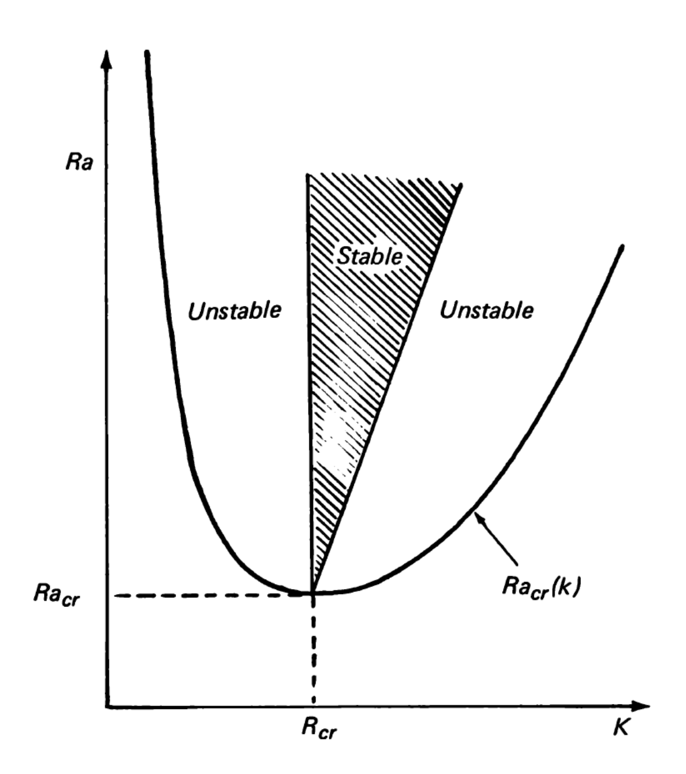


图 23 处于接近临界瑞利数的滚转的稳定性范围[根据Schlüter, Lortz, Busse (1965)]。

现在让我们考虑仅具有波数k的扰动。这里也出现了选择占优势的模式的问题，因为有一组无穷多个具有水平波数k的不同扰动形式。然而，在固定实验条件下进行的真实实验中仅观察到一个这种形式。所以，对$\mathrm{Ra} > \mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$的非线性布西涅斯克方程不同稳态解稳定性的研究非常重要。Schlüter, Lortz, Busse (1965)进行了最完备的这种研究。这些作者考虑了略微超临界的瑞利数下从水平形式（2.47）的无穷小扰动演化而来的所有稳态解，并且研究了这样得到的有限幅度的元胞运动对类似形式的无穷小扰动的稳定性。结果，他们得到了一个相当出人意料的结论，除了最简单的二维滚转[对应于方程（2.47）的$N = 1$]，所有元胞解都肯定是不稳定的。对于给定水平波数k的滚转的例外情形，Schlüter等人证明，它们对具有同样波数k的所有无穷小扰动是稳定的，如果仅有这个波数属于不稳定波数（根据线性理论）。最终，Schlüter等人研究了有限幅度的二维滚转对水平波数$k_1 \neq k$ 的无穷小扰动的稳定性。他们发现当$\mathrm{Ra} - \mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$足够小，波数$k < k_{\mathrm{cr}}$的滚转（其中$k_{\mathrm{cr}}$是在$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$中性稳定的无穷小扰动的波数）不可能对任意波数的扰动稳定。然而，如果k比k_{cr}大并且$k - k_{\mathrm{cr}}$ 足够小（处

于$\mathrm{Ra}-\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$的量级），那么波数$k$的滚转对所有可能的无穷小扰动都是稳定的。Schlüter等人找到的对于足够小的差$\mathrm{Ra}-\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}>0$的稳定二维滚转的整个范围如图23b所示。

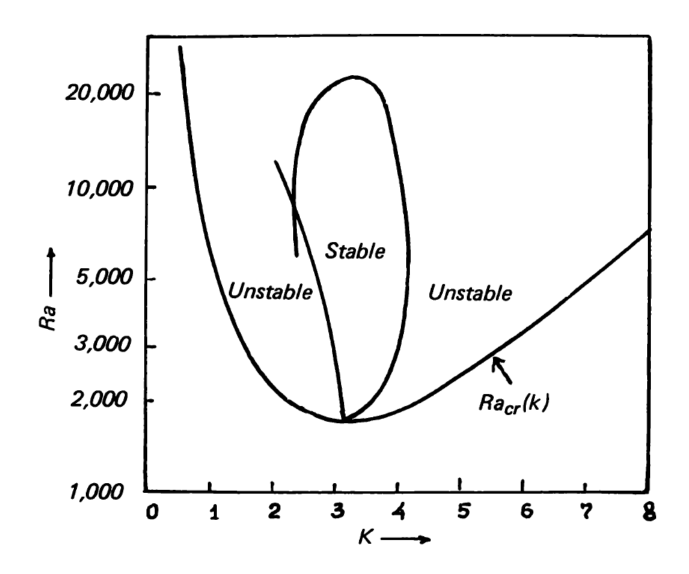


图 23 $\mathrm{Pr}=\infty$情形中对于一个很宽范围的瑞利数，滚转的稳定性范围[根据Busse (1967)]。

Schlüter, Lortz, Busse的结果是用对小参数ϵ展开的方法得到的，仅对接近临界值的瑞利数成立。对更大瑞利数的布西涅斯克方程的解的稳定性的一般性分析难以进行。然而，在无限大普朗特数的特殊极限情形下，布西涅斯克方程经过了相当大的简化，稳定性问题变得易于分析。使用数值方法，Busse (1967b)计算了$\mathrm{Pr}=\infty$的布西涅斯克方程的稳态解（以一个很宽范围的Ra数的滚转的形式）并且借助通常的线性稳定性理论研究了这些解的稳定性。他发现稳定滚转对应于(Ra,k)平面上一个狭长的区域[见图23c]。对于所有小于22600的瑞利数的稳定波数范围限制在k_{cr}附近的一个小的带中（几乎不依赖于Ra 值）。在$\mathrm{Ra}=22600$，布西涅斯克方程的所有二维解变得不稳定（至少在$\mathrm{Pr}=\infty$时）。重要的是注意到22600的值和实验上观察到（元胞对流中）第二个分立转变的Ra的值在同一量级。

图23b和图23c中所示的这些结果定性上和这个事实一致，水平元胞的特征尺度在瑞利数增大时没有改变太多。然而，理论结果和实验发现之间还有另一个矛盾。理论认为，二维滚转是有限幅度元胞对流唯一的稳定形式。实际上很多研究者观察了这种二维对流元胞，包括Silveston (1958, 1963)、Koschmieder (1966)、Chen, Whitehead (1968)、Rossby （未发表的博士论文, 麻省理工学院, 1966）和其他人。然而，更为常见的是元胞对

流具有漂亮的规则六边形伯纳德元胞的形式。我们在之前对流问题的讨论中两次提到这个值得注意的事实。现在我们必须从稳定性理论的观点来解释这个事实。

这个解释基于发现布西涅斯克近似中忽略的额外效应在真实的实验室实验中通常起到了主导作用。在2.7节末尾，我们提到了表面张力在原始的伯纳德实验中起到了重要作用。在很多其他上表面被空气表面约束的液体层的实验中显然也是这样[参见Koschmieder (1967)，也参见Scanlon和Segel相应的理论]。Koschmieder (1966, 1967)和Chen, Whitehead (1968)的实验数据也表明，发生对流的水箱的大小和形式对于对流模式也非常重要[也参见Davis (1969)的理论]。然而，Palm (1960)可能是第一个指出通常自由对流的布西涅斯克方程原则上不能提供关于六边形元胞对流的基本特性令人满意的解释。他以Tippelskirch (1956)的实验为例证明了他的论断，这些实验明确显示元胞计算中的特征是由黏滞系数ν对温度T的依赖形式决定的（若$d\nu/dT < 0$，流体在元胞中央升起，在边缘沉降，而当$d\nu/dT > 0$，流体在边缘升起，在中央沉降）。所以Palm把这作为他更复杂的方程的基础，这些方程也考虑了可能的ν对T的依赖（并且估计了这种依赖对$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$的效应）。他进一步假设在初始时刻，在流体中出现某些滚转形式的“基本扰动”（例如，正比于$\cos(kx_2/H) = \cos k\eta$，其中$\eta = x_2/H$，$H$是流体层的深度，不依赖于$\xi = x_1/H$），在这上面施加了一个弱的、具有相同波数矢量$\boldsymbol{k}$的（大部分不稳定的）各种其他小幅扰动的“背景”。在此情形，假设基本扰动和其他扰动的“对相互作用”会起到基本的作用是很自然的。按照这一点，Palm将自己局限于研究具有垂向速度$u_3(\boldsymbol{x}, t) = u(\xi, \eta, \zeta, t)$的扰动的演化，其中$\zeta = x_3/H$具有这种形式

$$\begin{aligned} u_3(\xi,\eta,\zeta,t) &= [A_1(t)\cos k\eta + A_2(t)\cos k_1\zeta\cos k_2\eta]f(\zeta), \\ k_1^2 + k_2^2 &= k^2. \end{aligned} \tag{2.50}$$

具有$k_1^2 + k_2^2 = k^2$的扰动显然与基本扰动关系特别密切，因为这些扰动的平方和（它们进入了流体力学方程）可能再次产生与基本扰动形式相同的项。可以进一步假设这些扰动和基本扰动的相互作用在某些条件下导致二者的相互放大，于是只有这些扰动最终起到了重要作用。在这种启发性思考的基础上，Palm首先提出考虑特殊情况

$$u_3(\xi,\eta,\zeta,t) = [A_1(t)\cos k\eta + A_2(t)\cos(\sqrt{3}k\xi/2)\cos(k\eta/2)]f(\zeta) \tag{2.51}$$

（因为这里这两项是紧密相连的）。为简单起见，将边界条件限制为物理上不真实的两个恒温自由表面之间的“自由-自由”情形[Segel, Stuart

(1962)、Palm, Øiann (1964)和Segel (1965)后来采用了这个简化]并取$f(\zeta)=\sin\lambda\zeta$，Palm推导了一组幅度$A_1(t)$和$A_2(t)$的微分方程。丢掉幅度的比三阶高的项之后，这个方程组具有这种形式

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t} &= \gamma A_1-\frac{1}{4}\sigma A_2^2-\delta_1 A_1^3-(2\delta_2-\delta_1/2)A_1A_2^2,\\ \frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}t} &= \gamma A_2-\sigma A_1A_2-\delta_2 A_2^3-(4\delta_2-\delta_1)A_1^2A_2,\end{aligned}\tag{2.52}$$

其中γ、σ、δ_1、δ_2是常系数，$\gamma\sim \mathrm{Ra}-\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$，$\sigma\sim|d\nu/dT|$[参见Segel, Stuart (1962)]。我们看到，黏性随温度的变化在幅度方程右边产生二阶项，对于不依赖于温度的流体[参见方程（2.49）]，这些方程中只有一阶项和三阶项。重要的是，方程（2.52）有这种形式的简单稳态解

$$A_2=\pm 2A_1,\tag{2.53}$$

正好对应于六边形棱柱元胞。此外，Palm证明了，当$\sigma\neq 0$（即当$d\nu/dT\neq 0$而不是$d\nu/dT=0$）只有这种形式的解对幅度A_1和A_2的小扰动稳定，所以这些解将在$t\to\infty$极限实现。因为，如可以证明的，实验观察到的元胞中循环的方向和$d\nu/dT$ 的符号之间的简单联系对应于这些稳定解，所以Palm得出结论，这些结果完全解释了基本的实验事实。

后来，Segel, Stuart (1962)、Palm, Øiann (1964)、Segel (1965)、Busse (1967)、Palm, Ellingsen, Gjevik (1967)和Davis, Segel (1968)批判地重新考虑和推广了Palm的理论。所有这些作者也都以扰动理论的三阶近似为起点。他们证明了Palm (1960)的某些结论不完全正确。首先，他们发现方程（2.52）的解（2.53）实际上仅对不太大的$\mathrm{Ra}-\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$值（即Ra必须小于某些依赖于黏滞变化的典型“尺度”σ的$\mathrm{Ra}_1>\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$值，并且当$\sigma\to 0$趋向于$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$）是稳定的。此外，当$\sigma\neq 0$，那么甚至对于小范围的亚临界Ra值（即，对于$\mathrm{Ra}_0<\mathrm{Ra}<\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$，$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}-\mathrm{Ra}$为$\sigma^2$的量级）也会存在确定的有限幅度的六边形稳态运动，它们对于无限小扰动稳定。所以六角形对流元胞对所有具有相同水平波数的无限小扰动稳定（并且显然对所有气体无限小扰动稳定，没有例外。在$\mathrm{Ra}_0<\mathrm{Ra}<\mathrm{Ra}_1$，参见Busse (1967c)和Ponomarenko (1968b)）。对于$\mathrm{Ra}>\mathrm{Ra}_1$，幅度方程唯一的稳定解是对应于二维滚转形式的对流的解。此外，滚转不仅在$\mathrm{Ra}>\mathrm{Ra}_1$对于所有无限小扰动稳定，而且对于更宽范围$\mathrm{Ra}>\mathrm{Ra}_2$也是如此（其中$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}<\mathrm{Ra}_2<\mathrm{Ra}_1$）。所有其他形式的对流当然都是不稳定的。所以对于$\mathrm{Ra}_0<\mathrm{Ra}<\mathrm{Ra}_2$，仅有六边形是稳定的，对于$\mathrm{Ra}_2<\mathrm{Ra}<\mathrm{Ra}_1$，六边形和滚转都是稳定的，对于$\mathrm{Ra}>\mathrm{Ra}_1$，仅有滚转是稳定的。当瑞利数Ra缓慢增长，对流在$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$ 开始增长，并且具有稳定的稳态六边形元胞的形式。

在$\mathrm{Ra} = \mathrm{Ra}_1$，六边形对流变得不稳定，转变为在滚转，它们在这么大的Ra是唯一稳定的对流形式。

随着瑞利数减小，从滚转向六边形对流的转变发生在$\mathrm{Ra} = \mathrm{Ra}_2$（滚转变得不稳定）并且在$\mathrm{Ra} = \mathrm{Ra}_0$经过了对流衰减。我们看到，当瑞利数首先缓慢增大然后缓慢减小，一定会看到一个滞后效应。当$\sigma \to 0$（即黏滞变化消失），所有Ra_0、Ra_1和Ra_2值趋向于$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$，结果变得和Schlüter, Lortz, Busse的结果相同。

上面讲述的关于黏滞变化影响的结果是Segel (1965)对一个“自由-自由”边界条件的模型和一个特殊黏滞或温度依赖形式得到的。后来Palm, Ellingsen, Gjevik (1967)考虑了所有可能类型（刚性和自由平面的组合）的边界条件，并计算了这些情形的所有“临界值”Ra_0、Ra_1 和Ra_2。然而，第一批最一般的结果是Busse1962年在他的毕业论文[后来很久才发表，见Busse (1967c)] 中得到的。Busse使用了参数展开法（如上所述和Schlüter等人的工作有关）并考虑了黏性、热传导系数、定压比热和热膨胀系数（对于“自由”和“刚性”边界条件的所有组合）随温度的轻微变化。他发现，所考虑的所有效应都暗示统一的稳定性情况，已经在上面仅有黏滞依赖于温度的情形中描述过了。后来，Davis和Segel (1968)证明了，甚至在具有不变性质的流体中，六边形元胞在Ra足够接近$\mathrm{Ra}_{\mathrm{cr}}$时也会出现，如果上面的自由表面的边界条件允许变形。Ponomarenko (1968b)建立六边形对流元胞的问题的一种非常一般的方法，他没有使用特殊形式的动力学方程，但是强调了幅度方程右边的二阶项的首要作用[可以注意到，这些项对于不变的流体性质为零，它们使得一个孤立扰动幅度的方程区别于通常的朗道方程（2.41）]。

值得注意，实际上在Silveston (1958)的实验中观察到了当瑞利数缓慢增加到临界值之上时六边形对流元胞转变为滚转。然而，完全验证现在已知的所有理论预言明显需要多得多的实验工作。

平面平行流和边界层中的非线性稳定性效应。湍流转捩

现在让我们讨论平面平行流中扰动的非线性演化。我们首先考虑平面泊肃叶流，其优势在于在此情形线性稳定性理论时完全成功的。然而，非线性分析被证明要复杂得多。Meksyn, Stuart (1951) 进行了这个方向的第一个尝试。他们发现，基于一些简化假设，在平面泊肃叶流中存在亚临界有限幅度的不稳定性，即，有限幅度$|A|$的二维扰动的临界雷诺数比线性稳定性理论的$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$小，随着$|A|$的增大而减小。这个结果迫使我们假设$\delta < 0$。另一方面，在后来Stuart (1958)的工作中，能量平衡的积分方程（2.33'）被用于得到有限不稳定扰动振幅的朗道方程（2.41）。这里，基于其他简化假设（最重要的是，扰动的空间形式不随时间变化，和线性稳定性方

程的本征函数形式严格相同）发现$\delta > 0$。解决这一争议的愿望促使Stuart (1960)和Watson (1960a)对Re接近$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$的平面泊肃叶流中的二维类波扰动的行为进行了更完整的分析。Stuart-Watson分析基于使用完整的动力学方程组和（2.43）和（2.44）类型的展开[这种分析后来在Davey的一篇文章(1962)的模型中使用，我们之前讨论过]。这里也作了一些近似，但看起来比Meksyn和Stuart (1951)和Stuart (1953)的近似更自然更合理。Stuart, Watson的结果某种程度上在Eckhaus (1965)基于所有函数对线性奥尔-索末非方程的本征函数展开的工作中得到了扩展和支持。Roynolds, Potter (1967)提出了和最初Stuart-Watson方法紧密相关（但适于处理二维和三维类波扰动）的展开方法的另一个优雅的公式。

上面提到的所有工作都证明了（2.41）形式的扰动振幅方程的正确性，并且表明系数δ由δ_1、δ_2和δ_3 三项组成[和方程（2.45）中的项意义相同]。Meksyn, Stuart (1951)和Stuart (1958)并没有正确考虑所有的项。在后一个工作中仅考虑了δ_1项，而前一篇中只近似估计了δ_1和δ_3，δ_2被完全忽视了。还发现，对于这三项，可以给出含有相应复数形式线性奥尔-索末非方程（以及伴随方程）的本征值和本征函数的显示表达式。这些项（以及它们的和δ）的数值计算在数值分析中是一个非常复杂的问题，然而，用现代的高速计算机是可以处理的。Reynolds, Potter (1967)[使用了他们自己的对Stuart-Watson方法的修改]和Pekeris, Shkoller (1967)[基于Eckhaus本征函数展开方法]独立进行了相应的计算。这两篇文章的结果在数值上不相符（一个原因是他们使用了不同的归一化方法和不同的振幅$|A|$定义），但两个结果有相同的一般行为，在(k, Re) 平面的不同店有接近的$\delta = \delta(k, \mathrm{Re})$比值。

Reynolds和Potter在临界点$(k_{\mathrm{cr}}, \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}})$和$(k, \mathrm{Re})$平面上的中性稳定曲线上的另外四个点以及中性曲线邻域的两个点计算了δ_1、δ_2、δ_3 值和$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$。他们发现$\delta_1$在所有点为正[和之前Stuart (1958)的结果完全一致]，在临界点和中性曲线上分支的点δ_3是负的，绝对值比δ_1大得多[故而$\delta_1 + \delta_3$是负的，这个结果和Meksyn, Stuart (1951)的近似推导一致]。δ_2值也是正的，和δ_1 同量级。所以$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$在临界点和中性曲线的上分支是负的（这里主要由基本扰动的垂向分布的扭曲过程决定）。当然，最重要的是在临界点得到的结果：它表明平面泊肃叶流中的有限扰动比无限小扰动更早地失稳（即存在亚临界有限幅度不稳定性），在平面泊肃叶流中非常不太可能看到圆库埃特流和从下方加热的流体层中那些已知类型的有限幅度亚临界平衡态（和实验证据完全一致）。然而，Reynolds和Potter在中性稳定曲线下分支上的点的计算得到了令人吃惊的结果（也被Pekeris和Shkoller的数据证实），δ在这些点是正的（绝对值

相对较小）。所以，如果扰动可以保持非常“纯净”（即较大波数的贡献可以被抑制，显然这在实验上非常难以实现），那么有限幅度的周期性运动理论上在平面泊肃叶流的情形可以存在。

Pekeris和Shkoller（使用在中性曲线附近合理的方程）估计了(k, Re)平面上一个延展区域的系数$\delta = \delta(k, \mathrm{Re})$，得到的结果一般来说和Reynolds和Potter的结论。他们的主要结果在图23d中给出。

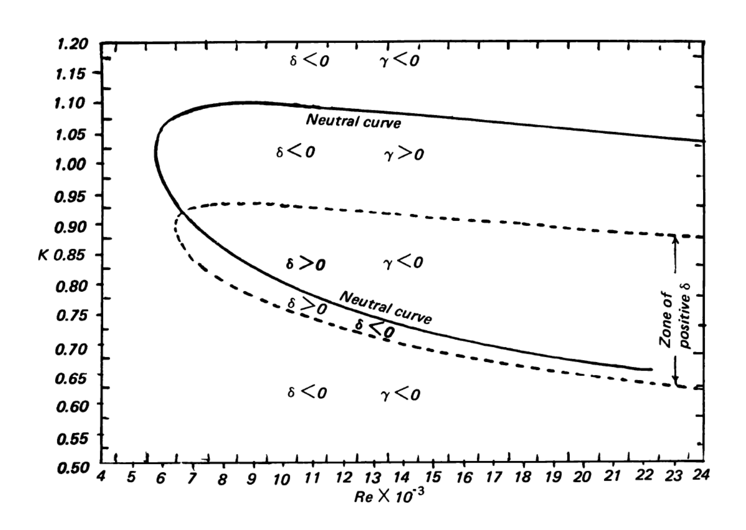


图 23 d 对于平面泊肃叶流情形(k, Re)平面上正的γ和正的δ的区域[根据Pekeris, Shkoller (1967)]。

我们已经指出，对于$\delta < 0$，朗道的方程（2.41）仅对于$\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$的流动中的扰动得到物理上有趣的结果，在$\delta > 0$的情形，仅对$\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$的流动中的有限扰动得到物理上有趣的结果。对于$\delta > 0$和$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$，这个方程没那么有趣，对于$\delta < 0$和$\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$，它快速变得不适用。因此在两种情形，用$|A|^2$的幂展开式的后续项来补充这个方程是合理的。考虑这个展开式的所有项，$d|A|^2/dt$的一般方程显然有这种形式

$$\frac{\mathrm{d}|A|^2}{\mathrm{d}t} = |A|^2 \sum_{m=0}^{\infty} a_m |A|^{2m} \tag{2.54}$$

（由此得到朗道方程，如果我们只考虑右边的头两项）。平面平行流中的二维扰动幅度的（2.54）形式的方程是Watson (1960)借助特殊的展开技术从运动方程得到的。然而，这里，系数$a_m, m > 1$的表达式远比系数$a_1 = -\delta$复杂，所以它们的计算似乎仍然几乎不可能。在接下来Watson (1962)的工作中，基于将二维扰动$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}, t)$表示为$A(x)\boldsymbol{f}(z, t)$的形式（其中线性近似的幅度$A(x)$等于$e^{(k_1+ik_2)x}$）对于平面泊肃叶流进行了类似的分析。

这里得到了$A(x)$的方程，与方程（2.41）和（2.54）的不同仅仅是把t替换为x。这些方程系数的计算与时间依赖的幅度$A(t)$的方程中的系数的计算自然有同样的困难。

对很多其他类型的平面平行流动也可以得到类似的结果。作为一个例子，Reynolds, Potter (1967)研究了不同相对强度库埃特成分（在存在无限小扰动的强度范围）的组合平面库埃特-泊肃叶流的情形[即Potter (1966)和Hains (1967)在线性稳定性理论框架内研究的流动]。对于所有这些流动，(k, Re)平面上的临界点是用线性稳定性理论得到的，非线性分析仅在临界点进行。Reynolds和potter的计算表明，对于所考虑的所有流动，δ在临界点为负，主要由被加数δ_3决定。$|\delta|$对流动的库埃特成分的强度的依赖非常复杂（由两个局域极小）。然而，当$\mathrm{Re} \to \infty$，$\delta \to -\infty$并且这个结果使得即使所有无限小扰动稳定（即，如果$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}} = \infty$），有限扰动也有可能不稳定。

不幸的是，基于中性曲线附近的特殊展开的Stuart-Watson方法不适用于$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}} = \infty$的流体流动（例如，不适用于平面库埃特流，根据实验证据，它对于有限幅度的扰动显然不稳定）。所以在Kuwabara (1967)关于平面库埃特流非线性不稳定性的文章中，Meksyn和Stuart (1951)的近似方法和Galerkin的数学方法联合使用。结果得到了三维空间(k, Re, A)中的“中性稳定面”，其中A是扰动的幅度（以平均能量度量）。根据Kuwabara的结果，如果$\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\mathrm{cr\ min}} \approx 45000$平面库埃特流对于任意（无限小和有限）扰动都是稳定的。在这个临界值以上的每个固定Re，不稳定性仅在(k, A)平面上一个相当小的区域出现。所用的粗略方法显然不足以定量得到严格结果。然而，可以期望Kuwabara的结果在定性上是对的。

对于没有刚性边界、速度分布具有一个拐点的自由平面平行流（图19显示了这种分布的一些例子），线性不稳定性在$\nu = 0$时也发生。所以看起来比较自然的是预期这些流动中扰动的非线性演化可以在理想（非黏性）流体力学的框架内解释。Schade (1964)进行了这个方向的第一个尝试，他考虑了对于整个空间中速度分布为$U(z) = U_0 \tanh(z/H)$的理想流体流动确定朗道的系数δ的问题。Schade引入了一些简化假设并使用它们解析地确定了这个流动的δ[也参见Michalke (1965a)和Stuart （1967）对Schade的工作的讨论]。因为这样得到的δ值是正的，根据Schade的理论，具有双曲正切速度分布的自由剪切层中的不稳定扰动在$t \to \infty$时一定会趋向于有限周期性平衡态。对于一个相对接近剪切层原点的区域（对应于不太大的t值），这个结论和Michalke (1965a) 和Stuart (1967) 类似地得到的平衡态的定性性质和Sato (1956, 1960)、Freymuth (1966)、Browand (1966)和其他实验符合得很好。然而Schade的解析结果非常可疑，因为他的一些

假设显然不对[见Michalke (1968)的综述课程对这个问题的讨论]。同样值得注意的时，Schade的基本流不会被扰动改变的假设和Stuart (1967)发现的具有双曲正切速度轮廓的自由剪切层中性稳定性问题的非线性方程的严格解矛盾。Schade的结果和Gotoh (1968)也不一致，他对黏性流体流动考虑了同样的问题，发现常数δ作为雷诺数函数的表达式在$\mathrm{Re} \to \infty$时（即理想流体近似）不趋向于有限极限。然而，Michalke已经注意到（在给本书作者之一的一封信中），对Schade工作的一些反对意见对Gotoh的工作也适用。所以不能认为具有双曲正切速度分布的剪切层的朗道常数的精确值的问题（无论在无黏情形还是在有黏滞情形）已经解决了。

然而，更重要的是，在下游更远的自由剪切层中扰动演化的所有数据都显示出奇特的行为，不可能借助任意系数δ值的扰动幅度的朗道方程来解释。实际上，尽管在边界层原点附近只有最不稳定频率的那些振荡是显著的，但在更下游的地方也会出现一些其他谐波成分，在更远的地方，频谱变成连续的，自由剪切层变为湍动的。此外，当频谱中出现额外的谐波成分，可以观察到显著的效应。一开始，只看到最不稳定的振荡（因而称为基本振荡）的具有两三倍基频的更高次谐波。然而，在更下游的地方，也会出现频率为基频一半的亚谐波成分，在出现后不久就变成流动中最显著的谐波成分（见，例如Sato (1959)和Browand (1966)在存在人工产生的基本振荡时得到的非常好的数据）。基本振荡子作用最简单的非线性机制（通过动力学方程的二次项）可以解释更高次谐波的存在（考虑Stuart-Watson展开方法）。然而，亚谐波振荡的产生不能用这种方法解释。

理论上，亚谐波有可能和剪切层厚度随下游距离的缓慢增长有关。然而，这种解释看起来不太可能。更自然的是认为，自由剪切层中真实振荡的行为和朗道理论预测之间的巨大差异的解释可以不用借助剪切层对严格平面平行性的小的偏离。在下游很远处的剪切层的湍流转捩导致我们假设这里的有限幅度平衡态对小扰动不稳定。Michalke, Timme (1967)试图用扰动剪切层流动的一个特殊的涡旋模型来验证这个假设。他们研究了一个孤立圆柱（即二维）涡旋的无黏不稳定性，发现在剪切层中产生的单个这种类型的涡旋可能对圆柱扰动不稳定。这个事实解释了形成扰动剪切流平衡态的旋涡的破裂和向湍流的转捩。然而，Michalke-Timme模型是一个定性模型，他们的方法是非常粗糙的。更实际的理论必须处理代表扰动剪切层流动的非线性流体动力学方程的严格解，并且研究这些解的稳定性。等价的公式包括考虑自由剪切层中几种不同类波扰动的演化，考虑他们之间的相互作用，即每种扰动对其他扰动演化的影响（这些相互作用的存在从动力学方程的非线性显而易见）。

正如已经提到的其他类型的流体流动，有限扰动的相互作用的问题是流体力学中研究得最少的问题之一。Kelly (1967)得到了第一批结果，涉及自由剪切层中的这种相互作用。他研究了由一个非零平均成分和一个在流动方向随时间周期性变化的成分组成的无黏平面平行剪切流（这样的流动描述了剪切层中单个扰动的平衡态）的稳定性。结果发现流动的周期分量与波长和频率两倍于基本周期分量的扰动的相互作用可以产生波数和频率与这个扰动相同的波，从而可以加强它。结果，频率为基本周期成分一半的亚谐波成分开始增长，和Sato (1959)和Browand (1966)的实验数据完全一致（甚至在一些定量细节上一致）。后来，Kelly (1968)也考虑了两个特定剪切流中的中性稳定扰动相互作用的例子。他证明了共振相互作用是可能的，会增加平均流向扰动传输能量的速率，导致两个扰动同时放大。

扰动相互作用的问题似乎对于平盘上方的边界层中的非线性过程的分析也是重要的。这种情形的线性分析已经在2.8节中详细考虑。特别地，我们已经指出，Schubauer和Skramstad的实验表明，这种流动中不稳定扰动的初始演化和线性Tollmien-Schiichting-Lin理论的结果完全一致。然而，很多研究组随后非常有趣的实验观察[见，例如Schubauer, Klebanoff (1956)、Hama, Long, Hegarty (1957)、Klebanoff, Tidstrom (1959)、Klebanoff, Tidstrom, Sargent (1962)、Kovasznay, Komoda, Vasudeva (1962)、Tani, Komoda (1962)、Hama, Nutant (1963)和Kovasznay (1965)、Stuart (1965)、Tani (1967)的综述文章]确凿地证明，仅在扰动的第一个演化阶段是这样的。在这第一个阶段之后，情况发生可观的变化，一系列事件以确定的顺序发生，最终转变为充分发展的湍流。这一系列事件中最重要的是：1) 出现明显的三维扰动；2) 三维波的非线性放大和出现沿流动的涡旋系统；3) 强剪切层的发展和高频涨落的产生；以及4) 随机“湍流斑”的发展，这些湍流斑的增长和重复并合导致了整个边界层向湍流转捩。

随横向位置变化的弱三维扰动的产生可以用自由流或上游边界层中横向不规则性的影响来解释。对于超临界雷诺数，这些三维波可能是不稳定的，对于足够大的$\mathrm{Re} - \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$，三维波甚至可能变成增长最快的（即最不稳定的）。不稳定三维波的增长显然会导致初始二维扰动变为三维形式。边界层流动中三维特性的发展在使用一种特殊振动带技术（在振动带处人工产生横向周期性波）的“受控”实验中有最好的观察[见，例如，Klebanoff, Tidstrom (1959)、Klebanoff, Tidstrom, Sargent (1962)、Kovasznay, Komoda, Vasudeva (1962)、Tani, Komoda (1962)、Komoda (1967)]。这些实验表明，三维波导致轴沿平均流的整个纵向涡旋系统的发展（这些沿流动方向的涡旋当然非常不同于自由剪切层开始滚转而不失二维结构时观察到的二维横向涡旋）。沿流动方向的涡旋系统的发展导致具有非常明显

三维结构的流动和波动强度在横向$Ox_2 = Oy$急剧重新分布[见从Klebanoff, Tidstrom, Sargent (1962)文章中取得的图24]。这个阶段的扰动的时间演化时非线性的，不考虑不同波之间的相互作用，其理论分析是不可能的。

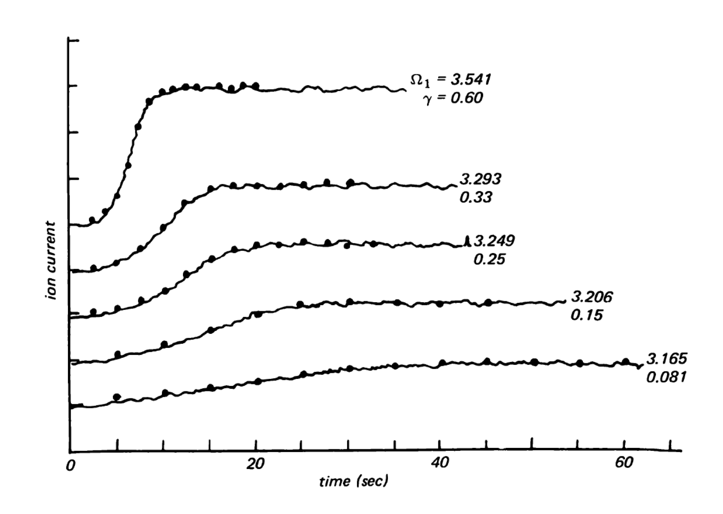


图 24 在距离振荡金属带（它产生了扰动）不同距离x处，纵向速度的典型波动的相对大小U'对平面上方边界层中的“横向”坐标y 的依赖：○-$x = 7.6$ cm；Δ-$x = 15.2$ cm；×-$x = 19$ cm。

为了这个目的，Stuart (1962)考虑了平面平行流中由同样流动方向波数的二维和三维波组成的扰动

$$\boldsymbol{u}(x,y,z,t) = \boldsymbol{A}_1(t)\cos kx f_1(z) + \boldsymbol{A}_2(t)\cos kx \cos ly f_2(z) + \text{小的补充项} \tag{2.55}$$

的行为。使用Stuart (1960)和Watson (1960a)给出的展开技术，Stuart得到了幅度$\boldsymbol{A}_1$和$\boldsymbol{A}_2$的一个（2.49）形式的方程组。所以在此情形也会存在四种类型(I)-(IV)的稳态解，最重要的问题是这些稳态解对某些扰动的稳定性。不幸的是，即使仅对特殊形式（2.55）的扰动的稳定性的定量研究也需要确定相应的方程组（2.49）的系数，这极为困难（我们在本节前面一点指出，系数δ_1等于相应的振幅A_1的朗道方程（2.41）中的系数2δ，仅在最近对一个平面平行流的例子，即对平面泊肃叶流进行了计算）。然而，图24的数据给人的印象是，对于某个k和l，一个类型IV 的混合稳态解可以证明是稳定的，这种稳定性不仅对（2.55）形式的扰动，也对很多其他普通类型的扰动。

基于Benney (1961, 1964)和Lin, Benney (1962)也可以得到类似的结论，他们用不同的方法研究了相同的问题[这个方法也在Betchov, Criminale

(1967)VIII章中给出]。这些作者给出了一系列阶增加扰动的形式

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{u}^{(0)}(\boldsymbol{x})+a\boldsymbol{u}^{(1)}(\boldsymbol{x},t)+a^2\boldsymbol{u}^{(2)}(\boldsymbol{x},t)+... \tag{2.56}$$

的流体力学方程解，其中$a \ll 1$是一个无量纲系数，定义了扰动幅度和未扰动流的幅度$\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x})$的比。在Benney (1961)和Lin, Benney (1962)实际计算中，例子选为$\boldsymbol{u}^{(0)}(\boldsymbol{x})$是无界空间中的平面平行流，速度分布为$U_0(z)=U_0\tanh z$，如图19d 所示，而在Benney (1964)中是半空间$z\geq 0$中的流动，速度轮廓$U_0(z)$线性增加到$z=H$，然后假设为常量$U_0(H)$。两种情形中主要的扰动$\boldsymbol{u}^{(1)}(\boldsymbol{x},t)$都选为这种形式

$$\boldsymbol{u}^{(1)}(\boldsymbol{x},t)=[\mu\boldsymbol{U}_1(z)+\lambda\boldsymbol{u}_1(z)e^{\mathrm{i}ly}]e^{\mathrm{i}k(x-ct)}. \tag{2.57}$$

这里$\boldsymbol{U}_1(z)=[U_1(z),V_1(z)]$，$k$和$c$从通常的（“二维”）线性稳定性理论（对应于比$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$ 大的Re的略微不稳定的扰动）得到，$\boldsymbol{u}_1(z)=[u_1(z),v_1(z),w_1(z)]$从小的三维扰动的线性理论确定，比例$\mu/\lambda$描述了二维和三维扰动的相对角色。计算精确到二阶扰动（量级为a^2）。他们证明，即使$\mu/\lambda\gg 1$，二维和三维扰动的相互作用也会导致形成次级纵向（流动方向）涡旋并可观地将扰动能量在Oy方向重新分布。结果，整体运动[由方程（2.56）右边的三项描述]非常接近与实际在边界层中观察到的运动[具有完全不同的速度分布$U_0(z)$]。

对三维扰动在边界层中湍流转捩过程中的重要作用的阐明促使Meksyn (1964)再次回到平面泊肃叶流对有限扰动稳定性的问题。采用接近Meksyn, Stuart (1951)工作的假设，Meksyn对有限三维扰动进行了类似的分析（速度场为$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\sum_{n_1,n_2}e^{\mathrm{i}[n_1(kx-\omega t)+n_2ly]}\boldsymbol{u}_{n_1,n_2}(z)$，其中$n_1$和$n_2$是任意整数）。在一些非常复杂的近似计算后，他发现对于某些有限三维扰动，临界雷诺数$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$确实非常接近1000，这种流动的$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\ min}}$的实验值。

接下来边界层中湍流转捩的两个阶段（导致“随机”湍流斑的出现和随后转变为充分发展的湍流）的理论研究非常困难，并且目前还没有很大进展。这样的“斑”的出现可能与愈多基本扰动同时变得不稳定，从而形成一个复杂的具有大量自由度的“混合”状态有关。然而，很明显，在这种情况下，具有大剪切区域（和相关拐点）的瞬时速度分布的演化起着重要作用。Betchov (1960)预测了这种具有拐点的大剪切层，是次级流向涡旋叠加在主二维流上的结果。Kovaśznay, Komoda, Vasudeva (1962)和之后的很多研究者[见，例如Tani (1967)和Komoda (1967)]观察了这种剪切层。流动中的大剪切层通常是不稳定的。其厚度和相应的平均速度的降低可能随时间快速变化，导致立即在湍流斑前面形成一个不稳定性急剧增加的流动

区域。Greenspan, Benney (1963)[在线性扰动理论的框架下]对于具有图19c所示类型（速度差为$2U_0 = 2U_0(t)$，厚度为$2H = 2H(t)$）的速度分布的一个时间依赖的剪切层模型进行了相当简单的计算，表明这种剪切层的产生可能导致急剧产生小尺度（即高频）涨落，其能量在非常短的时间内达到很大。这些结果和边界层流动的崩溃（即瞬时产生强烈的高频起伏）和向湍流转捩的已有数据在定性上符合得很好[特别参见Miller, Fejer (1964)]。

从大剪切层分离的涡旋[按照Klebanoff et al.(1962)的术语是“发卡涡旋”（hairpin eddies）]是湍流斑的胚胎。在（以比主要的不稳定扰动的波速度更快的速度）向下游传播时，他们破碎为更小的涡旋，核心涡旋再破碎为更小的涡旋（Hama, Long,Hegarty (1957)借助氢气泡水流可视化观察到了这个波破碎的级联过程）。在这个阶段，分布失去规则的“类波”形式，变为复杂的斑状结构。最后阶段是局部斑的增长和它们在充分发展的湍流边界层（其特征是所有点和所有时间的所有流体力学量的完全不规则（“随机”））中的结合。对这种充分发展的湍流的研究将是本书所有剩余章节的主题。然而，我们需要一些概率和随机函数的数学理论的结果。我们现在就简单阐述这些观点。

第2章 湍流的数学描述.平均值和关联函数

3. 取平均的方法.流体动力学变量的场和随机场

3.1 取平均的实用方法和雷诺条件

我们已经提到，液体或气体的湍流运动的特征是存在流体力学变量的无序起伏。所以，流体动力学场的瞬时值对空间和时间的依赖非常复杂和混乱。此外，如果湍流流动在同样的条件下重复建立，这些场的精确值每次都会不同。让我们再次回到图1，这幅图展示了湍流流动中某个流体动力学量对时间的依赖。我们看到，所有这些曲线都由一组多个周期和幅度的涨落组成，互相叠加，没有任何规律。空间中流体动力学变量的瞬时值分布有类似的特征。它们组成了具有多种幅度、波长和取向的三维涨落的无序集合。由于这种极端无序和所有流体动力学量的场随时间和空间的剧烈变化，在湍流的研究中，有必要使用一些平均的方法，让我们可以从初始的流体动力学场转换到更平滑、更规则的流动变量的*平均值*（mean values）。这些变量随后可以用通常数学分析的方法研究。

均值的定义问题是湍流理论中一个微妙的问题，有着悠久的历史。在实践中，为了确定平均值，我们通常在某个时间间隔或空间区域内使用时间和空间平均。我们也可以考虑由方程

$$\overline{f(x_1,x_2,x_3,t)} = \int\int\int\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2, x_3-\xi_3, t-\tau)\omega(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\tau)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_3\mathrm{d}\tau. \tag{3.1}$$

给出的函数$f(x_1,x_2,x_3,t)=f(\boldsymbol{x},t)$的一个更一般的时空平均。这里的上横

杠表示平均，$\omega(\xi,\tau)$是某个权重函数（通常是非负的），满足归一化条件

$$\iiint\int_{-\infty}^{\infty}\omega(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\tau)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_3\mathrm{d}\tau=1. \tag{3.2}$$

如果函数ω在某个四位区域之外等于零，在这个区域内为常数值，那么方程（3.1）就是对一个给定时空区域的简单平均。令$\omega(\xi,\tau)=\omega(\xi)\delta(\tau)$或$\omega(\xi,\tau)=\omega(\tau)\delta(\xi)$，其中$\delta$是狄拉克德尔塔函数，$\omega(\xi)$和$\omega(\tau)$是在某个平行六面体或线段上有常数值而在其外等于零的函数，我们分别得到空间平均和时间平均。然而，很明显，方程（3.1）定义的平均值一般来讲依赖于权重函数ω的形式（特别是，在对某个时间区间或空间区域平均时，它会依赖于区间的长度或这个区域的形式和体积）。所以方程（3.1）给出了很多不同的“平均值”，有必要找到哪个是“最好的”。

在选择某个特别的“平均规则”时，必须首先写出这种规则的一般要求。从湍流理论的观点看，这些一般要求中最重要的当然是，将此规则应用于流体动力学微分方程应该可以得到流体动力学变量平均值的足够简单的方程。为湍流理论奠基的雷诺深谙这个事实。他仅使用了对某个时间区间最简单形式的平均，但同时他指出了适用于流体动力学的任何平均都必须满足的自然的一般性条件。然而，尽管Reynolds (1894)没有写对所有必要的一般性条件，但稍微修改他的假设，容易得到结论，下面五个关系必须被满足：

$$\overline{f+g}=\overline{f}+\overline{g} \tag{3.3}$$

$$\overline{af}=a\overline{f},\ \text{如果}a=\text{常数} \tag{3.4}$$

$$\overline{a}=a,\ \text{如果}a=\text{常数} \tag{3.5}$$

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial s}}=\frac{\partial\overline{f}}{\partial s},\ \text{其中}s\text{是}x_1,x_2,x_3\text{或}t \tag{3.6}$$

$$\overline{\overline{f}g}=\overline{f}\overline{g}. \tag{3.7}$$

现在，条件（3.3）-（3.7）一般被称为雷诺条件（the Reynolds conditions）。

条件（3.6）也可以替换为更一般的条件，平均和取极限的操作可以交换：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}f_n}=\lim_{n\to\infty}\overline{f_n}. \tag{3.6$'$}$$

在方程（3.7）中依次带入$g=1$、$g=\overline{h}$和$g=h'=h-\overline{h}$（我们将总是使用撇来表示相应量的涨落，即对平均值的偏离）并使用方程（3.5）和

（3.3），我们从雷诺条件得到下面重要的结果：

$$\overline{\overline{f}}, \overline{f'} = \overline{f - \overline{f}} = 0, \overline{\overline{f}h} = \overline{f}h, \overline{\overline{f}h'} = \overline{f}\overline{h'} = 0. \quad (3.7')$$

很明显，满足方程（3.2）具有任意权重函数ω的任何平均（3.1）都满足条件（3.3）、（3.4）、（3.5）和（3.6）[或（3.6'）]。这个情况不同于更复杂的条件（3.7）。所以，例如，如果我们在某个区间使用时间或空间平均，那么严格来说，我们可以证明，这个条件对于任意选择的区间不会严格满足。然而论证这个事实并不困难：平均区间的选择可以使得这个条件以相对高的精度近似地满足。为此，只需要平均区间比涨落量$f' = f - \overline{f}$的特征周期长，但比平均量$\overline{f}$的周期短[见，例如Kochin, Kibel', Roze (1964)第2卷第III章，第C部分]。雷诺局限于这类论证。然而，目前这些定性考虑很难令人信服。

将平均间隔取为介于涨落周期和平均场周期之间的可能性假定了湍流运动可以分解为一个相对平滑和缓慢变化的“平均运动”和叠加其上的非常不规则的“涨落运动”，二者特征频率之间有相当大的差距。换句话说，这里假设函数f的傅里叶变换（对时间或坐标）在某个接近于零和某些高频区域（或者高波数区域）不等于零，在这些区域之间等于零。这个图景或多或少对应于实验室中设置的一些人工湍流的实际情况。然而，例如，在地球大气和海洋中的自然湍流运动，它不总是适用的，因为大气和海洋湍流通常有宽的连续谱。

函数f的平均值$\overline{f}$和涨落f'的差别主要是它们的特征周期（或波长）的想法最符合逻辑的推论是，把平均值$\overline{f}$定义为函数f的（傅里叶积分）表示的一部分，对应于对一个范围的相应变量（频率或波数，绝对值小于某个固定的数p_0）值的积分。容易看到这里满足条件（3.3）、（3.4）、（3.5）和（3.6），因为这个平均是方程（3.1）定义的平均的特殊情形。类似地，方程（3.7'）的前两个条件也满足。然而，条件（3.7）一般来说不成立。为了满足这个条件，必须对函数f和g加上一些非常特殊的条件，和这个假设不相容：它们的傅里叶变换在每个地方都不为零[关于这一点，见Izakson (1929)的详细研究和Kampé de Fériet (1951)]。

我们应该进一步提到，Birkhoff, Kampé de Fériet, Rotta和其他一些人发表了很多文章[参考文献可以在例如Kampé de Fériet (1956)的综述文章和Rotta (1960)中找到]，研究一般性“平均操作”。这些工作中假设所讨论的平均操作严格满足雷诺条件（3.3）-（3.7）[或者相关的同样类型的条件]，在泛函空间的一个特定子集（即满足某些特殊条件的函数的集合）上定义。在某些情形，所得到的结果可以给出所有这种操作的一个完备的描述（以抽象代数的术语）。然而，所有这些研究都是形式化的数学研究，其结果在湍流理论中没有直接应用。此外，它们甚至是不必要的，因为在今天的湍流理论中，平均的意义的问题已经以完全不同的方式解决了，并且通过这种方式所有雷诺条件都显然满足（然而，这阐述了新的问题，要满足各态历经条件，我们在下面讨论）。

3.2 流体动力学变量的随机场和概率平均

由方程（3.1）形式的方程定义的时间、空间或时空平均的适用从实用

的观点看是非常方便的，但导致了很多理论计算中不可避免的分析困难。此外，这种类型的平均有很大劣势，最适合给定问题的函数$\omega(\xi,\tau)$的形式的问题必须在每次使用之前解决。由于所有这些原因，在湍流理论中，最好避免使用这种类型的平均，而是采用其他一些定义平均值的方法，具有更简单性质和更普适的方法。我们在本书中将使用的这种类型的一个方便定义可以在将湍流中流体动力学变量场处理为随机场的概率论处理中找到。

湍流理论的概率论方法（或者更通常地，统计方法）的基本性质是从对单个湍流的考虑转变为对某一组固定外部条件下产生的*所有相似流动的统计系综*的考虑。为了理解这一点的意义，让我们考虑特殊的一类风洞中流过一个圆柱的流动的例子。经过这种圆柱的层流和湍流之间的根本差异如下：对于层流，如果我们在两个相同的风洞中相似的位置放置两个完全相同的圆柱（或者基本上相同地，以相同的圆柱和相同的风洞重复实验两次），那么在启动引擎后给定的时间t和风洞工作面上给定的点$\boldsymbol{x}$，我们应该得到相同的$u_1(\boldsymbol{x},t)$值[速度沿Ox_1轴的速度分量]以及相同的流动的其他流体动力学量的值（原则上这在每个情形可以借助同样的边界条件和初始条件的纳维-斯托克斯方程的求解得到）。然而，对于湍流，流动中小的不可控扰动的效应和初值条件导致一个情形，当实验在实际上相同的条件下再做一次时，我们会得到两个不同的$u_1(\boldsymbol{x},t)$和其他流体动力学变量值。因此，在此情形可以引入这个概念，“在给定外部条件经过一个圆柱的湍流的所有可能实验中得到的所有$u_1(\boldsymbol{x},t)$值的系综”，在任何实际的实验中得到的$u_1(\boldsymbol{x},t)$值被认为是从这个系综中随机选出的一个“实现”。[1]

如果我们固定外部条件并在这些条件下重复实验很多次，记录每次得到的$u_1(\boldsymbol{x},t)$值，那么所有这些值的算术平均实际上是相当稳定的。换句话说，如果一开始我们有足够数量的实验，那么当这个数量进一步增长，平均值通常变化非常小，在某个常量附近振荡（这种平均值的稳定性表明我们的类似实验的集合实际上组成了一个统计系综）。在此情形，$u_1(\boldsymbol{x},t)$的算术平均振荡所围绕的值称为速度$u_1(\boldsymbol{x},t)$的*概率平均*，记作$\overline{u_1(\boldsymbol{x},t)}$。（从此以后，我们将总是使用上横杠表示概率平均。）

类似地，我们发现从类似实验的整个系综中取得的所有其他流体动力学变量的平均值是稳定的，对于足够大量的实验，通常仅略微偏离

[1]这里我们必须注意到在自然湍流（例如大气湍流）的情形，相似实验集合的选择会产生更大的困难，因为“外部条件”（在此情形主要是气象条件）不可能在我们希望的时候重复。同样在此情形，我们通常也能够选择一些情形，其中确定一个给定测量量所必须的所有条件（例如，对于在高度2 m处风速的测量，存在平均风速、风速梯度和温度梯度以及风的方向）实际上相同。此外，这些情形的系综也形成一个“相似实验”的统计系综，这和相同的风洞中经过相同的圆柱的所有可能流动的系综类似。

某个常数值。我们特别感兴趣的是指标函数$\chi_{u_1(\boldsymbol{x},t)}(u',u''), u''>u'$，它在$u_1(\boldsymbol{x},t)$值大于$u''$或小于$u'$时等于零，其他时候等于1。这个指标函数的算术平均振荡所围绕的值$p(u',u'')$显然等于实验发生的频率，其中$u_1(\boldsymbol{x},t)$值满足不等式$u'\le u_1(\boldsymbol{x},t)\le u''$。这个数$p(u',u'')$被称为$u_1(\boldsymbol{x},t)$取$u'$和$u''$之间的值的概率。通常这个数$p(u',u'')$可以用某个被称为$u_1(\boldsymbol{x},t)$的概率密度函数（或者简单称为概率密度）的非负函数$p(u)$从$u'$到$u''$ 的积分来代表。所以，所有使$p(u)\neq 0$的u的集合给出我们已经提到的"$u_1(\boldsymbol{x},t)$可能值的集合"。我们把一个实验中观察到的实际$u_1(\boldsymbol{x},t)$值称为速度的x_1分量的样本值（或者一个实现）。密度$p(u)$存在的事实有事表达为如下形式：

$$P\{u<u_1(\boldsymbol{x},t)<u+\mathrm{d}u\}=p(u)\mathrm{d}u,$$

其中符号$P\{...\}$表示满足大括号中指定条件的概率。所以，$u_1(\boldsymbol{x},t)$的概率平均$\overline{u_1(\boldsymbol{x},t)}$显然可以用$p(u)$表示为

$$\overline{u_1(\boldsymbol{x},t)}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}up(u)\mathrm{d}u. \tag{3.8}$$

同时，概率密度$p(u)$的知识也使我们可以确定$u_1(\boldsymbol{x},t)$的任意函数的概率平均：

$$\overline{F[u_1(\boldsymbol{x},t)]}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(u)p(u)\mathrm{d}u.$$

在概率理论中，具有确定概率密度的变量u被称为随机变量。所有对应于u的可能概率$p(u',u'')=P\{u'<u<u''\}$被称为它的概率分布。

所以我们可以得出结论，从概率论观点看，湍流中一个点的速度值是一个确定概率分布描述的随机变量。

到目前为止，我们仅讨论了一个确定点$\boldsymbol{x}$在一个确定时刻t的速度分量值$u_1(\boldsymbol{x},t)$。然而，我们可以应用类似的方法到整个$u_1(\boldsymbol{x},t)$场，即四个变量的函数$u_1(\boldsymbol{x},t)=u_1(x_1,x_2,x_3,t)$。重复同样外部条件下同样的实验（建立同样的湍流）数次，我们每次可以得到一个新的场$u_1(\boldsymbol{x},t)$。这里，我们也可以说"可能的场$u_1(\boldsymbol{x},t)$的系综"。此外，每个实际湍流中观察到的单独的场被认为是从这个系综中选择的"代表"[换句话说，作为随机场$u_1(\boldsymbol{x},t)$的一个样本值或实现]。现在只剩下考虑如何重新表述一个单独的值$u_1(\boldsymbol{x},t)$的概率密度存在性的命题。

为了使场$u_1(\boldsymbol{x},t)$是随机的，首先这个场在固定的时空点$M=(\boldsymbol{x},t)$的值$u_1(M)=u_1(\boldsymbol{x},t)$必须为随机变量。所以依赖于$M=(\boldsymbol{x},t)$的概率密

度$p_M(u)$必须对应于每个$\boldsymbol{x}$和t的组合。然而，这还不是所有的要求：如果我们选择我们速度分量的两个值$u_1(M_1)=u_1(\boldsymbol{x}_1,t_1)$和$u_1(M_2)=u_1(\boldsymbol{x}_2,t_2)$，那么这两个值的任意函数的算术平均都应该是统计稳定的。这意味着对应值$u_1(M_1)$和$u_1(M_2)$，必须存在一个二维概率密度$p_{M_1M_2}(u_1,u_2)$，由这个关系定义：

$$P\{u_1<u_1(M_1)<u_1+\mathrm{d}u_1,u_2<u_2(M_2)<u_2+\mathrm{d}u_2\}=p_{M_1M_2}(u_1,u_2)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2.$$

换句话说，对于同样外部条件下大量湍流中$u_1(M_1)$和$u_1(M_2)$值的变化，$u_1(M_1)$值处于u_1'到u_1''范围并且同时$u_1(M_2)$值处于u_2'到u_2''范围的那些情形的比例一定会在某个固定值附近振荡[等于某个非负函数$p_{M_1M_2}(u_1,U_2)$ 从u_1'到u_1''以及从u_2'到u_2''的二重积分]。此外，如果$M_1=(x_1,t_1)$、$M_2=(x_2,t_2)$、...$M_N=(x_N,t_N)$是N个任意时空点，那么必然存在一个相应的N变量函数

$$p_{M_1M_2\ldots M_N}(u_1,u_2,...,u_N), \tag{3.9}$$

由这个关系定义

$$\begin{aligned}&P\{u_1<u_1(M_1)<u_1+\mathrm{d}u_1,u_2<u_1(M_2)<u_2+\mathrm{d}u_2,...,u_N<u_1(M_N)<u_N+\mathrm{d}u_N\}\\&=p_{M_1M_2\ldots M_N}(u_1,u_2,...,u_N)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2...\mathrm{d}u_N.\end{aligned}$$

这个函数是N个随机变量$u_1(M_1)$、$u_1(M_2)$、...$u_1(M_N)$的N维概率密度。所有可能的概率密度的存在证明了把$u_1(\boldsymbol{x},t)$考虑为随机的是合理的。为了完全确定它（即在所有可能的场的泛函空间中确定概率分布），有必要确定对应于所有可能的正整数N和所有可能的N个时空点的整族函数（3.9）。所以，如果湍流有同样的（一维和多维）概率密度，那么我们可以认为它们是相同的。于是，如果某个密度的集合接近描述一个给定湍流的密度集合，那么这个集合就定义了这个流动某个近似统计模型。

函数（3.9）显然必须都是非负并且每个函数对所有变量的积分等于1。此外，它们必须也满足某些对称性和一致性条件。所以根据这个定义，对于任意$M_1,M_2,...,M_N$的密度（3.9）必须满足方程

$$p_{M_1M_2\ldots M_N}(u_1,u_2,...,u_N)=p_{M_{i_1}M_{i_2}\ldots M_{i_N}}(u_{i_1},u_{i_2},...,u_{i_N}), \tag{3.10}$$

其中$i_1,i_2,...,i_N$是整数$1,2,...,N$的任意交换。进一步，如果$n<N$，那么对

于任意N个点$M_1, M_2, ..., M_n, M_{n+1}, ..., M_N$，必须满足方程

$$p_{M_1...M_n}(u_1,...,u_n) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} p_{M_1...M_nM_{n+1}...M_N}(u_1,...,u_n,u_{n+1},...,u_N)\mathrm{d}u_{n+1}...\mathrm{d}u_N. \tag{3.11}$$

具有性质（3.10）-（3.11）和对于所有$M=(\boldsymbol{x},t)$有$\int_{-\infty}^{\infty} p_M(u)\mathrm{d}u = 1$的非负函数族（3.9）定义了四变量函数$u_1(M)=u_1(\boldsymbol{x},t)$空间的概率分布[即，它定义了一个随机场$u_1(M)=u_1(\boldsymbol{x},t)$]。对于

$$u_1 = u_1(M_1), u_2 = u_1(M_2), ..., u_N = u_1(M_N)$$

的任意函数$F(u_1,u_2,...,u_N)$的概率平均$\overline{F}$由这个积分定义

$$\overline{F} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} F(u_1,u_2,...,u_N)p_{M_1M_2...M_N}(u_1,u_2,...,u_N)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2...\mathrm{d}u_N, \tag{3.12}$$

其中$p_{M_1M_2...M_N}(u_1,u_2,...,u_N)$是相应的概率密度。

假设湍流中$u_1(\boldsymbol{x},t)$场，余下速度分量、压强$p(\boldsymbol{x},t)$、密度$\rho(\boldsymbol{x},t)$[在可压缩流体情形]、温度$T(\boldsymbol{x},t)$[在流体温度不均匀时]和其他流体动力学变量的场也是随机场是很自然的。在此情形，每个场都有一个相应的多维概率密度（3.9）。此外，湍流中不同流体动力学场是统计相关的，必须考虑这些场在也存在一个场在给定的N_1个时空点的值、第二个场在N_2个点的值、第三个场在N_3个点的值等等的联合概率密度。因此，如果我们有湍流的流体动力学变量的任意函数，我们可以用这个函数和所有宗量的联合概率密度乘积的对这些宗量的整个变化范围积分确定其平均值[参见方程（3.12）]。于是条件（3.3）-（3.7）会变为熟知的概率平均的性质，其证明在概率论教科书中可以找到。所以，它们是严格满足的，不需要特别证明。

3.3 各态历经的概念。基本湍流问题的统计公式

3.2节中讨论的方法始于柯尔莫哥洛夫和他的学派[见，例如Millionshchikov (1939)]的工作以及Kampé de Fériet (1939)的工作，把湍流的流体力学变量的场处理为随机场。现在，这个方法通常被所有湍流理论研究接受[见，例如，Kampé de Fériet (1953)特别的综述文章和Obukhov (1954)，以及Hinze (1959)和Lumley, Panofsky (1964)的专著]。采用所有流体动力学场都存在概率分布的假设，我们可以进一步广泛使用现代概率论的数学技术。然后平均运算被唯一定义，并且具有它自然需要的所有性质。然而，有必要指

出，在这种方法中，一个额外的关于理论推导与直接测量数据比较的重要问题出现了。

根据我们的新定义，平均值被理解为所讨论的量的所有可能值的平均。所以，要以相对较高的精度确定经验平均值，我们需要在一长串重复的类似实验中进行大量测量得到的结果。然而，在实践中，我们通常没有这样一系列实验，因此必须用单个实验过程中的数据来确定平均值。[2]在所有这些基于单个实验的情形，我们通常使用数据在某个时间或空间间隔内的简化平均。因此，我们看到概率分布存在的假设本身并不能解决湍流理论中使用普通时间平均或空间平均值的有效性问题，而只是改变了问题的形式。我们现在不必研究特定平均方法的特殊性质，而必须发现通过这些方法获得的经验平均值与概率平均值有多接近（理论只关心这一点）。这个情况完全类似于有限自由度系统在普通统计力学中的情况，其中理论上“对系统所有可能状态的平均”（更通常被称为“系综平均”）也可以由直接观测到的时间平均代替。在统计力学中人们熟知的是，这样的变化通常基于这个假设，当平均区间变得无穷大，时间平均收敛到相应的系综平均。在某些特殊情形，这个假设的正确性可以严格证明（例如，借助G.D. Birkhoff的各态历经定理），而在其他所有情况下，它作为一个额外的极有可能的假设被采用（“各态历经假设”）。在湍流理论中，当平均区间取得无穷大，有时引入时间或空间平均收敛到相应的概率平均的概念作为一种特殊的“各态历经假设”。关于时间平均，这一假设在许多情形下的正确性得到了支持，特别是朗道关于充分发展湍流性质的一般观点的支持，如2.9节中所描述的。然而，我们注意到，在一些情形，用空间或时间平均代替流体动力学场的概率平均的合法性也可以借助随机过程和场论的“各态历经”定理得到严格证明。由于这个问题的重要性，我们将在4.7节中更详细地处理它。然而，在这一点上，我们将尝试将一般的湍流问题表述为相应流体动力学场的概率分布问题。

我们已经看到，对于层流运动，流体动力学方程允许根据流体动力学场的初始值（和相应的边界条件）在任意未来时刻单值地确定流体动力学变量。对于不可压缩流体，只需要知道速度场（或涡度场）的初始值就足够了。然而，在可压缩流体的情形，必须给出五个独立动力学场（例如三个速度分量、压强和温度）的初始值。在湍流中，相应动力学场的初始值也将借助流体动力学方程确定它们所有的未来值。[3]然而，这里，这些未来

[2]在这方面，唯一的例外是湍流扩散实验，其中一整团全同离子被释放（例如一团烟雾），然后“对整团粒子进行平均”。这个对整团粒子的平均是具有确定意义的，等价于对一组类似的实验进行平均。

[3]然而，这里我们必须注意，在湍流理论的文献中，有时提到在湍流中流体动力学方程一般是不适用的。如果完全忽略未证明的论断，那么这里唯一重要的问题是，分子涨落是否能

值相当依赖于极小的对初始条件和边界条件的不可控扰动。此外，它们的形式也会非常复杂而混淆，精确确定它们是没有用的，相应微分方程的积分在实际上是不可能的。这里仅对相应流体动力学场的概率分布感兴趣，对精确值不感兴趣。因此，对于湍流，流体动力学方程仅用于研究相应的概率分布或这些分布定义的值。

此外，我们注意到，为了将流体动力学方程用于由其概率分布定义的随机场，这些分布必须满足一些正则条件，确保相应场的实现可以假设为连续且足够光滑－－具有进入动力学方程的所有空间导数和时间导数。现在让我们假设固定初始时刻$t = t_0$的场值的概率分布满足这些正则条件。在此情形，流体动力学场的每个实际的实现都随时间规则地变化，和对应于给定初始（和边界）条件的解的时间变化一致。于是，整组可能的初始流体动力学场在时间$\tau > 0$后变为严格定义的一组对应于时刻$t = t_0 + \tau$的空间坐标的函数。所以，在时刻$t > t_0$的任何动力学场的概率密度可以从初始概率密度确定（原则上在每个情形）。为了做得这一点，我们只需要借助流体动力学方程计算哪一组初始条件将对应于时刻t场的一个或另一个范围的值，然后求出这组初始条件的概率。所以，在湍流中，流体动力学方程会唯一确定所有流体动力学场的概率分布的时间演化。这意味着，仅可以在一个固定的时刻或多或少任意选择（仅考虑某些“正则条件”）概率分布。于是，所有剩余的在所有可能的时空点对应于流体动力学场的概率分布将唯一地由运动方程确定。于是，湍流理论的基本问题（例如对于不可压缩流体）可以如下表述。给定不同空间点在时刻$t = t_0$的三个速度分量值的概率分布，集中于一组二次可微的无散度矢量场，需要确定所有后续时间速度和压强值的概率分布（包括多个不同时间值的分布）。对应可压缩流体，只需要从五个独立流体动力学量值的概率分布开始，而不是三个速度分量的概率分布。不幸的是，这个一般性问题太难了，目前还没想出得到其完整解的方法。所以我们将推迟进一步考虑这个问题，直到本书第二卷最后一章。在其他章节中我们仅处理更特殊的问题，考虑随机场没那么完备的统计特征，而不是统计分布。

导致能向更小尺度流体动力学扰动传递能量的随机“溅射”，从而激发湍流转捩。目前，普遍认同的是，即使这些过程是可能的，它们的作用在每个情形也极端小，所以作为一阶近似这可以完全忽略（见下面5.1节开头）。

3.4 特征函数和特征泛函

在很多情形，不使用概率分布（3.9）而使用它们的傅里叶变换是方便的：

$$\varphi_{M_1M_2\ldots M_N}(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_N)=\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int e^{\mathrm{i}\sum\limits_{k=1}^{N}\theta_k u_k}p_{M_1M_2\ldots M_N}(u_1,u_2,\ldots,u_N)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\ldots\mathrm{d}u_N. \tag{3.13}$$

这些傅里叶变换被称为相应概率分布的*特征函数*。根据方程（3.12），它们也可以写为

$$\varphi_{M_1M_2\ldots M_N}(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_N)=\overline{\exp\left(\mathrm{i}\sum_{k=1}^{N}\theta_k u_k\right)}. \tag{3.14}$$

很明显特征函数唯一地定义了相应的概率分布，实际上根据熟知的傅里叶积分反演公式，

$$p_{M_1M_2\ldots M_N}(u_1,u_2,\ldots,u_N)=\frac{1}{(2\pi)^N}\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int e^{-\mathrm{i}\sum\limits_{k=1}^{N}\theta_k u_k}\varphi_{M_1M_2\ldots M_N}(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_N)\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2\ldots\mathrm{d}\theta_N. \tag{3.15}$$

所以给出特征函数等价于给出相应的概率分布。

根据定义，特征函数是宗量$\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_N$的复值连续函数，具有如下性质：

$$\varphi_{M_1M_2\ldots M_N}(0,0,\ldots,0)=1 \tag{3.16}$$

和

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\varphi_{M_1M_2\ldots M_N}\left(\theta_1^{(k)}-\theta_1^{(l)},\theta_2^{(k)}-\theta_2^{(l)},\ldots,\theta_N^{(k)}-\theta_N^{(l)}\right)c_k c_l^*\geq 0 \tag{3.17}$$

（其中星号表示复共轭）对于任意整数n，任意实数$\theta_1^{(l)},\ldots,\theta_1^{(n)},\theta_2^{(l)},\ldots,\theta_2^{(n)},\ldots,\theta_N^{(l)},\ldots,\theta_N^{(n)}$和任意复数$c_1,\ldots,c_n$。实际上，方程（3.17）的左边等于非负物理量

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\exp\left(\mathrm{i}\sum_{l=1}^{N}\theta_l^{(k)}u_l\right)\right|^2$$

的平均值，这个量遵循给定的不等式。也可以证明，具有性质（3.16）和（3.17）的任意N变量连续函数是某个N维概率分布的特征函数[当然，它可能没有概率密度，对应于，例如，一个分立的类型，见Bochner (1933, 1959)]。我们将在本书第二卷再次提到这个事实。

不难看出，对称性和相容性条件（3.10）和（3.11）应用于特征函数会变为

$$\varphi_{M_1M_2\ldots M_N}(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_N)=\varphi_{M_{i_1}M_{i_2}\ldots M_{i_N}}(\theta_{i_1},\theta_{i_2},\ldots,\theta_{i_N}), \tag{3.18}$$

$$\varphi_{M_1M_2\ldots M_n}(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)=\varphi_{M_1\ldots M_nM_{n+1}\ldots M_N}(\theta_1,\ldots,\theta_n,0,\ldots,0). \tag{3.19}$$

所以任意流体动力学量的随机场也可以定义为一族满足方程（3.18）和（3.19）的特征函数（3.14）。

由方程（3.19）看到，一个给定N点集合上的场值概率分布的特征函数以一种极为简单的方式确定了这些点的子集上的场值的特征函数。所以很自然地立即尝试借助一个单一的量——“所有可能点上的场值概率分布的特征函数”来确定表征这个场的所有概率分布。可以发现这种借助一个单一量——“特征函数”定义随机场实际上是可能的（这是使用基于特征函数而不是概率密度的方法最重要的优势）。这种定义随机函数的可能性首先

由Kolmogorov (1935)指出。从那以来，很多工作都致力于这个问题，既从纯数学的视角，也从应用的视角（在后者中，必须特别注意Hopf (1952)重要的文章，我们将在本书第二卷更详细地讨论）。这里我们只对问题的本质作一个简单的描述，不讨论数学上的细节。

为了简单，我们将首先考虑一个定义在x轴有限区间$a \le x \le b$的单变量随机函数$u(x)$，而不是四个变量的随机场。函数$u(x)$由这个函数在任意N点$x_1, x_2, ..., x_N$（$a \le x_k \le b$）系统的值$u(x_1), u(x_2), ..., u(x_N)$的所有概率分布定义。现在我们让数$N$变得无穷大，选择点$x_k$使得所有相邻两点的距离趋向于零，选择参数$\theta_k$为$x_{k+1} - x_k$和某个定义在$[a, b]$的函数$\theta(x)$在$x_k$点的值的乘积。如果函数$\theta(x)$使得积分

$$u[\theta(x)] = \int_a^b \theta(x)u(x)\mathrm{d}x \tag{3.20}$$

对函数$u(x)$的几乎所有实现都存在，[4]那么$\sum_{k=1}^{N} \theta_k u_k$ 将随$N \to \infty$ 趋向于积分（3.20）。在方程（3.14）中取$N \to \infty$的极限，我们得到

$$\varphi[\theta(x)] = \overline{\exp\{iu[\theta(x)]\}} = \overline{\exp\left\{i\int_a^b \theta(x)u(x)\mathrm{d}x\right\}}. \tag{3.21}$$

$\varphi[\theta(x)]$是随机变量$u[\theta(x)]$在这个函数的宗量等于1时的特征函数值。所以，对于给定的$\theta(x)$，这会变为某个复数。方程（3.21）为每个函数$\theta(x)$指定了某个复数，即$\varphi[\theta(x)]$是一个函数的函数，它通常被称为*泛函*。我们称这个泛函为随机函数$u(x)$的*特征泛函*。

如果我们知道某个随机函数$u(x)$的特征泛函，那么我们可以确定所有有限维概率密度$p_{x_1,x_2,...,x_N}(u_1, u_2, ..., u_N)$。为此，把泛函$\varphi[\theta(x)]$的宗量$\theta(x)$替换为特殊函数

$$\theta(x) = \theta_1\delta(x - x_1) + \theta_2\delta(x - x_2) + ... + \theta_N\delta(x - x_N) \tag{3.22}$$

就足够了，其中$\theta_1, ..., \theta_N$是任意数，$\delta(x)$是狄拉克德尔塔函数，所以方程（3.22）在点$x_1, x_2, ..., x_N$ 之外等于零。[5]

---

[4]也就是，除了可能总概率等于零的某个例外集合的所有实现。

[5]我们注意到，在特征泛函（3.21）的讨论中，通常假设$\theta(x)$是一个足够光滑的函数（例如，一个连续或连续n阶可导的函数，n是一个给定的数）。因此，严格地说，替代“不当函数”（3.22）我们必须考虑一系列光滑函数$\theta^{(n)}(x), n = 1, 2, ...$ 使得对于任意不含有点$x_i, i = 1, 2, ..., N$的区间$[\alpha, \beta]$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta \theta^{(n)}(x)\mathrm{d}x = 0$$

而对于任意小的$\varepsilon > 0$和$i = 1, 2, ..., N$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} \theta^{(n)}(x)\mathrm{d}x = \theta_i.$$

在此情形

$$\lim_{n\to\infty} \varphi[\theta^{(n)}(x)] = \varphi[\theta(x)],$$

把方程（3.22）带入（3.21），我们得到

$$\varphi[\theta(x)] = \overline{\exp\left\{ i\sum_{k=1}^{N}\theta_k x_k \right\}} = \varphi_{x_1,...,x_N}(\theta_1,...,\theta_N). \tag{3.23}$$

在此情形，特征泛函将转换为$u(x_1), u(x_2), ..., u(x_N)$的多维概率分布的特征函数，对应的概率密度可以借助傅里叶积分的反演得到。

特征泛函$\varphi[\theta(x)]$有如下性质，类似于任意函数$\theta_1(x), ..., \theta_n(x)$和复数$c_1, ..., c_n$的特征函数

$$\varphi[\theta(x)]|_{\theta(x)\equiv 0} = 1, \tag{3.24}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\varphi[\theta_k(x) - \theta_l(x)]c_k c_l^* \geq 0 \tag{3.25}$$

（后一个性质被称为泛函$\varphi[\theta(x)]$的正定性）的性质（3.16）和（3.17）。然而，逆命题，即一个连续的（在某种自然的意义下）具有性质（3.24）的正定泛函$\varphi[\theta(x)]$总是某个随机函数的特征泛函，仅在采用了比这里一般得多的随机函数的定义才是正确的[见Gel'fand,Vilenkin (1964), Prokhorov(1961)]。

当我们考虑一个依赖于四个变量的随机场$u_1(\boldsymbol{x}, t)$而不是一个变量的随机函数$u(x)$，这个过程完全类似。这里，特征泛函为

$$\varphi[\theta(\boldsymbol{x}, t)] = \overline{\exp\left\{ i\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\int\theta(\boldsymbol{x}, t)u_1(\boldsymbol{x}, t)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}t \right\}}, \tag{3.26}$$

含有函数$\theta(\boldsymbol{x}, t)$的四个变量作为宗量。[6]

在此情形，特征泛函将唯一定义场$u_1(\boldsymbol{x}, t)$的所有概率分布[具有和方程（3.24）和（3.25）类似的性质]。

在考虑随机场的多个统计相关的随机函数时，必须考虑一个依赖于多个函数的特征函数。于是，例如，湍流速度场$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \{u_1(\boldsymbol{x}, t), u_2(\boldsymbol{x}, t), u_3(\boldsymbol{x}, t)\}$唯一由特征泛函

$$\varphi[\theta(\boldsymbol{x}, t)] = \varphi[\theta_1(\boldsymbol{x}, t), \theta_2(\boldsymbol{x}, t), \theta_3(\boldsymbol{x}, t)] = \overline{\exp\left\{ i\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\int\sum_{k=1}^{3}\theta_k(\boldsymbol{x}, t)u_k(\boldsymbol{x}, t)\mathrm{d}\boldsymbol{x}dt \right\}} \tag{3.27}$$

定义，依赖于三个四变量函数。一般来说，对于空间点$\boldsymbol{x}$中的一个N维随机场$u(\boldsymbol{x}) = \{u_1(\boldsymbol{x}), ..., u_N(\boldsymbol{x})\}$，我们有

$$\varphi[\theta(x)] = \varphi[\theta_1(x), ..., \theta_N(x)] = \overline{\exp\left\{ i\int\sum_{k=1}^{N}\theta_k(x)u_k(x)\mathrm{d}x \right\}}. \tag{3.27'}$$

其中$\theta(x)$是函数（3.22）。所以，对于这个$\theta(x)$的$\varphi[\theta(x)]$的值总是由光滑函数$\theta^{(n)}(x)$的特征泛函。

[6]为了避免无穷远处积分收敛性的困难，我们可以限制于在某个有界四变量空间外恒等于零的函数$\theta(\boldsymbol{x}, t)$。

泛函$\varphi[\theta(\boldsymbol{x})]$也有性质（3.24）和（3.25）[把标量宗量$\theta(x)$替换为矢量宗量$\theta(\boldsymbol{x})$]。在给定时间$t$速度场的概率分布由这个泛函定义

$$\varphi[\theta(\boldsymbol{x},t)] = \overline{\exp\left\{i\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\sum_{k=1}^{3}\theta(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right\}}, \tag{3.28}$$

它依赖于三个变量和一个标量参数t的函数三元组$\theta(\boldsymbol{x}) = \{\theta_1(\boldsymbol{x}), \theta_2(\boldsymbol{x}), \theta_3(\boldsymbol{x})\}$。和本小节开始时关于每个时刻不可压缩流体速度场的概率分布单值依赖于初始时刻$t = 0$的概率分布的论述一致，特征泛函$\varphi[\theta(\boldsymbol{x}), t]$在不可压缩流体情形必须唯一地由其初始值$\varphi[\theta(\boldsymbol{x}), 0]$确定。此外，方程（3.27）的泛函$\varphi[\theta(\boldsymbol{x}), t]$也必须唯一地由$\varphi[\theta(\boldsymbol{x}), 0]$确定。对于可压缩流，情况更复杂。这里我们必须考虑一个这种类型的泛函：

$$\varphi[\theta(\boldsymbol{x}), \theta_4(\boldsymbol{x}), \theta_5(\boldsymbol{x}), t] = \overline{\exp\left\{i\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{3}\theta_k(\boldsymbol{x})u_k(\boldsymbol{x},t) + \theta_4(\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x},t) + \theta_5(\boldsymbol{x})T(\boldsymbol{x},t)\right]\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right\}} \tag{3.29}$$

（$\rho(\boldsymbol{x},t)$是密度场，$T(\boldsymbol{x},t)$是温度场），依赖于五个三变量的函数和一个标量宗量。对于这个泛函，在可压缩流体的情形，在任意时刻$t > 0$必然存在一个对相应初始值$\varphi[\theta(\boldsymbol{x}), \theta_4(\boldsymbol{x}), \theta_5(\boldsymbol{x}), 0]$ 的单值依赖。

4. 流体动力学场的矩量

4.1 随机变量的矩量和积累量

在前一节中，我们看到，对于湍流流体动力学变量的完整统计规范，我们必须为这些变量在所有可能的时空点上的值定义所有的多维概率分布。然而，这些多维分布的确定非常复杂，很少能达到足够的精度。此外，分布本身通常完全不适合实际应用，因为它们很复杂。所以，在实践中，人们几乎总是限制于仅仅考虑教简单的统计参数，描述流动的一些特殊统计性质。

这些参数中最重要的是概率分布的*矩量*。如果我们有一个N随机变量的系统$u_1, u_2, ..., u_N$，N维概率分布为$p(u_1, u_2, ..., u_N)$，那么这些变量的矩量定义为

$$B_{k_1k_2...k_N} = \overline{u_1^{k_1}u_2^{k_2}...u_N^{k_N}} = \int\int\limits_{-\infty}^{\infty}...\int u_1^{k_1}u_2^{k_2}...u_N^{k_N}p(u_1, u_2, ..., u_N)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2...\mathrm{d}u_N, \tag{4.1}$$

其中$k_1, k_2, ..., k_N$是非负整数，它们的和给出了矩量的量级。特别地，一阶矩是物理量$u_1, u_2, ..., u_N$的平均值。

除了通常的矩量$B_{k_1k_2...k_N}$，有时考虑它们的特殊组合是方便的。例如，我们通常使用中心矩，即$u_1,u_2,...,u_N$对相应平均值偏离的矩量：

$$b_{k_1k_2...k_N}=\overline{(u_1-\overline{u_1})^{k_1}(u_2-\overline{u_2})^{k_2}...(u_N-\overline{u_N})^{k_N}}. \tag{4.2}$$

打开方程（4.2）右边的括号，容易讲中心矩$b_{k_1k_2...k_N}$用$B_{k_1k_2...k_N}$和通常的较低阶矩表示出来。特别地，对于$N=1$，我们有

$$\begin{aligned} b_1=0,b_2 &= B_2-B_1^2,b_3=B_3-3B_1B_2+2B_1^3,\\ b_4 &= B_4-4B_1B_3+6B_1^2B_2-3B_1^4,... \end{aligned} \tag{4.3}$$

矩量$b_2=\sigma_u^2$被称为u的方差，$\sigma_u=\sqrt{B_2}$被称为u的标准差。类似地，一般的二阶中心矩$b_11=\overline{(u_1-\overline{u_1})(u_2-\overline{u_2})}$被称为变量$u_1$和$u_2$的协方差。如果$\overline{u_i}=0,i=1,...,N$，那么中心矩和通常的矩量相同，故而$b_{k_1k_2...k_N}$是矩$B_{k_1k_2...k_N}$的特殊情形。如果$u_i$有某种确定的量纲，那么相应的矩量或中心矩也是有量纲的。然而，例如比例

$$\frac{b_3}{b_2^{3/2}}=s,\frac{b_4}{b_2^2}=\delta, \tag{4.4}$$

总是无量纲的。量s被称为随机变量u（或相应概率分布）的偏度（skewness）或偏度因子（skewness factor），δ是平度因子（flatness factor），而差$(\delta-3)$称为超出量（excess）。

矩量$B_{k_1k_2...k_N}$其他特别有趣的组合是积累量（cumulants）（或者半不变量（semiinvariants）$S_{k_1k_2...k_N}$）。这些量的定义稍后给出（4.2节）。现在，我们只需要注意到，积累量$S_{k_1k_2...k_N}$（类似中心矩$b_{k_1k_2...k_N}$）是通过从矩量$B_{k_1k_2...k_N}$中减去一个低阶矩量的特殊多项式得到的。特别地，对于$N=1$，头五阶积累量由下面的方程给出：

$$\begin{aligned} S_1 &= B_1,S_2=B_2-B_1^2=b_2,S_3=B_3-3B_1B_2+2B_1^3=b_3,\\ S_4 &= B_4-4B_1B_3-3B_2^2+12B_1^2B_2-6B_1^4=b_4-3b_2^2,\\ S_5 &= b_3-10b_2b_3. \end{aligned} \tag{4.5}$$

在多维情形，二阶和三阶积累量也和相应的中心矩相同，而一般的四阶积累量为

$$S_{1111} = b_{1111} - b_{1100}b_{0011} - b_{1010}b_{0101} - b_{1001}b_{0110}. \tag{4.6}$$

从下面的论述可以清楚地看出，在某些情况下，积累量特别适合表征概率分布。然而，目前，我们将限制我们的讨论，如已经指出的那样。

$u_1, u_2, ..., u_N$的各个矩量不能假设任意值，而必须满足某些不等式形式的条件。所以，例如，如果所有指数$k_1, k_2, ..., k_N$是偶数，那么矩量$B_{k_1 k_2 ... k_N}$显然不能是负的。进一步，如果$N = 1$，那么

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} B_{k+l} c_k c_l \geq 0, \tag{4.7}$$

其中$B_0 = 1$，$c_0, c_1, ..., c_n$是任意实数，因为方程（4.7）左边等于非负量$\left[\sum_{k=0}^{n} c_k u^k\right]^2$的平均值。取$n = 2$和$c_0 = 0$，特别地我们得到

$$|B_3| \leq (B_2 B_4)^{1/2} \text{和} |s| \leq \delta^{1/2} \tag{4.8}$$

（因为b_k是矩量B_k的特殊情形）。对高阶矩和多维分布的矩也可以推导类似的不等式。然而，即使在这些极限之内，各个矩量可能值选择的任意性仍然非常大。所以，所有矩的确定无一例外地提供了有关概率分布的大量信息。

在很多情形，定义所有矩量等价于定义分布本身（见下面本小节末）。因此，使用所有相应的矩量而不是概率密度不会导致统计描述完备性的损失。然而，在实践中，从来不知道所有矩量，所以通常仅考虑某些低阶矩量。当然，这些矩量没有提供分布的单值定义，而仅仅描述了它的某些特殊性质。然而，仅仅基于考虑一些低阶矩量的研究随机变量的方法通常非常有价值。之后，我们将看到在湍流理论中，这个方法使得我们可以得到一系列相当有趣的结果。

容易看到，随机变量$u_1, ..., u_N$的矩可以简单用相应的特征函数$\varphi(\theta_1, ..., \theta_N)$表示。实际上，通过比较方程（4.1）和（3.13）得到

$$\begin{aligned} B_{k_1 k_2 ... k_N} &= (-i)^K \left. \frac{\partial^K \varphi(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_N)}{\partial\theta^{k_1}\theta_1 \partial\theta^{k_2}\theta_2 ... \partial\theta^{k_N}\theta_N} \right|_{\theta_1=\theta_2...=\theta_N=0}, \\ K &= k_1 + k_2 + ... + k_N. \end{aligned} \tag{4.9}$$

特别地，如果特征函数可以由泰勒级数代表，那么

$$\varphi(\theta_1,\theta_2,...,\theta_N)=\sum_{k_1,k_2,...,k_N} i^K \frac{B_{k_1k_2...k_N}}{k_1!k_2!...k_N!}\theta_1^{k_1}\theta_2^{k_2}...\theta_N^{k_N}. \tag{4.10}$$

所以，在此情形，如果我们知道分布的所有矩量，那么我们可以唯一地确定特征函数（和概率密度）。不难证明从矩量确定密度的唯一性在级数（4.10）仅在$\theta_1,\theta_2,...,\theta_N$值的某些区域收敛时也成立[对于一维情形，这个唯一性的一般条件在，例如，Akhiezer (1965)的书中给出]。

同样使用特征函数，容易写出随机变量积累量的一般定义。为此，我们必须考虑特征函数$\psi(\theta_1,\theta_2,...,\theta_N)=\ln\varphi(\theta_1,\theta_2,...,\theta_N)$的对数。于是积累量$S_{k_1k_2...k_N}$ 定义如下：

$$\begin{aligned} S_{k_1k_2...k_N} &= (-i)^K \left.\frac{\partial^K\psi(\theta_1,\theta_2,...,\theta_N)}{\partial\theta^{k_1}\theta_1\partial\theta^{k_2}\theta_2...\partial\theta^{k_N}\theta_N}\right|_{\theta_1=\theta_2...=\theta_N=0}, \\ K &= k_1+k_2+...+k_N. \end{aligned} \tag{4.11}$$

考虑到$\varphi(0,0,...,0)=1$，容易得到方程（4.5）-（4.6），并且一般地用矩量或中心矩表示积累量。

4.2 随机场的矩量和积累量

在湍流理论中，我们关心一个四维时空点M的随机场-随机函数$u(M)$。这个场的K阶矩是这个场的K个值乘积的平均值

$$B_{uu...u}(M_1,M_2,...,M_K)=\overline{u(M_1)u(M_2)...u(M_K)}. \tag{4.12}$$

这些矩量依赖于取这些值的点的坐标。所以K阶矩一般来说是一个$4K$变量的函数。然而，我们必须记住，某些点$M_1,M_2,...,M_K$可能会和互相重合。它们中不同点的数量定义了矩的“类型”。在这方面，我们将区分一点、两点、三点等类型的矩量（更简单地说，一点、两点、三点等等矩量）。如果矩量的类型小于阶，那么相应的矩量

$$\overline{[u(M_1)]^{k_1}[u(M_2)]^{k_2}...[u(M_N)]^{k_N}}$$

用符号$B_{u...u,u...u,...,u...u}(M_1,M_2,...,M_N)$标记，其中对应于不同时空点的下标组用逗号分隔。

几个统计相关的不同随机场值乘积的平均值被称为这些场的联合矩（joint moments）。所以，例如，速度矢量$\boldsymbol{u}(M)=\{u_1(M),u_2(M),u(M_3)\}$的场有$3^K$个不同的（通常的和联合的）$K$阶矩量，共同组成了一个秩为$K$的

三维矩张量。特别地，我们有速度场最重要的两点二阶和三阶矩张量：

$$\begin{aligned} B_{ij}(M_1, M_2) &= \overline{u_i(M_1)u_j(M_2)} \\ B_{ij,k}(M_1, M_2) &= \overline{u_i(M_1)u_j(M_1)u_k(M_2)} \end{aligned} \tag{4.13}$$

（其中张量$B_{ij,k}$显然对于指标i和j是对称的）。类似的符号将用于其他流体动力学场的联合矩。例如，压强和速度或压强和温度的两点联合矩可以分别用符号$B_{pj}(M_1, M_2), j = 1, 2, 3$或$B_{pT}(M_1, M_2)$标记。对于阶比类型高的矩量，和不同点相关的指标组用逗号分隔。例如，$B_{ij,p,Tkl}(M_1, M_2, M_3)$标记速度、压强和温度的三点六阶矩，含有速度的四个分量，形成了一个秩为四、在指标对i,k和k,l中对称的张量。具有非零平均值的场的中心矩（即流体动力学场的涨落——对平均值的偏离的矩量）的标记方式和通常的矩量相同，但是B替换为b或者在相应的指标上加“撇”。一点矩量也可以通过在有关符号上方加一横方便地表示（例如$\overline{u^k}$或$\overline{uv}$）。对于$u(M)$场的方差$b_{uu}(M) = \overline{[u(M) - \overline{u(M)}]^2}$，我们有时也可以使用特殊的符号$\sigma_u^2$或$U'^2$（我们已经在第2节使用了后一个，例如图7和24）。

当宗量$M_1, M_2, ..., M_K$是任意四维时空点，我们把相应的矩量称为时空矩量（space-time moments）。然而，通常在湍流理论中仅考虑所有场在同一时刻的值的矩量。这些矩量通常称为空间矩量。有时我们也处理时间矩量——同一点（不同时刻）的流体动力学场值乘积的平均值。从此以后，当我们简单说“矩量”的时候，我们总是指平均空间矩量。另一方面，如果我们讨论时间或时空矩量，我们总会特别指出。

在本书中，我们会经常处理关联函数，即两点二阶矩。[7] 场$u(M)$ 的关联函数$B_{uu}(M_1, M_2) = \overline{u(M_1)u(M_2)}$ 对称地依赖于宗量M_1 和M_2，

$$B_{uu}(M_1, M_2) = B_{uu}(M_2, M_1). \tag{4.14}$$

此外，它具有性质

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{uu}(M_i, M_j)c_i c_j \geq 0 \tag{4.15}$$

对于任意非负整数n和任意选择的n点$M_1, ..., M_n$和n个实数$c_1, ..., c_n$，因为方程（4.15）左边等于非负量$\left[\sum_{i=1}^{n} u(M_i)c_i\right]^2$的平均值。特别地，当$n = 2$，

[7] 文献中通常碰到其他术语。例如，在数学工作中，函数$B_{uu}(M_1, M_2)$或者中心函数$b_{uu}(M_1, M_2)$通常被称为协变量（或者协变函数），而术语关联函数（或自相关函数）通常保留给相关系数$b_{uu}(M_1, M_2)/\sigma_u(M_1)\sigma_u(M_2)$。

我们有不等式

$$|B_{uu}(M_1, M_2)| \leq [B_{uu}(M_1, M_1)]^{1/2}[B_{uu}(M_2, M_2)]^{1/2}, \tag{4.16}$$

这是从方程（4.15）得到的。之后，我们将看到任何满足方程（4.14）和（4.15）的函数$B_{uu}(M_1, M_2)$都可能是某个随机场的关联函数（见4.3节）。两点联合矩$B_{uv}(M_1, M_2) = \overline{u(M_1)v(M_2)}$通常被称为场$u$和$v$的*交叉相关函数*。这个函数满足类似于方程（4.16）的不等式

$$|B_{uv}(M_1, M_2)| \leq [B_{uu}(M_1, M_1)]^{1/2}[B_{vv}(M_2, M_2)]^{1/2}, \tag{4.17}$$

此外，很显然

$$B_{uv}(M_1, M_2) = B_{vu}(M_2, M_1). \tag{4.18}$$

如果我们定义$B_{ij}(M_1, M_2) = \overline{u_i(M_1)u_j(M_2)}$，其中$u_1(M), ..., u_N(M)$是$N$个随机场，于是

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{k_ik_j}(M_i, M_j)c_ic_j \geq 0 \tag{4.19}$$

对于任意选择的点$M_1, ..., M_n$，实数$c_1, ..., c_n$和整数$k_1, ..., k_n$（取值从1到N）。阶数高于2的两点矩代表某些新的场（原始场的乘积）的关联函数。这种两点矩有时称为*高阶关联函数*。

中心两点二阶矩

$$b_{uu}(M_1, M_2) = \overline{[u(M_1) - \overline{u(M_1)}][u(M_2) - \overline{u(M_2)}]} = B_{uu}(M_1, M_2) - \overline{u(M_1)}\,\overline{u(M_2)} \tag{4.20}$$

和

$$b_{uv}(M_1, M_2) = \overline{[u(M_1) - \overline{u(M_1)}][v(M_2) - \overline{v(M_2)}]} = B_{uv}(M_1, M_2) - \overline{u(M_1)}\,\overline{v(M_2)} \tag{4.20$'$}$$

给出了相应场的涨落的关联函数。有时，当不会混淆时，我们会简单地称它们为关联函数（和其他作者一致）。当然，涨落的关联函数具有普通关联函数的所有性质。另一个极端重要的结果时当我们用函数$b_{uu}(M_1, M_2)$除以$\sigma_u(M_1)\sigma_u(M_2)$或用$b_{uv}(M_1, M_2)$除以$\sigma_u(M_1)\sigma_v(M_2)$，我们得到$u(M_1)$和$u(M_2)$之间或$u(M_1)$和$v(M_2)$之间的相关系数。所以涨落的关联函数在相应的关联函数为零时变为零。自然的是假设对于任意流体动力学变量u或变量u和v的对，$u(M_1)$和$u(M_2)$之间或$u(M_1)$和$v(M_2)$之间的统计关联[由相应的相关系数值表征]在点M_1 和M_2 变得相距无穷远时（在空间上和/或时间上）会无限衰减。于是，流体动力学场涨落的关联函数

在M_1和M_2变得无限远离时总是趋向于零。这个事实定义了涨落的关联函数的一个重要性质，普通的关联函数一般来说没有这个性质。

大家熟知，对于独立随机变量，乘积的平均值等于单个因子平均值的乘积。因为在极其遥远的点上的流体动力学变量值几乎不依赖，所以阶等于类型的流体动力学场（在例如点$M_1, ..., M_N$取值）的任意中心矩在一个点无限远离其他点时趋向于零。然而，当中心矩的阶大于其类型，那么这个论断不成立。用完全相同的方式，一般来说，阶$K \geq 4$的中心矩趋向于零，如果它不是一点，而是无穷远离其他点的一组点。同时，例如当一般中心矩是四阶的，不难验证

$$\begin{aligned}&b_{puvw}(M_1, M_2, M_3, M_4) - b_{pu}(M_1, M_2)b_{vw}(M_3, M_4) - b_{pv}(M_1, M_3)b_{uw}(M_2, M_4)\\&-b_{pw}(M_1, M_4)b_{uv}(M_2, M_3) = S_{puvw}(M_1, M_2, M_3, M_4)\end{aligned} \tag{4.21}$$

在点M_1, M_2, M_3, M_4位置的变化使得至少两点间距离变得无穷大时趋向于零。可以证明，对于任意其他矩量（中心矩或普通的矩量，没有区别）我们总是可以选择低阶矩的一个组合使得原始矩量和这个组合的差在这个矩量依赖的任意两点间距变成无穷大时趋向于零（见下文小字部分）。K阶矩量和特殊选择的低阶矩量组合之间的差和4.1节中讨论的随机变量的积累量完全相同。所以它们被称为这些场的K阶积累量（或半不变量）。

使用4.1节末给出的积累量的定义，不难证明湍流的流体动力学变量的积累量实际上确实具有这个性质。让我们考虑一个任意积累量

$$\begin{aligned}S_{k_1k_2...k_N}(M_1, M_2, ..., M_N) &= (-i)^K \left.\frac{\partial^K \ln\varphi(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_N)}{\partial\theta_1^{k_1}\partial\theta_2^{k_2}...\partial\theta_N^{k_N}}\right|_{\theta_1=\theta_2...=\theta_N=0}\\K &= k_1 + ... + k_N,\end{aligned} \tag{4.22}$$

其中$\varphi(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_N)$是变量$u_1, u_2, ..., u_N$（一些或者所有可能是相同的）在点$M_1, M_2, ..., M_N$（它们中的一些可能是相同的）值$u_1(M_1), u_2(M_2), ..., u_N(M_N)$的特征函数。现在令$M_1, M_2, ..., M_N$点系统的变化使得至少两个点（例如，$M_i$和$M_j$）之间的距离变得无穷大。在此情形，这个系统至少分为两个子系统，第一个系统的每个点无限远离第二个系统中的每个点（例如，把第一个子系统取为所有距离M_j点无穷远的点就足够了）。但是因为随着变量取值的点之间的距离增大，任意两个流体动力学变量之间的统计湍流变得无限小，所以，N个随机变量$u_1(M_1), ..., u_N(M_N)$至少分为两组，第一组的变量最终不依赖于第二组的变量。我们现在使用这个事实，两组统计不相关的随机变量的特征函数等于每组随机变量分别的特征函数的乘积。[这从这个事实得到，由于方程（3.13），两组不相关的随机变量的多维概率密

度等于这两组随机变量的概率密度的乘积。]所以，当一组点$M_1, M_2, ..., M_N$如所描述地变化，函数$\varphi(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_N)$趋向于分解为乘积$\varphi(\theta_1, ..., \theta_n) \cdot \varphi(\theta_{n+1}, ..., \theta_N)$，其中$n < N$。把这个$\varphi(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_N)$的表达式带入方程（4.22）并考虑到对于所有$i$，$k_i \geq 1$，我们展示了积累量$S_{k_1 k_2 ... k_N}(M_1, M_2, ..., M_N)$在$M_1, M_2, ..., M_N$点系统如此变化时趋向于零。

4.3 具有正态概率分布的随机场（高斯场）

和随机变量类似，随机场概率分布的完全确定一般来说假定确定所有可能阶的所有矩量。这方面唯一的例外是概率分布存在一些额外条件的情形，这使得我们能使用给定的矩量确定余下的。在本小节中我们将考虑一个特别但非常重要的这种情形，我们可以限制于仅寻找一阶和二阶矩。特别地，我们考虑高斯场的情形，即它的值的所有概率分布是多维正态（或高斯）分布。

我们回想一下，N维概率分布被称为正态（或高斯），如果相应的概率密度取这种形式

$$p(u_1, u_2, ..., u_N) = C \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{N} g_{jk}(u_j - a_j)(u_k - a_k)\right\}. \tag{4.23}$$

这里$a_j, j = 1, ..., N$是任意实常数，$g_{jk}, j, k = 1, ..., N$是使得$||g_{jk}||$为正定矩阵（即对于任意不全为零的实数$c_1, ..., c_N$，$\sum_{j,k} g_{jk} c_j c_k > 0$）的实常数，$C$是常数，由这个条件确定

$$C \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{j,k=1}^{N} g_{jk}(u_j - a_j)(u_k - a_k)} \mathrm{d}u_1 ... \mathrm{d}u_N = 1 \tag{4.24}$$

（不难验证$C = G^{1/2}/(2\pi)^{1/2}$，其中$G = |g_{jk} = \det||g_{jk}|||$）。[8]

方程（4.23）中的常数a_j和g_{jk}通过这个分布的一阶和二阶矩简单地相联系。实际上，把方程（4.23）带入方程（4.1）和（4.2）容易证明

$$\overline{u_j} = a_j, \quad b_{jk} = \overline{(u_j - \overline{u_j})(u_k - \overline{u_k})} = \frac{G_{jk}}{G}, \tag{4.25}$$

其中，和前面一样，$G = ||g_{jk}||$和$G_{jk} = \frac{\partial G}{\partial g_{jk}}$是行列式$G$中元素$g_{jk}$的余子式（故而矩阵$||g_{jk}||$和$||b_{jk}||$是互逆的）。由方程（4.25）我们也得到分布

[8] 一般来说，我们也可以考虑$||g_{jk}||$仅是一个非负矩阵的情形，即当$\sum g_{jk} c_j c_k$对$c_1, ..., c_N$的某些非负值变为零。在此情形，只需要考虑随机变量$u_1, ..., u_N$是线性相关的，密度为（4.23）的概率分布完全集中在N维空间中维数小于N的某个线性子空间中。这样的概率分布被称为退化的（或不恰当的）正态分布。但是我们对它们不感兴趣。

（4.23）的普通（非中心）二阶矩的一个表达式：

$$B_{jk} = \overline{u_j u_k} = \frac{G_{jk}}{G} + a_j a_k. \tag{4.26}$$

我们看到对于正态概率分布，一阶和二阶矩完全定义了概率密度。因此，它们通常定义了相应随机变量的所有统计特征，特别是所有高阶矩。因为任意阶普通的（非中心）矩可以简单地用中心矩和平均值表示，所以这里仅考虑中心高阶矩的演化问题就足够了。不难看到正态分布的所有奇数阶的中心矩等于零。对于偶数阶的中心矩，它们可以借助Isserlis (1918)推导的一般规则计算。根据这个规则，如果$w_1, w_2, ..., w_{2K}$是$2K$个任意随机变量（其中一些可能是相同的），具有平均值为零的联合正态概率分布，那么

$$\overline{w_1 w_2 ... w_{2K}} = \sum \overline{w_{i_1} w_{i_2}} \cdot \overline{w_{i_3} w_{i_4}} ... \overline{w_{i_{2K-1}} w_{i_{2K}}}, \tag{4.27}$$

其中右边的求和被扩展到$2K$个指标$1, 2, ..., 2K$所有可能的划分，$(i_1, i_2), (i_3, i_4), ..., (i_{2K-1}, i_{2K})$[不难计算方程（4.27）右边项的数量等于$\frac{(2K)!}{2^K K!} = 1 \cdot 3 \cdot 5 ... (2K-1)$]。所以，由$k_1 + k_2 + ... + k_N = 2K$

$$b_{k_1 k_2 ... k_N} = \overline{(u_1 - \overline{u_1})^{k_1} (u_2 - \overline{u_2})^{k_2} ... (u_N - \overline{u_N})^{k_N}} = \sum b_{i_1 i_2} b_{i_3 i_4} ... b_{i_{2K-1} i_{2K}}, \tag{4.28}$$

其中因子b_{ij}具有和方程（4.25）中同样的意义，右边的求和是对$2K$个指标$1, 1, ..., 1; 2, 2, ..., 2; ...; N, N, ..., N$（1重复$k_1$次，...，$N$重复$k_N$次）的所有$(2K)!/2^K K!$种划分（划分为$K$对$(i_1, i_2), (i_3, i_4), ..., (i_{2K-1}, i_{2K})$）进行的。特别地

$$b_{1111} = \overline{(u_1 - \overline{u_1})(u_2 - \overline{u_2})(u_3 - \overline{u_3})(u_4 - \overline{u_4})} = b_{12} b_{34} + b_{13} b_{24} + b_{14} b_{23}, \tag{4.29}$$

而六阶中心矩由15项组成，等等。给出这个一般规则的方法如下所示。

比较方程（4.6）和（4.29）得到，对于正态分布$S_{1111} = 0$。可以证明，这个结果有个非常一般的特征，任意多维高斯分布的所有阶$K \geq 3$ 的积累量恒等于零（见下文）。

我们注意到，随机矢量$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, ..., u_N)$的概率分布的正态性是特殊选择的坐标系统的独立性质。这直接源自这个事实，正态分布的随机变量的任意线性组合也具有正态概率分布。

现在让我们转向高斯随机场$u(M)$或$\boldsymbol{u}(M) = \{\boldsymbol{u}_1(M), ..., \boldsymbol{u}_N(M)\}$，其任意有限数量值的概率分布都是正态的。如我们上面所示，这些

场完整的统计确定简化为确定它们的平均值和相关函数。所有其他矩量可以从方程（4.28）以及奇数阶的中心矩必然严格等于零的事实得到。必须注意的是，对于任意具有前两阶有限矩量的（一维或多维）随机场，总是可以选择具有相同平均值和相同关联函数的高斯场。例如，对于一维场$u(M)$，方程（4.15）应用到场的涨落的关联函数$b_{uu}(M_1, M_2)$，对于任意选择的点$M_1, M_2, ..., M_N$，可以得到一个N维正态分布，密度为$p_{M_1 M_2 ... M_N}(u_1, u_2, ..., u_N)$，平均值为$\overline{u(M_i)}, i = 1, ..., N$，二阶矩$B_{uu}(M_i, M_j) = b_{uu}(M_i, M_j) + \overline{u(M_i) u(M_j)}$。相应的对所有可能选择点的概率分布当然满足对称性条件（3.1）和相容性条件（3.11），即它们将定义某个头两阶矩量和初始随机场$u(M)$相同的随机场。这也将用于多维随机场$\boldsymbol{u}(M) = \{u_1(M), ..., u_N(M)\}$的情形，唯一的不同是这里必须使用方程（4.19）而不是方程（4.15）。[9] 因此，在随机场的近似研究中仅使用一阶和二阶矩的数据，我们总是假定这些随机场具有正态概率分布。之后，我们将看到湍流的流体动力学变量随机场实际上通常在很多方面接近高斯场。我们会经常使用这个事实。

在正态速度分布的研究中非常方便的是使用特征函数。不难证明在概率密度（4.23）的情形

$$\varphi(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_N) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int e^{\mathrm{i}(\theta_1 u_1 + ... + \theta_N u_N)} p(u_1, ..., u_N) \mathrm{d}u_1 ... \mathrm{d}u_N = \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{N} a_k \theta_k - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{N} b_{jk} \theta_j \theta_k \right\}, \tag{4.30}$$

其中常数a_j和b_{jk}和方程（4.25）中相同[推导这个方程时方便的是将方程（4.23）指数中的二次型约化到主轴。]。所以正态分布的特征函数具有变量$\theta_1, \theta_2, ..., \theta_N$的二阶多项式（常数项为零）的指数函数形式。逆命题也是对的，即总有一个方程（4.23）形式的概率密度对应于这样的特征函数。[10]

由方程（4.30）得到，高斯分布的一阶和二阶积累量分别等于常数$a_j, j = 1, ..., N$和$b_{jk}, j, k = 1, ..., N$，而所有高阶积累量恒等于零。此外，容易从这个方程得到计算偶数阶中心矩的一般规则。为此，我们必须使用一般方程（4.9），其中替代$\varphi(\theta_1, ..., \theta_N)$必须带入函数

$$\exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{N} b_{jk} \theta_j \theta_k \right\}$$

首先将其展开为$\theta_1, ..., \theta_N$的幂级数。

特征函数方法使我们可以给出简单证明这个事实，具有正态概率分布的随机变量的任意线性组合也具有正态分布。实际上，如果$v_j = \sum_{k=1}^{N} c_j k u_k, j = 1, ..., M$，变量$v_1, ..., v_M$的

[9] 因为在此情形我们仅使用关联函数的性质（4.15）和（4.19），可以得到任意具有这些性质的函数$B_{uu}(M_1, M_2)$ 或函数系统$B_{jk}(M_1, M_2)$是某个（一维或多维）随机场的关联函数。

[10] 实际上，方程（4.30）也包含了简并正态分布的特征函数。在此情形$||b_{jk}||$不是正定的，而只是非负定矩阵。容易看出，方程（4.30）形式的函数可以是某个概率分布的特征函数，仅当$||b_{jk}||$是一个非负定矩阵，所以特征函数仅对（非负定或简并）正态分布取（4.30）形式。

特征函数显然等于

$$\varphi_{(v)}(\theta_1,...,\theta_M)=\overline{\exp\left\{i\sum_{j=1}^{M}\left(\sum_{k=1}^{N}c_{jk}u_k\right)\theta_j\right\}}=\overline{\exp\left\{i\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{M}c_{jk}\theta_j\right)u_k\right\}}=\varphi\left(\sum_{j=1}^{M}c_{j1}\theta_j,...,\sum_{j=1}^{M}c_{jN}\theta_j\right), \tag{4.31}$$

其中$\varphi(\theta_1,...,\theta_N)$是$u_1,...,u_N$的特征函数。所以，如果$\varphi(\theta_1,...,\theta_N)$由方程（4.30）给出，那么$\varphi_{(v)}(\theta_1,...,\theta_M)$也是变量$\theta_1,...,\theta_M$的二次多项式的指数函数。特别地，对于$v_1,...,v_M$概率分布的完整说明，只需要确定它们的一阶和二阶矩，这容易从$u_1,...,u_N$的一阶矩和二阶矩得到。

这使得我们可以写出任意高斯随机函数显式形式的特征泛函。首先，让我们考虑单变量x的随机函数$u(x)$，定义在区间$a\le x\le b$。根据方程（3.21），这个函数的特征泛函等于随机变量

$$u[\theta(x)]=\int_a^b u(x)\theta(x)\mathrm{d}x$$

的特征函数的值，这个函数的宗量等于1。但如果任意函数$u(x)$值的概率分布是正态分布，那么积分$u[\theta(x)]$的所有近似求和（随机变量$u(x_k), a\le x_1<x_2<...<x_n\le b$的线性组合）具有正态概率分布。所以积分$u[\theta(x)]$也是一个具有正态分布的随机变量。所以，为了找到$\varphi[\theta(x)]$的显式方程，只需要找到随机变量$u[\theta(x)]$的头两阶矩。这两个矩量满足方程

$$\overline{u[\theta(x)]}=\overline{\int_a^b\theta(x)u(x)\mathrm{d}x}=\int_a^b\theta(x)\overline{u(x)}\mathrm{d}x, \tag{4.32}$$

$$\overline{\{u[\theta(x)]\}^2}=\overline{\int_a^b\int_a^b\theta(x_1)\theta(x_2)u(x_1)u(x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2}=\int_a^b\int_a^b\theta(x_1)\theta(x_2)B(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2. \tag{4.33}$$

所以

$$\overline{\{u[\theta(x)]\}^2}-\overline{\{u[\theta(x)]\}}^2=\int_a^b\int_a^b\theta(x_1)\theta(x_2)b(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2, \tag{4.34}$$

其中$b(x_1,x_2)$是随机函数$u(x)$涨落的关联函数。把随机变量$u[\theta(x)]$的矩量（4.32）和（4.34）带入$N=1$的方程（4.30），我们得到

$$\varphi[\theta(x)]=\exp\left\{i\int_a^b\theta(x)\overline{u(x)}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b\theta(x_1)\theta(x_2)b(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\right\}. \tag{4.35}$$

这是Kolmogorov (1935)讨论特征泛函的第一个工作中给出的高斯随机函数的特征泛函的一般表达式。类似地，高斯随机场$u(M)$[或$\boldsymbol{u}(M)=\{u_1(M),...,u_N(M)\}$]特征泛函$\varphi[\theta(M)]$[或$\varphi[\theta_1(M),...,\theta_N(M)]$等于

$$\varphi[\theta(M)]=\exp\left\{i\int\theta(M)\overline{u(M)}dM-\frac{1}{2}\int\int\theta(M_1)\theta(M_2)b(M_1,M_2)dM_1dM_2\right\} \tag{4.36}$$

或

$$\varphi[\theta_1(M),...,\theta_N(M)] = \exp\left\{ i\int\sum_{j=1}^{N}\theta_j(M)\overline{u_j(M)}dM - \frac{1}{2}\int\int\sum_{j,k=1}^{N}\theta_j(M_1)\theta_k(M_2)b_{jk}(M_1,M_2)dM_1dM_2 \right\}, \tag{4.37}$$

自然地，在所有情形，它由相应的平均值和关联函数唯一定义。

4.4 根据特征泛函确定随机场的矩量和积累量

因为特征泛函含有随机场的完整统计特征，所以它显然定义了这个场的所有矩量和积累量。我们现在推导联系矩量和积累量与泛函$\varphi[\theta]$的显式方程。于是我们得到了和有限维情形有关的方程（4.9）和（4.11）的自然推广。

再一次，我们从考虑单变量随机函数$u(x), a < x < b$开始。因为，如我们所知，随机矢量$\boldsymbol{u} = \{u_1, ..., u_N\}$的矩量和积累量用相应特征函数$phi(\theta_1, ..., \theta_N)$的偏导数表示，首先，我们必须推广导数的概率到无穷多变量函数（即函数$\theta(x)$的泛函$\varphi[\theta(x)]$）的情形。我们回忆在有限情形，函数$\varphi(\theta_1, ..., \theta_N) = \varphi(0)$被称为在点$\theta^0 = \{\theta_1^0, ..., \theta_N^0\}$可微，如果它对于宗量值小的变化$\mathrm{d}\theta = \{\mathrm{d}\theta_1, ..., \mathrm{d}\theta_N\}$的增量$\mathrm{d}\varphi = \varphi(\theta^0 + \mathrm{d}\theta) - \varphi(\theta^0)$可以写为

$$\mathrm{d}\varphi = \sum_{k=1}^{N} A_k \mathrm{d}\theta_k + o(|\mathrm{d}\theta_1| + ... + |\mathrm{d}\theta_N|)$$

（即精确到高阶修正，它线性依赖于$\mathrm{d}\theta$）。此外，偏导数$\frac{\partial\varphi(\theta^0)}{\partial\theta_k}$可以定义为增量$\mathrm{d}\varphi$中线性部分$\mathrm{d}\theta_k$的系数$A_k$，故而

$$\mathrm{d}\varphi \approx \sum \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_k}\mathrm{d}\theta_k.$$

类似地，我们说泛函$\Phi[\theta(x)]$对$\theta = \theta_0(x)$可微，如果在$\theta_0(x)$加上小的增量$\delta\theta(x)$，泛函增量$\delta\Phi[\theta_0(x)]$的主要部分线性依赖于$\delta\theta(x)$

$$\delta\Phi[\theta_0(x)] = \Phi[\theta_0(x) + \delta\theta(x)] - \Phi[\theta_0(x)] = \int_a^b A(x)\delta\theta(x)\mathrm{d}x + o\left[\int_a^b |\delta\theta(x)|\mathrm{d}x\right] \tag{4.38}$$

（换句话说，如果存在导数$\delta_0\Phi[\theta_0(x)] = \frac{\partial}{\partial h}\Phi[\theta_0(x) + h\theta_1(x)]|_{h=0}$，可以写为$\delta_0\Phi[\theta_0(x)] = \int_a^b A(x)\theta_1(x)\mathrm{d}x$）。在此情形，函数$A(x)$在点$x = x_1$的值被称为$\Phi[\theta_0(x)]$在$x = x_1$对$\theta(x)$的泛函导数。考虑到$A(x)$是增量$\delta\Phi[\theta_0(x)]$线性部分中$\delta\theta(x)\mathrm{d}x$的系数，方便的是采用符号

$$\frac{\delta\Phi[\theta_0(x)]}{\delta\theta(x)\mathrm{d}x} = A(x) \tag{4.39}$$

作为泛函导数。这个符号强度了泛函导数是一个双极限

$$\frac{\delta\Phi[\theta_0(x)]}{\delta\theta(x)\mathrm{d}x} = \lim_{|\delta\theta(x)|\to 0, \Delta x\to 0}\frac{\Phi[\theta_0(x) + \delta\theta(x)] - \Phi[\theta_0(x)]}{\int_{\Delta x}\delta\theta(x)\mathrm{d}x},$$

其中$\delta\theta(x)$现在表示一个仅在点x附近长度Δx的小区间内不为零的函数。泛函$\Phi[\theta(x)]$可微的要求对这个泛函施加了某些限制，函数$\theta(x)$在固定点$x = x_0$的值$\theta(x_0)$这样简单的泛函不满

足。可微泛函最简单的例子是

$$\Phi[\theta(x)] = \int_a^b A(x)\theta(x)\mathrm{d}x,$$

其中

$$\frac{\delta\left[\int_a^b A(x)\theta(x)\mathrm{d}x\right]}{\delta\theta(x)\mathrm{d}x} = A(x). \tag{4.40}$$

在方程（4.40）中，泛函导数$\frac{\delta\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta(x)\mathrm{d}x}$不依赖于函数$\theta(x)$在取导数的地方的值。然而，一般来说，不一定是这样的，所以更正确的是把方程（4.38）和（4.39）写成

$$\delta\Phi[\theta_0(x)] \approx \int_a^b A[\theta_0(x);x_1]\delta\theta(x_1)\mathrm{d}x_1, \quad \frac{\delta\Phi[\theta_0(x)]}{\delta\theta(x)\mathrm{d}x_1} = A[\theta_0(x);x_1].$$

所以泛函$\Phi[\theta(x)]$的泛函导数还是$\theta(x)$的泛函，仍然依赖于作为一个参数的点x_1。于是，这个泛函导数具有双类型的导数。它可以以通常的方式对x_1求导，也可以在点$x = x_2$对$\theta(x)$求泛函导数，这是原始泛函$\Phi[\theta(x)]$的二阶泛函导数：

$$\frac{\delta}{\delta\theta(x_2)\mathrm{d}x_2}\left[\frac{\delta\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta(x_1)\mathrm{d}x_1}\right] = \frac{\delta^2\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta(x_1)\mathrm{d}x_1\delta\theta(x_2)\mathrm{d}x_2}. \tag{4.41}$$

二阶泛函导数是一个泛函$A[\theta(x);x_1,x_2]$，依赖于点x_1和x_2。然而，这个泛函不是任意的，满足对称性条件$A[\theta(x);x_1,x_2] = A[\theta(x);x_2,x_1]$，这来自容易证明的恒等式

$$\frac{\delta^2\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta(x_1)\mathrm{d}x_1\delta\theta(x_2)\mathrm{d}x_2} = \frac{\delta^2\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta(x_2)\mathrm{d}x_2\delta\theta(x_1)\mathrm{d}x_1}. \tag{4.42}$$

二阶可微泛函最简单的一个例子是

$$\Phi[\theta(x)] = \int_a^b\int_a^b A(x,x')\theta(x)\theta(x')\mathrm{d}x\mathrm{d}x',$$

在此情形，容易验证

$$\frac{\delta^2\left[\int_a^b\int_a^b A(x,x')\theta(x)\theta(x')\mathrm{d}x\mathrm{d}x'\right]}{\delta\theta(x_1)\mathrm{d}x_1\delta\theta(x_2)\mathrm{d}x_2} = A(x_1,x_2) + A(x_2,x_1). \tag{4.43}$$

更高阶的泛函导数以类似的方式定义。n阶泛函导数

$$\frac{\delta^n\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta(x_1)\mathrm{d}x_1 ... \delta\theta(x_n)\mathrm{d}x_n}$$

（如果存在）是$\theta(x)$的泛函，依赖于n个点$x_1, ..., x_n$。

现在令$\Phi[\theta(x)]$为方程（3.21）给出的随机函数$u(x)$的特征泛函。在此情形

$$\begin{aligned}\delta_0\Phi[\theta(x)] &= \frac{\partial}{\partial h}\overline{\left\{\exp\left[i\int_a^b u(x)[\theta(x)+h\theta_1(x)]\mathrm{d}x\right]\right\}}_{h=0}\\ &= \overline{i\int_a^b u(x)\theta_1\mathrm{d}x\exp\left[i\int_a^b u(x)\theta(x)\mathrm{d}x\right]}\end{aligned}$$

（因为平均和求导是可交换的操作）。所以有

$$\frac{\partial\Phi[\theta(x)]}{\partial\theta(x)\mathrm{d}x} = \overline{iu(x)\exp\left[i\int_a^b u(x)\theta(x)\mathrm{d}x\right]}. \tag{4.44}$$

类似地，我们可以得到更一般的方程

$$\frac{\delta^n\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta(x_1)\mathrm{d}x_1...\delta\theta(x_n)\mathrm{d}x_n} = \overline{i^n u(x_1)...u(x_n)\exp\left[i\int_a^b u(x)\theta(x)\mathrm{d}x\right]}, \tag{4.45}$$

这表明

$$B_{u...u}(x_1,...,x_n) = \overline{u(x_1)...u(x_n)} = (-i)^n\left.\frac{\delta^n\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta(x_1)\mathrm{d}x_1...\delta\theta(x_n)\mathrm{d}x_n}\right|_{\theta(x)=0}. \tag{4.46}$$

方程（4.46）是方程（4.9）对无限维情形的推广。

依赖于多维空间点$\boldsymbol{x}$（标量或矢量）函数的泛函$\Phi[\theta(x)]$和$\Phi[\theta(x)]=\Phi[\theta_1(x),...,\theta_N(x)]$的泛函导数以完全类似的方式定义。所以，例如，泛函$\Phi[\theta x]$被称为（对于给定函数$\theta(x)=\{\theta_1(x),...,\theta_N(x)\}$值）对$\theta_i(x)$可微的，如果方程

$$\left.\frac{\partial}{\partial h}\Phi[\theta_1(x),...,\theta_i(x)+h\theta_i^0(x),...,\theta_N(x)]\right|_{h=0} = \int A_i[\theta(x),x_1]\theta_i^0(x_1)\mathrm{d}x_1 \tag{4.47}$$

成立，即如果对于函数$\theta_i(x)$相当小的变化$\delta\theta_i(x)$，$\Phi[\theta(x)]$增量的主要部分线性依赖于$\delta\theta_i(x)$。在此情形，依赖于点x_1作为参数的泛函

$$A_i[\theta(x),x_1] = \frac{\delta\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta_i(x_1)\mathrm{d}x_1} \tag{4.48}$$

称为$\Phi[\theta(x)]$在点$x=x_1$对$\theta_i(x)$的泛函导数（或者更精确地说，泛函偏导数）。换句话说，这个导数可以定义为极限

$$\lim_{|\delta_i\theta(x)\to 0,\Delta x_1\to 0}\frac{\Phi[\theta(x)+\delta_i\theta(x)]-\Phi[\theta(x)]}{\int_{\Delta x_1}\delta_i\theta(x)\mathrm{d}x},$$

其中$\delta_i\theta(x)$是矢量函数，仅有第i个分量不为零，仅在点x_1的一个小邻域Δx_1中不为零。泛函导数（4.48）可以对$\theta_j(x)$进行，于是我们得到二阶泛函导数

$$\frac{\delta^2\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta_i(x_1)\mathrm{d}x_1\delta\theta_j(x_2)\mathrm{d}x_2} = A_{ij}[\theta(x);x_1,x_2], \tag{4.49}$$

依赖于点对x_1和x_2，满足条件

$$\frac{\delta^2\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta_i(x_1)\mathrm{d}x_1\delta\theta(x_2)\mathrm{d}x_2} = \frac{\delta^2\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta_j(x_2)\mathrm{d}x_2\delta\theta_i(x_1)\mathrm{d}x_1}. \tag{4.50}$$

高阶泛函导数

$$\frac{\delta^n\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta_{i_1}(x_1)\mathrm{d}x_1...\delta\theta_{i_n}(x_n)\mathrm{d}x_n}$$

类似地定义。如果$\Phi[\theta(x)]$取为N维随机场$\boldsymbol{u}(x) = \{u_1(x), ..., u_N(x)\}$的特征泛函（3.27’），那么通过完全类似与方程（4.46）推导的过程，我们得到方程

$$B_{i_1...i_n}(x_1, ..., x_n) = \overline{u_{i_1}(x_1)...u_{i_n}(x_n)} = (-i)^n \left.\frac{\delta\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta_{i_1}(x_1)\mathrm{d}x_1...\delta\theta_{i_n}(x_n)\mathrm{d}x_n}\right|_{\theta(x)=0} \tag{4.51}$$

（我们注意到这里泛函导数的性质（4.50）变成了熟知的关联函数的性质（4.18））。

随机场$\boldsymbol{u}(x) = \{u_1(x), ..., u_N(x)\}$的积累量现在借助下面的方程定义：

$$S_{i_1...i_n}(x_1, ..., x_n) = (-i)^n \left.\frac{\delta^n \ln\Phi[\theta(x)]}{\delta\theta_{i_1}(x_1)\mathrm{d}x_1...\delta\theta_{i_n}(x_n)\mathrm{d}x_n}\right|_{\theta(x)=0}, \tag{4.52}$$

其中$\Phi[\theta(x)]$是场的特征泛函。容易看到

$$S_j(x_1) = -i$$

$$S_{ij}(x_1, x_2) = -i\frac{\delta}{\delta\theta(x_2)\mathrm{d}x_2}\left.\left\{\frac{\overline{u_i(x_1)\exp\left[i\int\sum u_\alpha(x)\theta_\alpha(x)\mathrm{d}x\right]}}{\overline{\exp\left[i\int\sum u_\alpha(x)\theta_\alpha(x)\mathrm{d}x\right]}}\right\}\right|_{\theta(x)=0} = \overline{u_i(x_1)u_j(x_2)} - \overline{u_i(x_1)u_j(x_2)} = b_{ij}(x_1, x_2)$$

并且，一般来说，$S_{i_1...i_n}(x_1, ..., x_n)$恒等于变量$u_{i_1}(x_1), ..., u_{i_n}(x_n)$系统的积累量，借助方程（4.11）用特征函数定义。由方程（4.52）容易得到积累量的所有性质[例如，泛函导数的性质（4.50）意味着涨落的关联函数必须有和普通关联函数相同的性质（4.18）]。

对于具有所有阶泛函导数的泛函$\Phi[\theta(x)]$，在某些条件下我们可以得到泰勒级数展开

$$\Phi[\theta(x)] = \Phi[0] + \sum_{i=1}^{N}\int\frac{\delta\Phi[0]}{\delta\theta_i(x_1)\mathrm{d}x_1}\theta_i(x_1)\mathrm{d}x_1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\int\int\frac{\delta^2\Phi[0]}{\delta\theta_i(x_1)\mathrm{d}x_1\delta\theta_j(x_2)\mathrm{d}x_2}\theta_i(x_1)\theta_j(x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 + ... \tag{4.53}$$

在随机场$\boldsymbol{u}(x)$特征泛函的情形，这个展开变为所有可能阶关联函数的展开

$$\begin{aligned}\Phi[\theta(x)] \quad = \quad & 1 + i\sum_{j=1}^{N}\int\overline{u_j(x)}\theta_j(x)\mathrm{d}x - \\ & -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\int\int B_{jk}(x_1, x_2)\theta_j(x_1)\theta_k(x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 + \\ & \frac{i^n}{n!}\sum_{i_1=1}^{N}...\sum_{i_n=1}^{N}\int...\int B_{i_1...i_n}(x_1, ..., x_n)\theta_{i_1}(x_1)... \\ & \theta_{i_n}(x_n)\mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_n +\end{aligned} \tag{4.54}$$

可以证明为了使方程（4.54）右边的级数收敛，充分和必要条件是第n项在$n \to \infty$时趋向于零。如果我们把这个级数在某个有限数量的项截断，对于余下的项我们可以得到一个

类似于通常泰勒级数余项的估计[见Novikov (1964)]。然而，我们注意到，如果我们简单地将泛函$\Phi[\theta(x)]$的展开（4.54）在任意有限数量的项截断，不考虑余项，那么我们得到一个具有特征泛函性质（3.24）的泛函，但它一定没有必要性质（3.25）。实际上这甚至可以从这个事实得到，等于方程（4.54）右边有限数量项的和的泛函不满足简单的不等式$|\Phi[\theta(x)]| \leq 1$，这是从$n = 2$的不等式（3.25）得到的（也可以从特征泛函$\Phi[\theta(x)]$的定义（3.27'）得到）。所以，假设某个随机场阶数高于某个给定的K的所有矩量都恒等于零，我们最终得到归谬（reductio ad absurdum），和概率总是小于等于一的条件矛盾。

从这个观点看，特征泛函$\Phi[\theta(x)]$对数的泰勒展开的应用更令人满意，即$\Phi[\theta(x)]$这种形式的表示

$$\begin{aligned}\Phi[\theta(x)] \quad = \quad & \exp\left\{i\sum_{j=1}^{N}\int\overline{u_j(x)}\theta_j(x)\mathrm{d}x\right. \\ & -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\int b_{jk}(x_1,x_2)\theta_j(x_1)\theta_k(x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 + \\ & ... + \frac{i^n}{n!}\sum_{i_1=1}^{N}...\sum_{i_n=1}^{N}\int...\int S_{i_1...i_n}(x_1,...,x_n)\theta_{i_1}(x_1)... \\ & \left. ...\theta_{i_n}(x_n)\mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_n + ...\right\}. \end{aligned} \tag{4.55}$$

如果我们在有限项后截断方程（4.55），那么我们得到一个泛函，不仅满足方程（3.24），而且满足特征泛函的必要条件$|\Phi[\theta(x)]| \leq 1$。此外，如果我们仅限于方程（4.55）右边$\theta_j(x)$的线性项和二次项，那么我们得到一定为某个随机场特征泛函的泛函，例如一阶和二阶矩等于初始场$\boldsymbol{u}(x)$的一阶和二阶矩的高斯随机场[参见方程（4.37）]。然而，如果我们也考虑表达式（4.55）中$\theta_j(x)$的三阶项，即如果我们令

$$\begin{aligned}\Phi[\theta(x)] \quad = \quad & \exp\left\{i\sum_{j=1}^{N}\int\overline{u_j(x)}\theta_j(x)\mathrm{d}x\right. \\ & -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\int b_{jk}(x_1,x_2)\theta_j(x_1)\theta_k(x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 - \\ & \left.\frac{i}{\varphi}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\int\int\int b_{jkl}(x_1,x_2,x_3)\theta_j(x_1)\theta_k(x_2)\theta_l(x_3)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\right\}, \end{aligned} \tag{4.56}$$

或者如果我们在比$\theta_j(x)$二阶项更高阶的有限数量的项之后截断级数（4.55），那么我们得到一个满足方程（3.24）和条件$|\Phi[\theta(x)] \leq 1$的泛函，但是一般来说它不满足特征泛函的必要性质（3.25）。所以，如果我们假设场$\boldsymbol{u}(x)$所有高于$K \geq 4$阶的积累量都等于零，我们也最终得到和概率分布性质的一个矛盾[例如，和概率非负的事实（由此得到条件（3.25））矛盾]。在本书第2卷中我们将偶尔回到这个事实。

4.5 平稳随机函数

现在让我们回到这个重要的问题（参考3.3节），在什么条件下随机场$u(\boldsymbol{x},t)$的时间和空间平均会在平均区间变得无穷大时收敛到概率平均值。我们会得到一些特殊类型的这种场，对于湍流理论来说特别有趣。

为了明确，首先我们只讨论时间平均。于是，场$u(\boldsymbol{x},t)$对$\boldsymbol{x}$的依赖将没有意义，我们仅考虑单变量t的函数$u(t)$。我们对随机量

$$\tilde{u}_T(t)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}u(t+\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4.57}$$

在$T\to\infty$时收敛到$\overline{u(t)}$的条件感兴趣。[11]收敛的一个重要的必要条件的推导极其简单。对于任意有界函数$u(t)$，差

$$\begin{aligned}\tilde{u}_T(t)-\tilde{u}_T(t_1) &= \frac{1}{T}\left\{\int_{-T/2}^{T/2}u(t+\tau)\mathrm{d}\tau-\int_{-T/2}^{T/2}u(t_1+\tau)\mathrm{d}\tau\right\}\\ &= \frac{1}{T}\left\{\int_{-T/2+t}^{-T/2+t_1}u(s)ds-\int_{T/2+t}^{T/2+t_1}u(s)ds\right\}\end{aligned} \tag{4.58}$$

在$T\to\infty$时变得无限小（其中t和t_1是固定的数（例如，$t_1>t$））。所以$\tilde{(u)}_T(t)$和$\tilde{u}_T(t_1)$在$T\to\infty$的极限[如果存在]必须变得相当，即定义为$\lim\tilde{u}_T(t)$的$u(t)$的时间平均必须不依赖于t。同时，概率平均$\overline{u(t)}$一般来说是t的函数。于是，为了使这两个平均相等，必须满足下面的条件：

$$\overline{u(t)}=U=常量. \tag{4.59}$$

这个情形类似于时间平均用于确定高阶矩和$u(t)$在一些点的值的其他函数。所以，例如，如果我们使用乘积$u(t)u(t_1)=u(t)u(t+s)$[其中假设$s=t_1-t$固定]（对t）的时间平均确定关联函数$B_{uu}(t,t_1)$，我们得到

$$\tilde{B}_{uu}(t,t_1)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}u(t+\tau)u(t+s+\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{4.60}$$

它仅依赖于$s=t_1-t$，而不单独依赖于t和t_1。所以，时间关联函数$\tilde{B}_{uu}(t_1,t_2)$等

[11]我们这里关心随机变量的收敛，一般来说这需要一个特殊的条件（见下文4.7节开头）。

于概率平均$\overline{u(t_1)u(t_2)} = B_{uu}(t_1, t_2)$仅当

$$B_{uu}(t_1, t_2) = B_{uu}(t_2 - t_1). \tag{4.61}$$

通过完全相同的方式，为了使N阶矩$B_{uu...u}(t_1, t_2, ..., t_N)$可以借助时间平均定义，这个矩量必须仅依赖于$N-1$个差$t_2 - t_1, ..., t_N - t_1$：

$$B_{uu...u}(t_1, t_2, ..., t_N) = B_{uu...u}(t_2 - t_1, ..., t_N - t_1). \tag{4.62}$$

最终，如果我们要求$u(t_1), u(t_2), ..., u(t_N)$的所有可能函数的平均值通过时间平均得到，那么我们必须仅限于$u(t)$的这些随机函数，对于任意N和$t_1, t_2, ..., t_N$，N维概率密度$p_{t_1 t_2 ... t_N}(u_1, u_2, ..., u_N)$不依赖于$N$个参数$t_1, t_2, ..., t_N$，而仅依赖于$N-1$个差$t_2 - t_1, ..., t_N - t_1$，即它们满足条件

$$\begin{aligned} p_{t_1 t_2 ... t_N}(u_1, u_2, ..., u_N) &= p_{t_1+h, t_2+h, ..., t_N+h}(u_1, u_2, ..., u_N) \\ &= p_{t_2-t_1, ..., t_N-t_1}(u_1, u_2, ..., u_N) \end{aligned} \tag{4.63}$$

其中h是任意实数。条件（4.63）极其一般，特别地，条件（4.59）、（4.61）和（4.62）从它得来。我们进一步注意到在$u(t)$高斯随机函数的特殊情形，一般的方程（4.62）和（4.63）从方程（4.59）和（4.61）得到。

所以我们得到了一类特殊的时间随机函数，所有所谓概率密度满足方程（4.63），即它们在一组点t_i在任意时间间隔h移动时保持不变。这种随机函数通常在最广泛应用的问题中遇到。它们被称为*平稳随机函数*或*平稳随机过程*（因为时间随机函数在科学文献中经常被称为随机过程）。很多特殊的专著或一般专著中的章节已经专门讲述了平稳随机过程的数学理论[见例如Doob (1953)、Loève (1955)、Yaglom (1962)、Rozanov (1967)]。不过，在这一点上我们只谈和本书主题有直接关系的几点（另见第2卷第6章）。

平稳条件的物理意义非常清楚。它意味着以函数$u(t)$为数值特征的物理过程是稳定的，即所有控制这个过程的条件都是时间无关的。就湍流特性而言，平稳性条件意味着所讨论的湍流在一般流体动力学意义下是稳定的，即即流动的所有平均特征（例如，平均速度分布，平均温度）和所有外部条件（例如，外力，束缚流动的表面的位置）不随时间变化。以足够精度满足这个条件的流动可以相对简单地在实验室中得到的。然而，在

自然湍流的情形，通常难以保证这个流动所有平均特征的不变性（特别地在大气湍流的情形如此，那里所有变量的平均值通常非常不稳定，显然有天和年的周期）。然而，同样在这里，对于相对短时间内（例如，几分钟或几十分钟）考虑的流体动力学变量值，相应的随机函数通常可以认为是平稳的。在所有这些情形，流动的变量的概率平均通常可以由时间平均得到。为此，在$T \to \infty$时的时间平均必须收敛到概率平均并且在这个过程可以假设为平稳的时间T内取的平均就和$T \to \infty$的极限足够接近了。

在平稳湍流中的一些点的任意流体动力学变量的值或者一些这种变量在一个或几个点的值为我们提供了多维平稳随机过程，例如，矢量函数$\boldsymbol{u}(t) = \{u_1(t), ..., u_n(t)\}$，对于任意选择的$u_{i_1}(t_1), u_{i_2}(t_2), ..., u_{i_N}(t_N)$，概率密度在所有时刻$t_1, t_2, ..., t_N$同时移动时间间隔$h$时保持不变。在此情形，函数$u_j(t)$的所有联合矩仅依赖于相应时刻的差[例如，所有交叉相关函数$B_{jk}(t_1, t_2) = \overline{u_j(t_1)u_k(t_2)}$仅依赖于$\tau = (t_2 - t_1)$]。很明显，如果依赖于一些时间函数值的统计特征可以通过时间平均的方法得到，那么这些随机函数的集合一定构成一个多维平稳过程。在相反的情形，通过时间平均得到的特征依赖的变量数目会小于相应的概率平均。

4.6 均匀随机场

在研究平稳随机过程函数的时间平均收敛到相应的概率平均所需条件之前，我们将简单考虑，如果我们进行空间平均而不是时间平均，讨论中所必须进行的改变。当然，这里我们必须考虑点$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$的随机函数$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$，即三维空间中的随机场。这些场的空间平均可以定义为

$$\tilde{u}_{A,B,C}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{ABC} \int\limits_{-A/2}^{A/2} \int\limits_{-B/2}^{B/2} \int\limits_{-C/2}^{C/2} u(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, x_3 + \xi_3) \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2 \mathrm{d}\xi_3. \tag{4.64}$$

我们必须确定$\tilde{u}_{A,B,c}(\boldsymbol{x})$在$A \to \infty, B \to \infty, C \to \infty$（或至少一个这种极限过程下）以某种确定方式趋向于概率平均$\overline{u(\boldsymbol{x})}$的条件。为此，我们首先要求满足类似方程（4.59）的一个条件：

$$\overline{u(\boldsymbol{x})} = U = \text{常量}, \tag{4.65}$$

即概率平均在所有空间点相同。通过完全相同的方法有可能借助空间平均确定关联函数$\overline{u(\boldsymbol{x}_1)u(\boldsymbol{x}_2)} = B_{uu}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$，于是在每个情形这个函数必须只

依赖于其宗量的矢量差：

$$B_{uu}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = B_{uu}(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1). \tag{4.66}$$

最终，如果场在一些空间点的值的所有可能函数的平均值可以通过空间平均得到，那么对于任意N和$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_N$，$u(\boldsymbol{x}_1), u(\boldsymbol{x}_2), ..., u(\boldsymbol{x}_N)$的$N$维概率密度必须只依赖于差$\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_N - \boldsymbol{x}_1$，即它在点$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_N$系统通过加上相同的矢量$\boldsymbol{y}$进行的任意平行移动保持不变：

$$\begin{aligned} p_{x_1,x_2,...,x_N}(u_1, u_2, ..., u_N) &= p_{x_1+y,x_2+y,...,x_N+y}(u_1, u_2, ..., u_N) \\ &= p_{x_2-x_1,...,x_N-x_1}(u_1, u_2, ..., u_N). \end{aligned} \tag{4.67}$$

对于高斯场$u(\boldsymbol{x})$，方程（4.67）从方程（4.65）和（4.66）得到。满足条件（4.67）的场$u(\boldsymbol{x})$称为统计均匀场（或简称均匀场）。所以，如果随机场值任意函数的空间平均要和概率平均结果相同，那么所讨论的这个场必须是均匀的。当我们考虑一些场$u_1(\boldsymbol{x}), u_2(\boldsymbol{x}), ..., u_n(\boldsymbol{x})$值更一般的函数时，要求是多维（矢量）场$u(\boldsymbol{x}) = \{u_1(\boldsymbol{x}), ..., u_n(\boldsymbol{x})\}$应该是均匀的，即场$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$在任意空间点集合的分量值$u_1(\boldsymbol{x}), ..., u_n(\boldsymbol{x})$的所有概率密度在这些点平行相同的矢量$\boldsymbol{y}$时保持不变。

就湍流中流体动力学变量场而言，均匀性假设总是数学上的理想化，永远无法满足。事实上，为了能谈均匀性，流动应该充满整个无界空间，这个引用于实际流动的假设总是一种理想化。进一步，我们应该要求这个流动的所有平均值（平均速度、平均压强和平均温度）应该在所有空间中为常量，涨落的统计性质从一个空间点到另一个空间点不变。当然，所有这些要求只能在某个有限的空间区域内以足够的精度满足，这个空间区域和宏观不均匀性的尺度相比要小，并且离流动的刚性边界（或自由表面）足够远。所以，在实际中，我们只能说某个确定区域中而不能说整个空间中流体动力学场的均匀性。[12]然而，在考虑在这样的区域中均匀的湍流时，通常方便的是把它看作在整个空间中完全均匀的湍流的一部分。这个假设的价值在于均匀随机场模型在数学上简单，这极大地简化了理论分析。所以各态历经定理[即空间平均$\tilde{u}_{A,B,C}(\boldsymbol{x})$收敛到概率平均$\overline{u(\boldsymbol{x})}$ 的定理]可以应用于一个仅在一个有界区域中均匀的随机场，只要这个区域的尺度足够大（参考4.5 节末稳态随机函数的论述）。

[12]如果方程（4.67）对任意$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_N$和$\boldsymbol{y}$ （$\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_N; \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}, ..., \boldsymbol{x}_N + \boldsymbol{y}$在空间区域$G$中）成立，那么随机场被称为在空间区域$G$中是均匀的。

人为产生一个非常接近于均匀的湍流的一个非常重要的方法将在第2卷第7章中讨论（联系到均匀各向同性湍流的研究）。这里我们只需要看到，除了在整个三维空间中均匀的场，我们也可以考虑仅在某个平面（或沿某根轴）均匀的场$u(\boldsymbol{x}) = u(x_1, x_2, x_3)$，即对某个给定平面（或轴）中的所有矢量$\boldsymbol{y}$满足方程（4.67），但一般来说对其他$\boldsymbol{y}$不满足方程（4.67）。这样一个场$u(\boldsymbol{x})$在平行于均匀方向的任意平面或线中的值显然形成了这个平面或这条线中的均匀场。同样自然的是预期，在流体动力学场不在整个空间均匀而仅在某个平面（或沿某条线）均匀时，空间平均经常也适用。然而，在这些情形，必须仅对相应的平面或直线而不是在三维空间中考虑平均（即方程（4.64）中的三重积分必须替换为一个二重积分或单一的积分）。

在很多湍流理论的问题中，我们可以假设相应的流体动力学场是均匀的，至少在一个方向是均匀的，或者它们是平稳的（或者它们同时满足这这些条件）。所以，如果我们可以证明在均匀或平稳条件下，概率平均可以替换为时间或空间平均，那么这在实践上有非常重要的意义。然而，实际上，平稳性或均匀性本身都不足以保证时间或空间平均收敛到概率平均值。[13]

然而，如我们现在要证明的，收敛的必要条件具有非常一般的特征。于是，在应用问题中，几乎总是可以假设它们是被满足的。

4.7 各态历经定理

首先，为了确定，我们仅讨论平稳随机过程$u(t)$和时间平均（当然，把坐标t替换为空间坐标x，完全相同的讨论可以应用于在直线上均匀的随机场$u(x)$）。我们先非常清楚地定义随机变量$\tilde{u}_T(t)$（由方程（4.57）定义）在$T \to \infty$时收敛到常量$\overline{u(t)} = U$的含义。方便的是考虑随机变量$\tilde{u}_T$在$T \to \infty$时收敛到极限U（一般来说是一个随机变量），如果

$$\lim_{T \to \infty} \overline{|\tilde{u}_T - U|^2} = 0. \tag{4.68}$$

根据切比雪夫不等式

$$P\{|\tilde{u}_T - U| > \varepsilon\} \leq \frac{\overline{|\tilde{u}_T - U|^2}}{\varepsilon^2} \tag{4.69}$$

[13]为了验证这个论断，考虑平稳过程$u(t)$的例子就足够了，其中概率等于1，对于任意t，$u(t) = u(0)$（故而这个过程的几乎所有实现都可以用平行于t 轴的直线代表）。这里，显然对于所有T，$\tilde{u}_T(t) = u(0)$，如果$u(0)$有某个概率分布，那么为了定义平均值$\overline{u(t)} = \overline{u(0)}$，必须有这个函数$u(t)$的大量不同实现[每个都约化为唯一的值$u(0)$]。然而，在应用问题中，这总是被考虑为随机变量$u = u(0)$而不是随机函数（顺便说一下，多维概率密度$p_{t_1 t_2 \dots t_N}(u_1, u_2, ..., u_N)$在此情形不是通常的函数，而是用狄拉克$\delta$函数表示）的一个例子

从方程（4.68）也可以得到

$$\lim_{T\to\infty} P\{|\tilde{u}_T - U| > \varepsilon\} = 0, \tag{4.70}$$

即$\tilde{u}_T$偏离U超过任意给定ϵ的概率在$T\to\infty$时趋向于零（所以可以要多小有多小，只要所选择的T 值足够大）。[14]

方程（4.70）为我们在实践中使用$\tilde{u}_T$值而不是U提供了足够的理由，其中T相对较大。所以剩下只需要找到方程（4.68）成立的条件。

容易看到方程（4.68）左边（其中$\tilde{u}_T$是平稳随机过程$u(t)$的时间平均（4.57），而$U=\overline{u(t)}$是概率平均）可以用涨落$u(t)$的关联函数

$$b_{uu}(\tau) = \overline{[u(t+\tau)-U][u(t)-U]} = B_{uu}(\tau) - U^2 \tag{4.71}$$

表示[见下面的方程（4.83）]。所以方程（4.68）的正确性一定由函数$b_{uu}(\tau)$的某些性质决定。从应用于湍流理论的观点来看，下面的事实具有根本的重要性：如果在$\tau\to\infty$时$b_{uu}(\tau)\to 0$，那么$\tilde{u}_T(t)$一定收敛到概率平均。这是下面首先由Slutskiy (1938)证明的一般定理的一个推论：*方程（4.68）对平稳随机过程$u(t)$得到满足的充要条件是关联函数$b_{uu}(\tau)$满足条件*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T b_{uu}(\tau)\mathrm{d}\tau = 0. \tag{4.72}$$

这个定理通常被称为平稳随机过程的大数定律或各态历经定理[15]，证明在本小节末给出。很明显如果在$\tau\to\infty$ 时$b_{uu}(\tau)\to 0$，那么条件（4.72）肯定满足。所以在此情形，方程（4.68）总是对的。因为总是可以假设湍流的流体动力学变量$u(t)$ 涨落的关联函数$b_{uu}(\tau)$ 在$\tau\to\infty$ 时趋于零（见上面的4.2节），所以在湍流理论中我们总是可以从这个事实出发，对于稳态流，任意流体动力学场的概率平均值可以通过对足够长的时间区间平均而得到。

如果$b_{uu}(\tau)$随τ增长的减小率为

$$\int_0^\infty b_{uu}(\tau)\mathrm{d}\tau < \infty, \tag{4.73}$$

[14]在概率论中，方程（4.68）通常被称为在$T\to\infty$时$\tilde{u}_T$到U的二次平均收敛条件，方程（4.70）被称为概率的收敛条件。所以我们已经使用切比雪夫不等式证明了由$\tilde{u}_T$到U的二次平均收敛也可以得到它概率收敛到相同的极限。

[15]为了避免误解，我们应该指出，在概率论中“平稳随机过程的各态历经定理”这个名字有时用于其他命题，与概率平均和时间平均之间的联系有关。

那么也存在对区间长度T的估计，在这个时间区间上平均可以以足够精度得到平均值U。这里可以证明，对于足够大的T，渐近方程

$$\overline{|\tilde{u}_T - U|^2} \approx 2\frac{T_1}{T} b_{uu}(0) \tag{4.74}$$

成立，其中

$$T_1 = \frac{1}{b_{uu}(0)} \int_0^\infty b_{uu}(\tau) \mathrm{d}\tau \tag{4.75}$$

是一个时间量纲的常量，可以称为一个平稳函数[方程（4.74）]的“相关时间”（或“积分时间尺度”），首先由Taylor (1921)得到。所以，为了可靠地确定U，只需要使用对远大于相应的“相关时间”T_1的时间T进行的平均。在选择了所需的精度（即U替换为$\tilde{u}_T$时所允许的最大平均平方误差）后，我们可以使用方程（4.74）确定所需的平均时间T。[16]

现在我们简单讨论均匀随机场$u(\boldsymbol{x})$和空间平均。直线上的均匀场的情形一般和平稳过程没有区别。对于平面或空间中的均匀随机场，这个场在任意直线上的值形成那条线上的均匀随机场。因此，只要这个场的涨落的关联函数$b_{uu}(\boldsymbol{r})$对于至少一个方向（单位矢量）$\boldsymbol{r}_0$，τ的函数$b_{uu}(\tau\boldsymbol{r}_))$满足方程（4.72）[例如，如果至少沿一个方向在$|\boldsymbol{r}| \to \infty$时$b_{uu}(\boldsymbol{r}) \to 0$]，那么空间平均（或平面平均）一定收敛到一个常量$\overline{u(\boldsymbol{r})} \equiv U$（这个收敛性甚至对于沿平行于$\boldsymbol{r}_0$的方向平均也成立）。对于空间中的均匀场，$\tilde{u}_{A,B,C}(\boldsymbol{r})$的平方平均对所有$\boldsymbol{x}$在$A \to \infty, B \to \infty, C \to \infty$时收敛到$U$的充要条件具有这种形式

$$\lim_{A\to\infty,B\to\infty,C\to\infty} \frac{1}{4ABC} \int_0^A \int_{-B}^B \int_{-C}^C b_{uu}(\boldsymbol{r}) dr_1 dr_2 dr_3 = 0 \tag{4.76}$$

（对于平面上的均匀场所需的变化很明显）。这个条件的证明稍微不同于一维情形类似的证明。替代方程（4.74），我们现在有

$$\overline{[\tilde{u}_V - U]^2} \approx 2\frac{V_1}{V} b_{uu}(0), \qquad (4.74')$$

其中$\tilde{u}_V$是对体积$ABC = V$的平均，V_1是“相关体积”（或“积分体积”）

$$V_1 = \frac{1}{b_{uu}(0)} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty b_{uu}(\boldsymbol{r}) dr_1 dr_2 dr_3, \qquad (4.75')$$

[16]这里我们可以注意到，如果我们令$N = T/2T_1$，方程（4.74）右边完全类似于N次独立测量的算术平均的平均平方误差。所以，相关时间为T_1的平稳函数对时间$2NT_1$平均等价于对这个函数的N次独立测量（即N个样本）的平均。

在方程（4.74'）中假设它是有限的。

上面的结果也可以应用到高阶矩或$u(t)$或$u(\boldsymbol{x})$的时间或空间平均值的任何函数的其他概率平均值的计算。这里我们仅需要把过程$u(t)$或场$u(\boldsymbol{x})$替换为一个新的过程或场（它是原始的那个过程或场的非线性函数）。例如，在平稳过程$u(t)$的情形，为了能通过变量$u(t_1+\tau)u(t_2+\tau)...u(t_N+\tau)$对时间$\tau$平均得到$N$阶矩（4.62），我们只要求固定$t_1,t_2,...,t_N$的$2N$阶矩

$$\begin{aligned}&B_{u...uu...u}(t_2-t_1,...,t_N-t_1,\tau,t_2-t_1+\tau,...,t_N-t_1+\tau)\\&=\overline{u(t_1)...u(t_N)u(t_1+\tau)...u(t_N+\tau)}-\overline{[u(t_1)...u(t_N)]}^2\end{aligned} \tag{4.77}$$

是τ的函数，满足方程（4.72）。因为通常基于物理断言，$u(t_1)...u(t_N)$和$u(t_1+\tau)...u(t_N+\tau)$之间的相关系数在$\tau\to\infty$时趋向于零，所以在实践中，通常假定满足必要条件，使用时间平均是正当的。为了估计必要的平均时间，必须估计相应的“相关时间”，即相关系数的积分。对于高斯过程$u(t)$，矩量（4.77）可以用关联函数和$u(t)$的平均值表示，使用一般规则（4.28）计算更高阶矩。特别是在用时间平均确定一个平均值为零的高斯随机过程$u(t)$的平方平均$\overline{u^2(t)}=B_{uu}(0)$时，

$$\overline{[u^2(t+\tau)-\overline{u^2(t)}][u^2(t)-\overline{u^2(t)}]}=2b_{uu}^2(\tau) \tag{4.78}$$

起到了关联函数$b_{uu}(t)$的作用。所以方程（4.74）-（4.75）在这里取这种形式

$$\overline{[\tilde{u}_T^2-b_{uu}(0)]^2}\approx\frac{4T_2}{T}b_{uu}^2(0),\quad T_2=\frac{1}{b_{uu}^2(0)}\int\limits_0^\infty b_{uu}^2(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{4.79}$$

我们注意到在此情形，由

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T[b_{uu}(\tau)]^2\mathrm{d}\tau=0 \tag{4.80}$$

[在方程（4.72）用（4.78）带入$b_{uu}(\tau)$得到]，也可以得到初始条件（4.72）。此外，对于高斯平稳随机过程，由方程（4.80）得到这个过程值（具有有限的概率平均）的任意函数的概率平均值等于对时间T的平均值在$T\to\infty$的极限[参见例如Grenander (1950)]。Tempel'man (1962)给出了这个结果向高斯均匀随机场（和一些更一般的随机函数）的推广。Birkhoff, Kampé de Fériet (1962)给出了这种随机场的一些较弱的结果。

为了证明，如果条件（4.72）得到满足，方程（4.68）一定成立，我们把差$\tilde{u}_T(t)-U$的平方平均用关联函数$b_{uu}(\tau)$表达：

$$\begin{aligned}\overline{[\tilde{u}_T(t)-U]^2} &= \overline{\frac{1}{T^2}\left\{\int\limits_{-T/2}^{T/2}[\tilde{u}_T(t)-U]dt\right\}^2} \\ &= \frac{1}{T^2}\int\limits_{-T/2}^{T/2}\int\limits_{-T/2}^{T/2}\overline{[\tilde{u}_T(t)-U][\tilde{u}_T(s)-U]}dtds \\ &= \frac{1}{T^2}\int\limits_{-T/2}^{T/2}\int\limits_{-T/2}^{T/2}b_{uu}(t-s)dtds \\ &= \frac{2}{T^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^{\tau_1}b_{uu}(\tau_1)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau_1\end{aligned} \tag{4.81}$$

[已经作了替换$t-s=\tau, t+s=\tau_1$并考虑到$b_{uu}(-\tau)=b_{uu}(\tau)$]。如果$b_{uu}(\tau)$满足方程（4.72），那么对于任意$\delta>0$，存在$T_0=T_0(\delta)$使得

$$\int\limits_0^{\tau_1}b_{uu}(\tau)\mathrm{d}\tau<\frac{\delta}{2}\tau_1,\quad \text{对于}\quad \tau_1>T_0. \tag{4.82}$$

另一方面，因为$|b_{uu}(\tau)\leq b_{uu}(0)$，所以对于任意$\tau_1$

$$\int\limits_0^{\tau_1}b_{uu}(\tau)\mathrm{d}\tau<b_{uu}(0)\tau_1. \tag{4.83}$$

方程（4.83）对τ_1从零到T_0积分，方程（4.82）从T_0到某个$T>T_0$积分，对于任意$T>T_0$我们发现

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^{\tau_1}b_{uu}(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau_1<\frac{b_{uu}(0)T_0^2}{2}+\frac{\delta(T^2-T_0^2)}{4}. \tag{4.84}$$

于是，对于

$$\frac{b_{uu}(0)T_0^2}{2}<\frac{\delta T^2}{4}$$

即对于

$$T>\sqrt{\frac{2b_{uu}(0)}{\delta}}T_0$$

有

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^{\tau_1}b_{uu}(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau_1<\frac{\delta}{2}T^2.$$

所以对于任意$\delta > 0$，对于$T > T_0$和$T > \sqrt{\frac{2b_{uu}(0)}{\delta}}T_0$，

$$\overline{[\tilde{u}_T - U]^2} = \frac{2}{T^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^{\tau_1} b_{uu}(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau_1 < \delta, \tag{4.85}$$

即方程（4.68）成立。

如果方程（4.72）左边所示的极限存在但等于$c \neq 0$，那么函数$b_1(\tau) = b_{uu}(\tau) - c$方程（4.72）。所以，在此情形，很明显

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}\overline{[\tilde{u}_T - U]^2} &= \lim_{T\to\infty}\frac{2}{T^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^{\tau_1} b_{uu}(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau_1 \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{2}{T^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^{\tau_1}[b_1(\tau) + c]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau_1 \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{2}{T^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^{\tau_1} b_1(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau_1 + c = c\end{aligned}$$

即当$T \to \infty$时$\tilde{u}_T$不收敛到U。然而，可以证明，

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T b_{uu}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

对于关联函数$b_{uu}(\tau)$总是存在（见例如本书第2卷第6章）。于是可以得到，当条件（4.72）失效时，时间平均$\tilde{u}_T$ 在$T \to \infty$时不收敛到相应的概率平均$\overline{u(t)} = U$。

如果关联函数$b_{uu}(\tau)$不仅满足方程（4.72），也满足更强的条件（4.73），那么方程（4.74）容易从方程（4.81）得到。

我们注意到，一般来说从方程（4.68）不能得到对于随机过程的任意实现，时间平均$\tilde{u}_T$在$T \to \infty$时回趋向于恒等于$\overline{u(t)} = U$的极限。如果对于任意实现，我们有时会碰到与$\tilde{u}_T$远离U所需一样大的T值，那么方程（4.68）不会被违反（故而对于单个实现，极限

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T u(t)dt$$

就是不存在）。然而，可以证明，对于对几乎所有实现有$\overline{|u(t)|} < \infty$的任意平稳过程$u(t)$（即，对于除了一些总概率等于零的“奇异”实现的所有实现），时间平均值$\tilde{u}_T$在$T \to \infty$时会趋向于一个确定的极限。（这被称为Birkhoff-Khinchin各态历经定理。见例如，Doob (1953)第XI章第2节，Rozanov (1967)第IV章第5节。）但由此得到，在所有情形，当满足方程（4.68）[即，在关联函数$b_{uu}(\tau)$满足方程（4.72）时]过程$u(t)$的单个实现的时间平均的极限，在概率平均极限存在时，二者都等于$\overline{u(t)}$。

第3章 雷诺方程和湍流的半经验理论

5. 管道、边界层等情形的湍动剪切流

5.1 雷诺方程

湍动流体流动的研究自然地从圆管中或平板上方边界层中的流动开始。这是因为这些是实验室中重现的最简单情形，对于很多工程问题非常重要。关于这些流动已经收集到的丰富实验材料使得我们可以将它们考虑为一个标准，我们可以依靠它们验证各种关于湍流本性的理论和假设。关于管道和边界层中流动最重要积分特性的基本数据的讨论，即纵向速度分布、流率和表面摩擦定律也在本节中占据核心位置。我们也将简单讨论"自由湍流"的情形，其中刚性边界不产生明显效应，在计算中我们考虑在实际计算中广泛使用的关于湍流的某些假设。然而，首先，我们必须讲述O. Reynolds (1894)关于任意湍流的一般考虑，这构成了整个湍流理论的基础。

我们已经提到，湍流中速度、压强、温度等流体动力学场结构非常复杂，实践中不可能对它们单独描述。所以，一开始，我们必须考虑流动的整个系综，并且只研究它的平均统计性质，假设所关心的所有流体动力学场在3.2节解释的意义下是随机的。此后，我们将总是假设这种方法是可能的，即我们只把这些流动*定义为湍动的*，对于它们存在所有可能的流体动力学变量由某些概率分布（有连续的密度）表征的相似流动的统计系综。在这方面，我们必须强调通常把湍流简单定义为伴随所有流体动力学变量的无序涨落的流动，对于给出湍流的数学理论是不够的。另一方面，如果流动的统计系综存在，那么所有流体动力学变量的相应统计描述甚至从纯实践的观点看也不是"不完备的"。这是因为任何应用都不需要非常混乱的单个流动的每个细节知识，而只需要感兴趣的平均特征。当然，在实践中，常用的不是系综平均，而是时间或空间平均。所以从实践的观点看，流体动力学变量的随机场也必须拥有某些各态历经的性质。此后，如果不特别提到，我们总是假设这最后一个条件是满足的。

随机流体动力学场最重要同时也是最简单的统计特征是它们的平均值。场的值u极其平均值$\overline{u}$的差$u' = u - \overline{u}$自然被称为场u的涨落。在雷诺的原始考虑以及几乎所有后续的湍流研究中，所有流体动力学变量分解为平均值和涨落扮演了一个基本角色。

流体动力学变量的平均值一般是非常光滑和缓变的。另一方面，涨落由时间和空间上的巨大变化表征。一般来说，可以假设湍流非均匀性有任意小的尺度和周期，小到与分子平均自由程相当的长度和与两次相继分子碰撞之间的平均间隔相当的周期。如果是这样，那么在湍流理论中使用通常连续介质力学的概念和方法（特别是流体动力学微分方程）当然是不对的。然而，实验中，湍流非均匀性从未有这么小的时空尺度。这可以用这个事实解释，对于这么小的非均匀性，相应的速度梯度会极其大，所以对于非常小尺度的运动，克服黏滞摩擦的能量损失非常大，使得这种运动不可能存在。结果，湍流非均匀性的最小尺度和最小周期总是超过分子运动的尺度和周期几个量级。更精确地，空气和水中实际湍流中观察到的最小非均匀性的长度标度为几个毫米的量级，或者在极端情形，是十分之几毫秒（见例如第2卷，第8章）而在通常条件下，空气分子的平均自由程是10^{-5} cm的量级，对于水分子，它处于更小的量级。就数量级而言，因为流体速度不超过分子的平均热运动速度（接近5×10^4 cm/sec，或声速的量级），湍流涨落的特征周期总是超过两次相继分子碰撞之间的平均时间几个数量级。在与最小不均匀性尺度相当的距离和与最小涨落周期相当的时间间隔，所有流体动力学变量会光滑变化，可以用可微函数描述。因此，用通常的流体动力学微分方程描述湍流是完全正当的。

然而，不可能直接应用这些方程，因为湍流中的流体动力学场总是不稳定的，强烈依赖于初始条件的最小细节，这些细节永远无法以足够精度获知。此外，即使初始条件精确知道，由于初始数据对小扰动不稳定，用它们求解问题也非常麻烦，没有实际应用。然而，这不意味着流体动力学方程永远不能用于湍流研究。由于湍流的流体动力学场的单个实现满足给定的微分方程，所以这些场的统计性质通过一些重要的关系联系起来，它们在湍流理论中至关重要。

最简单的这类关系是雷诺通过对不可压缩流体的流体动力学方程直接平均得到的。让我们从动量平衡方程（即纳维-斯托克斯方程（1.6））出发，其中方便的是借助连续性方程把$u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}$转换为$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(u_i u_\alpha)$。我们对这个方程的所有项平均，使用这个操作与空间和时间导数对易的事实[方程（3.6）]以及方程

$$\overline{u_i u_j} = \overline{(\overline{u_i} + u_i')(\overline{u_j} + u_j')} = \overline{u_i}\,\overline{u_j} + \overline{u_i' u_j'},$$

这个方程直接从方程（3.3）和（3.7'）得到。在此情形，我们得到方程

$$\frac{\partial \rho \overline{u_i}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho \overline{u_i u_\alpha}+\rho \overline{u_i' u_\alpha'})=\rho \overline{X_i}-\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}+\rho\nu\nabla^2\overline{u_i}, i=1,2,3, \tag{5.1}$$

这通常被称为*雷诺方程*。这些方程只含有光滑变化的平均量，所以它们的使用不会有任何与湍流的流体动力学变量复杂性和无规性有关的困难。然而，确实出现了另一个困难。这和雷诺方程中存在新的未知量$\tau_{ij}^{(1)}=-\rho\overline{u_i' u_j'}$ 有关[包含负号的原因后面解释]，表征了速度场的涨落成分。这些新变量的出现显然是由于流体动力学方程的非线性。当然，在线性方程平均时，没有新的项出现。所以，例如，平均的连续性方程有这种简单形式

$$\frac{\partial \overline{u_\alpha}}{\partial x_\alpha}=0. \tag{5.2}$$

为了理解方程（5.1）中额外的项$-\rho\overline{u_i' u_j'}$的物理意义，让我们考虑动量流密度的平均值

$$\overline{\rho u_i u_j+p\delta_{ij}-\sigma_{ij}}=\rho\overline{u_i u_j}+\overline{p}\delta_{ij}-(\overline{\sigma_{ij}}-\rho\overline{u_i' u_j'}),$$

其中$\sigma_{ij}=\rho\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$是不可压缩流体中的黏滞应力张量。这个表达式表明，对于平均运动，张量$\tau_{ij}=\overline{\sigma_{ij}}-\rho\overline{u_i' u_j'}=\overline{\sigma_{ij}}+\tau_{ij}^{(1)}$ 充当了黏滞应力张量的角色。为例得到这里的和，负号被引入到$\tau_{ij}^{(1)}$的表达式中。所以，在湍流中，除了由于分子黏滞力导致的流体粒子之间的动量交换（由黏滞应力张量描述），还有速度涨落引起的混合导致的从一个流体元到另一个流体元的动量输运。换句话说，湍流混合对平均运动的效应类似于黏滞增强。为了强调这一点，雷诺方程有时写为：

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t}+\overline{u_\alpha}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_\alpha}=\overline{X_i}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\nu\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_\alpha}-\overline{u_i' u_\alpha'}\right). \tag{5.1'}$$

方程（5.1）中关于平均运动的$-\rho\overline{u_i' u_j'}$项的物理意义是湍流涨落引起的额外应力的张量分量，就像普通流体力学中一样，微观分子运动导致黏滞应力的出现。这些额外的应力称为湍流理论中的*雷诺应力*。

描述流体向处于流动中固体的动量转移的分量在雷诺应力张量的研究中特别有趣。令σ为这样的固态物体表明上的某个小面积，可以近似考虑为平面，和平面$x_3=0$的一部分重合。此外，我们假设这个平面邻域中平均流动的方向平行于Ox_1 轴。在此情形，施加于面积Σ的摩擦力沿Ox_1轴方向。施加在固体表面单位面积上摩擦力的大小等于表面某点Ox_3 方向动量的x_1

分量的流量密度。即它可以用这个方程定义

$$\tau_0 = \left(\overline{\sigma_{13} - \rho\overline{u_1' u_3'}}\right)_{x_3=0}.$$

变量τ_0被称为壁上的剪切应力。因为在刚性壁中，$\overline{u_i}$和u_i'及他们对x_1的导数显然等于零，而

$$\overline{\sigma_{13}} = \rho\nu\left(\frac{\partial\overline{u_1}}{\partial x_3} + \frac{\partial\overline{u_3}}{\partial x_1}\right),$$

τ_0可以写为下面更简单的形式：

$$\tau_0 = \rho\nu \left.\frac{\partial\overline{u_1}}{\partial x_3}\right|_{x_3=0} \tag{5.3}$$

并且可以被称为壁上的黏滞剪切应力。然而，如果我们选择一个物体表面上方平行于Σ的面积，那么施加于其上的总应力可以定义为

$$\tau = \overline{\sigma_{13}} - \rho\overline{u_1' u_3'}. \tag{5.4}$$

在平均速度处处沿Ox_1轴方向这个重要的特殊情形，τ等于剪切应力

$$\tau = \rho\nu\frac{\partial\overline{u_1}}{\partial x_3} - \rho\overline{u_1' u_3'}. \tag{5.4'}$$

在此情形，根据Boussinesq (1877, 1897)的想法，我们可以形式地写出

$$-\rho\overline{u_1' u_3'} = \rho K\frac{\partial\overline{u_1}}{\partial x_3}, \tag{5.5}$$

其中K是一个量纲L^2T^{-1}的新物理变量，称为涡黏滞系数（或湍流黏滞系数，或动量输运系数）。所以，和$\nu + K$可以称为湍流的总黏滞（或有效黏滞）。和通常的（分子）黏滞ν不同，涡黏滞K不描述流体的任何物理性质，而是表征涨落运动的统计特征。于是，它不一定是个常量，而是可能随随空间和时间变化，并且原则上可以取负值（见下文6.3节）。[1]首先要强调的是，涡黏滞K 通常比分子黏滞ν 大得多。所以，在离开刚性边界一定距离，总的剪切应力（定义为Ox_3 轴方向动量的x_1 分量的流量）可以由这个方程计算

$$\tau = \tau^{(1)} = -\rho\overline{u_1' u_3'}. \tag{5.6}$$

[1]这里我们注意到，根据定义，涡黏滞也依赖于所使用的平均方法，即在选择相似流动的统计系综时，在给定湍流的定义中必须包含其分配。这对于大气和海洋中的“自然”湍流特别重要，哪里通常不存在唯一定义的自然的“相似流系综”，对不同统计系综的平均可能导致相差几个量级的K值。

雷诺方程（5.1）是平均运动的动量平衡方程。他们的雷诺应力描述了这些动量的湍动输运。对于流体传递的任意标量守恒量（例如，对于热量或类似大气中水蒸气、二氧化碳、烟尘这样的被动成分），也可以得到类似的平衡方程。对描述了不可压缩流体中标量ϑ输运的方程（1.72）应用平均过程，我们得到

$$\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\overline{u_\alpha}\overline{\vartheta}+\overline{u'_\alpha\vartheta'})=\chi\nabla^2\overline{\vartheta}, \tag{5.7}$$

或者，要不然就是，

$$\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial t}+\overline{u_\alpha}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\chi\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial x_\alpha}-\overline{u'_\alpha\vartheta'}\right) \qquad (5.7')$$

[参见方程（5.1）和（5.1'）]。如果ϑ表示温度，那么矢量$c_p\rho\overline{\vartheta}\overline{u_i}$描述了平均运动造成的平移热量输运$\kappa\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial x_i}$，其中$\kappa=c_p\rho\chi$是分子热传导导致的热输运，

$$q_i=c_p\rho\overline{\vartheta'u'_i} \tag{5.8}$$

是Ox_i轴方向的湍流热流密度。湍流涨落导致出现一个额外的热量，与分子热传导产生的热流有点相似。和方程（5.5）中一样，我们可以形式地写出

$$c_p\rho\overline{\vartheta'u'_i}=-c_p\rho K_\vartheta\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial x_i}, \tag{5.9}$$

其中K_ϑ是一个新的热传导系数的一部分，这个系数称为涡（或湍流）热传导系数或热输运系数。一般来说，这个系数对不同坐标轴可能不同。另一方面，如果和方程（5.7）和（5.7'）中一样，ϑ代表一个被动成分的浓度，那么

$$j_i=\rho\overline{\vartheta'u'_i} \qquad (5.8')$$

表示这种成分在Ox_i轴方向的湍动流量密度。在此情形，方程

$$\rho\overline{\vartheta'u'_i}=-\rho K_\vartheta\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial x_i}$$

中的系数K_ϑ称为涡（或湍流）成分扩散系数或成分输运系数[这个系数由Schmidt (1917, 1925)引入]。

当然，前面所有这些关于涡黏滞的论述可以对涡热传导和涡扩散系数重复。6.3节讨论所有这些系数。

5.2 刚性壁附近的平均速度分布的一般形式

现在让我们研究平行于平均流的刚性壁附近湍流的一般性质。这项研究的结果可以用于圆管或平面渠流，也可以用于平面上方边界层（特别是中性分层大气的表面层）中的流动。我们首先考虑以刚性壁为界的半空间$z > 0$中，没有平均压强梯度情况下，沿Ox轴方向运动的稳态平面平行流这种简化的理想化情形。

对于零压强梯度的稳态平面平行层流，有第一个流体动力学方程（见1.2节第一个例子）得到，速度分布$u(z)$一定是线性的。类似的湍流的第一个雷诺方程具有这种形式

$$\nu \frac{d^2\overline{u}}{dz^2} - \frac{d}{dz}\overline{u'w'} = 0, \tag{5.10}$$

这个方程这里说的是沿Oz轴（从流体指向壁）的动量x分量的流量在距离壁任意距离都相同：

$$\tau(z) = \rho\nu\frac{d\overline{u}}{dz} - \rho\overline{u'w'} = \tau_0 = \text{常量}, \tag{5.11}$$

其中τ_0是壁$z = 0$上的黏滞剪切应力。然而，这不能唯一确定平均速度分布$\overline{u}(z)$，因为除了函数$\overline{u}(z)$，它还含有另一个未知量$\overline{u'w'}$。尽管如此，可以通过量纲分析得到函数$\overline{u}(z)$ 可能形式的某种推导。实际上，距离壁z处的流动的平均特征可能仅依赖于剪切应力τ_0、z坐标和流体参数ν和ρ。此外，τ_0和ρ仅以组合$\frac{\tau_0}{\rho}$（不依赖于质量量纲）进入流动的运动学特征。代替比例$\frac{\tau_0}{\rho}$，方便的是用物理量

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}, \tag{5.12}$$

它具有速度量纲，所以是壁附近流动速度的一个自然标度。我们称这个量为*摩擦速度*。因为从u_*、ν和z只能写出一个无量纲组合$\frac{zu_*}{\nu}$，所以平均速度分布$\overline{u}(z)$对z、τ_0、ρ和ν的依赖的一般形式可以写成

$$\overline{u}(z) = u_* f\left(\frac{zu_*}{\nu}\right), \tag{5.13}$$

或者等价地写为

$$\overline{u}_+ = f(z_+), \quad \text{其中}\overline{u}_+ = \frac{\overline{u}}{u_*}, z_+ = \frac{zu_*}{\nu}.$$

其中$\overline{u}_+$和z_+是无量纲速度和与壁的距离，$f(z_+)$是某个单变量函数。湍流

理论中重要的结果（5.13）被称为普适壁面定律（law of the wall）。这是Prandtl (1925)首先写出的[也参见Prandtl (1932b)]。

方程（5.13）和（5.14）当然仅在壁可以假设为光滑（即可以用简单的方程$z = 0$描述）时是对的。因为壁湍流中唯一的长度标度是摩擦长度$z_* = \frac{\nu}{u_*}$，我们现在可以给出光滑性需求的一个定量解释：如果壁上突出物的平均高度h_0满足条件

$$h_0 \leq z_* = \frac{\nu}{u_*} \tag{5.14}$$

那么壁是动力学光滑的（更精确的数据，见5.4节）。只有在此情形，壁附近的速度分布由方程（5.13）定义。然而，对于突起物高度不满足方程（5.14）的粗糙墙，这些突出物也会影响壁附近平均速度的分布。于是，在此情形，方程（5.13）必须用更一般的方程

$$\overline{u}(z) = u_* f\left(\frac{zu_*}{\nu}, \frac{h_0 u_*}{\nu}, \alpha, \beta, ...\right) \tag{5.15}$$

替代，其中$\alpha, \beta, ...$是无量纲参量，表征突起物的形式和在壁表面的分布。再一次地，对于极端粗糙的壁，使用方程（5.15）导致进一步困难，和这个事实有关：不清楚从什么水平测量z。我们随后回到这个问题，更详细地讨论粗糙壁附近的流动。

在考虑函数f的形式之前，让我们简单讨论把方程（5.13）和（5.15）应用到实践中遇到的各种湍流。我们从两个互运动的平行壁之间平均压强梯度为零的湍流开始。这种情形的方程（5.10）和（5.11）是精确的。所以，例如，对于光滑壁，方程（5.13）要成立，只需要距离一个壁的距离z远小于壁之间的距离H。[2] 然而，运动平面壁之间的流动很难在实验室中精确复现。于是，为了验证方程（5.13）和（5.15），我们必须研究其他更容易复现的具有这些方程描述的速度分布的流动。

如已经观察到的，这种流动的一个例子是中性热分层情形中地球表面附近（陆地和水上方）的空气运动。当然，在地球大气中，水平压强梯度总是略微偏离零，此外，这里的风速也受到地球转动产生的科里奥利力的影响（见下面的6.6节）。然而，在最低层空气中，这些因素只起很小的作用，不会引起剪切应力τ随高度的明显变化。我们在6.6节末给出的简单估计表明，在大气中，到大约50 m高度，τ通常都可以被认为是常量。于是，在这一层中，对于中性分层，我们由充分的理由使用简化方程（5.11）和（5.15）[我们注意到在真实大气中，下方的陆地表明几乎总是粗糙的，因

[2]严格来讲，对于运动壁之间的湍流，必须应用$\overline{u}(z) = u_* f\left(\frac{zu_*}{\nu}, \frac{z_1 u_*}{\nu}\right)$形式的方程，其中$z_1 = H - z$是与第二个边界壁的距离。对于$z_1 \gg z$，可以取$\frac{z_1 u_*}{\nu} = \infty$，这个方程变为方程（5.13）。

为u_*一般为10 cm/sec，于是z_*不超过几十分之一毫秒]。

现在让我们讨论管、渠和平面上方边界层中的实验室湍流。在宽平面渠这个最简单的情形，流动可以近似考虑为两个无限大平面$z=0$和$z=H=2H_1$之间、在$z=$常量平面上均匀的稳态平面平行流。在此情形，第一个和第三个雷诺方程具有这种形式

$$\frac{\partial\tau}{\partial z}=\frac{\partial\overline{p}}{\partial x},\quad \rho\frac{\partial\overline{w'^2}}{\partial z}=-\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial z} \tag{5.16}$$

其中，和通常一样，$\tau=\rho\nu\frac{d\overline{u}}{dz}-\rho\overline{u'w'}$。从方程（5.16）的第二个方程得到$\overline{p}+\rho\overline{w'^2}=\overline{p}_0$仅依赖于$x$（$\overline{p}_0$显然和壁上的平均密度相等）。但$\overline{w'^2}$不能依赖于$x$，所以，使用方程（5.16）的第一个方程得到

$$\tau=\frac{\partial\overline{p}_0}{\partial x}z+常量.$$

我们把下面的壁$z=0$处的剪切应力记作τ_0，因为根据对称性，渠中心（$z=H_1$）的剪切应力一定等于零，最后一个方程也可以写为

$$\tau=\tau_0\left(1-\frac{z}{H_1}\right). \tag{5.17}$$

所以，对于$z\ll H_1$，我们有$\tau(z)=\tau_0=$常量。于是，在此情形也存在与渠壁相邻的一层，其中的剪切应力基本为常量。在这一层中，压强梯度的影响可以忽略，所以可以使用方程（5.13）和（5.15）（也参见本小节末尾的补充说明）。

直径$D=2R$的圆管中的问题压强流的情形完全类似。这里把雷诺方程转换到柱坐标系(x,r,ϕ)，我们可以重写第一个和第二个方程为：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\tau=\frac{\partial\overline{p}}{\partial x},\quad \rho\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\overline{u_r'^2}-\frac{\overline{u_0'^2}}{r}\right)=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial r},$$

其中

$$\tau=\rho\nu\frac{d\overline{u_x}}{dr}-\rho\overline{u_x'u_r'}.$$

由这些方程得到$\frac{\partial^2\overline{p}}{\partial x\partial r}=0$，即纵向压强梯度不依赖于$z$。所以$\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}=\frac{d\overline{p}_0}{\mathrm{d}x}$，其中$\overline{p}_0$是壁上的静压强。现在由第一个方程（5.16'）我们得到

$$\tau=\frac{d\overline{p}_0}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{r}{2}=\frac{d\overline{p}_0}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{R}{2}\left(1-\frac{z}{R}\right)=\tau_0\left(1-\frac{z}{R}\right),z\leq R, \tag{5.17'}$$

其中$z = R - r$是与壁的距离。于是，由$z \ll R$，剪切应力τ可以再次假设为常量，平均速度分布由方程（5.13）[或方程（5.15）]给出，和半空间中没有压强梯度的平面平行流的情形一样。

最后，通过向通常的平均流体动力学场的边界层方程（1.38）-（1.39）添加对应于雷诺应力的项得到平面上方边界层中的雷诺方程。考虑到边界层中的涨落速度远小于平均纵向速度$\overline{u}$，并且x导数远小于z导数，仅保留领头项，我们发现零纵向压强梯度的第三个雷诺方程有这样的形式

$$\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{w}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\overline{u'w'} + \nu\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial z^2}. \tag{5.18}$$

由此可以估计剪切应力τ沿垂直方向的变化并证明，在边界层中存在相当大的一层，其中剪切应力几乎是恒定的。在这一层中，可以假设流动是平面平行的，由方程（5.10）描述，而平均速度分布由方程（5.13）或（5.15）给出。

这里有趣的是注意到，根据Ludwig, Tillmann (1949)，含有普通的普适函数f的方程（5.13）对于具有相当大（但不是太大）的纵向压强梯度（它看起来一定会在所考虑的流体的部分产生巨大的剪切应力的变化）的边界层相当厚的部分也是正确的。这个观察后来也被一些其他研究者证实。Coles (1955)用这个事实解释了这一点：在具有纵向压强梯度的边界层中，τ_0沿壁的变化导致τ沿垂直方向的变化，这在很大程度上补偿了平均压强梯度产生的τ在z方向的变化[参见Rotta (1962a,b)]。然而，这个问题没有完全清楚，例如，借助特别的半经验论证，Mellor (1966)发现压强梯度对壁附近边界层中的速度分布的影响相当大。

压强梯度对速度分布相对较小影响的另一个解释可能和这个事实有关（被实验数据和近似的理论计算所证实）：平均动力学变量的垂向分布甚至对于τ相当大的变化也只是略微敏感。所以，例如，对于τ变换不超过$15-20\%$的流体层，我们几乎总是可以使用简化的理论，考虑这个流体层是恒应力的（即$\tau =$常量）。随后，我们将看到，在一些情形，恒应力层的结果甚至在渠（或管）的整个截面上都给出相当好的近似。在下一个近似中，应力变化的影响可以用简单的扰动方法考虑，这将在5.5节末描述。

5.3 光滑壁附近的流动，黏滞亚层和对数边界层

让我仍然假设壁$z = 0$是动力学光滑的，所以方程（5.13）成立。于是这个方程中函数$f(z_+)$的形式可以对两个极限情形（对于大的和小的宗量z_+）明确地给出。

在非常接近壁的区域，在壁上$\rho u'w' = 0$和$\tau_0 = \rho\nu\frac{d\overline{u}}{dz}$[方程（5.3）]的事实起到了基本的作用。所以对于足够小的z值，黏滞应力的大小可以远大于雷诺应力$-\rho\overline{u'w'}$。$\nu\left|\frac{d\overline{u}}{dz}\right| \gg |u'w'|$的流体层通常被称为*黏滞亚层*（viscous

sublayer）。[3]在这个亚层中我们可以假设

$$\rho\nu\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}=\tau_0=\text{常量} \tag{5.19}$$

所以

$$\overline{u}(z)=\frac{u_*^2}{\nu}z,\quad f(z_+)=z_+. \tag{5.20}$$

严格来说，方程（5.20）只是函数$f(z_+)$在点$z_+=0$邻域泰勒展开的第一项。这个展开接下来的项可以通过方程（5.11）在$z=0$ 点对z求到得到。这里，对于$z=0$自然有$u'=v'=w'=0$。于是，当$z=0$，所有速度涨落对x和y的导数等于零，并且由连续性方程，$\left(\frac{\partial w'}{\partial z}\right)_{z=0}=0$。

所以

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d^2\overline{u}}{dz^2}\right)_{z=0} &= \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial}{\partial z}\overline{u'w'}\right)_{z=0}=\frac{1}{\nu}\left(\overline{\frac{\partial u'}{\partial z}w'}+\overline{u'\frac{\partial w'}{\partial z}}\right)_{z=0}=0,\\
\left(\frac{d^3\overline{u}}{dz^3}\right)_{z=0} &= \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\overline{u'w'}\right)_{z=0}=\frac{1}{\nu}\left(\overline{\frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}w'}+2\overline{\frac{\partial u'}{\partial z}\frac{\partial w'}{\partial z}}+\overline{u'\frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}}\right)_{z=0}=0,\\
\left(\frac{d^4\overline{u}}{dz^4}\right)_{z=0} &= \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial^3}{\partial z^3}\overline{u'w'}\right)_{z=0}=\frac{3}{\nu}\left(\overline{\frac{\partial u'}{\partial z}\frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}}\right)_{z=0}.
\end{aligned}$$

所以，平均速度分布用z幂级数表示的泰勒展开具有这种形式

$$\overline{u}(z) = \frac{u_*^2}{\nu}z-c_4\frac{u_*^5}{\nu^4}z^4+c_5\frac{u_*^6}{\nu^5}z^5+...,$$

$$f(z_+)=z_+-c_4z_+^4+c_5z^5+... \quad (5.21')$$

这里

$$c_4=-\frac{\nu^3}{24u_*^5}\left(\frac{\partial^3\overline{u'w'}}{\partial z^3}\right)_{z=0}=-\frac{\nu^3}{8u_*^5}\left(\overline{\frac{\partial u'}{\partial z}\frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}}\right)_{z=0}.$$

加入负号是因为直觉是很清楚在壁附近$\overline{u'w'}<0$，所以$\left(\frac{\partial^3\overline{u'w'}}{\partial z^3}\right)_{z=0}<0$，而$c_5=\frac{\nu^4}{120u_*^6}\left(\frac{\partial^4\overline{u'w'}}{\partial z^4}\right)_{z=0}$。Murphree (1932)以一个有点不同的形式（似乎

[3]一度，术语“黏滞亚层”和“层流亚层”都在使用，因为人们假设在这层中流动是层流。然而，对壁附近流体中小粒子或气泡运动的直接超微观观测[Page, Towend (1932)、Fidman (1959)、Orlov (1966)、Popovich, Hummel (1967)、Kline, Reynolds et al. (1967)及其他工作]和很多精致的热线风速计在壁附近的测量数据[Laufer (1951, 1954)、Klebanoff (1955)、Comte-Bellot (1963, 1965)、Coantic (1966, 1967a)、Kline, Reynolds et al. (1967)和很多其他工作]非常确定地表明，尽管这个亚层中的平均速度和零压强梯度的平面平行层流的线性速度分布相同，但其中的流动不是层流，而是伴随着相当不规则的涨落。于是，现在，术语“层流亚层”一定被认为是误导人的。

第一次）证实了展开（5.20’）[也参见Townsend (1956)]。后来，某些作者[特别是Landau, Lifshitz (1963)、Deissler (1955)、Elrod (1957)、Levich (1962)、Lyatkher (1968)等，参见本小节结语]也进行了某些论证，更倾向于$c_4 = 0$，但所有这些都不严格。[4] 已有的实验数据也不足以可靠地估计系数c_4，因而没有理由认为$c_4 = 0$。然而，$f(z_+)$ 的二阶和三阶导数在$z_+ = 0$处等于零的事实足以说明速度变化在相当大的区域内非常接近线性，即说明黏滞亚层的概念。

黏滞亚层的上边界可以有条件地定义，例如，$\overline{u'w'} = 0.1\nu\frac{d\overline{u}}{dz}$的$z$值。也可以使用和这个定义有关的某些其他定义。在每个情形，这个黏滞亚层的厚度δ_v只能依赖于参数u_*和ν。于是，它一定由方程$\delta_v = \alpha_v\frac{\nu}{u_*} = \alpha_v z_*$给出，其中$\alpha_v$是量级为1的普适常数（其精确值当然依赖于定义），必须从实验数据得到。这个常数依赖于定义，即没有唯一值这个事实是非常自然的，因为黏滞亚层没有一个明确的上边界，而是平滑过渡到下一个黏滞应力和雷诺应力有相同量级的流动区域。然而，就像边界层厚度δ的方程中数值系数的情形，这个情形中α_v的允许值范围不是非常宽。通常，α_v选为5，即假设$\delta_v = 5\frac{\nu}{u_*}$，这个选择的基础是实验数据，在图25中给出。

现在让我们考虑第二种极限情形，值z远大于$z_* = \frac{\nu}{u_*}$。在距离刚性壁一定距离的充分发展的湍流中，湍流应力大小壁黏滞应力大很多个量级。于是，对于足够大的z（比如，对于$z > \delta_l$）我们可以忽略方程（5.11）中的$\rho\nu\frac{d\overline{u}}{dz}$项并假设$\tau_0 = -\rho\overline{u'w'}$。所以对于$z > \delta_l$，平均速度变化的规律一定不依赖于黏滞系数$\nu$而必须仅有密度$\rho$和经过流体的动量流$\tau_0$（等于流体和壁在单位面积上的总相互作用力）确定。这里最重要的是，我们所说的不是速度而是平均速度变化的规律。实际上，通过考虑黏滞应力可忽略的一层中的流动，我们无法得出速度$\overline{u}(z)$的绝对值。然而，我们可以只研究这一层内两个高度z_1和z_2的速度差$\overline{u}(z_1) - \overline{u}(z_2)$，特别是层$(z, \delta_l)$中的速度增量$\overline{u}(z) - \overline{u}(\delta_l)$，其中$z > \delta_l$。这是从力学方程的伽利略不变性得到的，据此，对所有$z \geq \delta_l$的速度$\overline{u}(z)$增加任意常量不会改变经过流体传递的动量流。于是，$z > \delta_l$的速度$\overline{u}(z)$的绝对值不是由τ_0和z定义的，而是也依赖于$\overline{u}(\delta_l)$值，即依赖于$z \leq \delta_l$（依赖于黏滞系数ν）层中速度变化的规律。然而，对于$z > \delta_l$，在高度z的平均速度的梯度$\frac{d\overline{u}}{dz}$一定不依赖于ν，即它一定只是参数τ_0、ρ 和z的函数。容易从这些参数看到，有可能写出唯一的具有速

[4] Ohji (1967)提出的方程$c_4 = 0$的证明是错误的。实际上，它基于一个特别不严格的假设（在这篇文章中没有明确写出）。让我们也注意到，考虑到真实渠流和管流中$\tau(z) \neq$常量，但$\partial\tau/\partial z =$常量[参见方程（5.17）和（5.17’）]我们会得到$u(z)$的泰勒级数的z^2项的无量纲系数c_2 不为零。然而即使在此情形也有$c_3 = 0$。

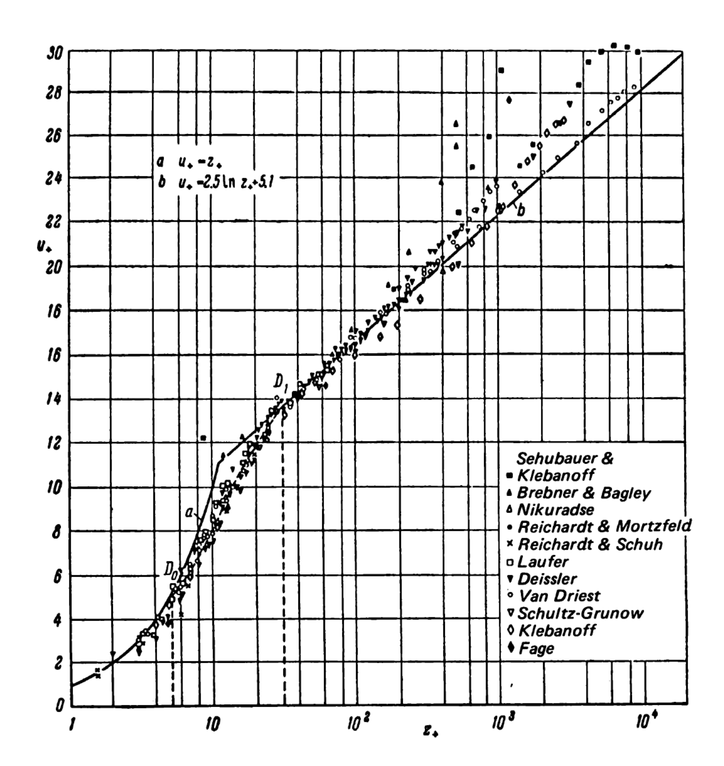


图 25 根据管流、渠流和边界层流动测量数据得到的光滑壁附近湍流的普适无量纲平均速度分布[根据Kesting, Richardson (1963)]。

度梯度量纲的组合$\tau_0^{1/2}/\rho^{1/2}z = \frac{u_*}{z}$。所以对于$z > \delta_l$，必须满足

$$\frac{d\overline{u}(z)}{dz} = A\frac{u_*}{z}, \tag{5.21}$$

其中A是一个普适的无量纲常量。对于$z > \delta_l$的速度分布，由方程（5.21）我们得到对数方程

$$\overline{u}(z) = Au_* \ln z + A_1, \tag{5.22}$$

其中A_1是一个新的常量，根据前面的论证，它可能也依赖于黏滞系数ν。满足方程（5.22）的流体层被称为*对数层*，或*对数边界层*。这一层的存在对于很多碰到沿刚性壁湍流的问题是极端重要的。普适方程（5.22）首先由Kármám (1930)和Prandtl (1932b)用（和上面给出以及其他人）完全不同的论证得到。后来，找到了一系列证明，其中一些相当有趣，在下面重述。这个方程的一个简单的纯量纲分析推导首次在Landau, Lifshitz(1963)书的第一版中给出，也参见Squire (1948)。

除了量纲分析推导方程（5.22），我们也可以使用描述$z > \delta_l$流动的流体动力学方程在相似变换$x \to kx, y \to ky, z \to kz$和$t \to kt$下的不变性。因

为这些变换把$z>0$的半空间变为自身，所以自然的是考虑这个半空间中湍流的所有统计特征（只要它们不依赖于黏滞）在这些变换下也是不变的。然而，如我们已经看到的，如果忽略黏滞（即，在$z=0$时暂时忽略边界条件$u=0$），我们可以仅考虑相对速度$\overline{u}(z_1)-\overline{u}(z)$。因为摩擦速度$u_*$在相似变换下显然不变，那么根据不变性假设，对于不太小的z_1和z_2值，无量纲比值$\frac{\overline{u}(z_2)-\overline{u}(z_1)}{u_*}$，只能依赖于比值$\frac{z_2}{z_1}$

$$\frac{\overline{u}(z_2)-\overline{u}(z_1)}{u_*}=g\left(\frac{z_2}{z_1}\right). \tag{5.23}$$

由函数$g\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$的定义（5.23）得到$g\left(\frac{z_3}{z_1}\right)=g\left(\frac{z_3}{z_2}\right)+g\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$。后一个关系，由于恒等式$\frac{z_3}{z_1}=\frac{z_3}{z_2}\cdot\frac{z_2}{z_1}$也可以写为这种形式

$$g(\xi_1\cdot\xi_2)=g(\xi_1)+g(\xi_2). \tag{5.24}$$

不难证明函数方程（5.24）的唯一连续解时对数函数$g(\xi)=A\ln\xi$。所以我们得到等价于方程（5.22）的方程

$$\overline{u}(z_2)-\overline{u}(z_1)=Au_*\ln\frac{z_2}{z_1}.$$

由量纲论证，很明显对数边界层的下边界高度δ_l一定由方程$\delta_l=\alpha_l\frac{\nu}{u_*}$定义，其中$\alpha_l$是另一个普适的无量纲常量，近似地确定到常量$\alpha_v$的精度。图25的数据表明，取$\alpha_l=30$是可以的。通过方程（5.22）和（5.13）的比较得到，在$\frac{u_*}{\nu}+Bu_8$中常量A_l一定具有这种形式：$A_l=Au_*$，其中B是一个无量纲普适常量。所以方程（5.22）可以重写为

$$\overline{u}(z)=u_*\left(A\ln\frac{zu_*}{\nu}+B\right)\quad \text{当}\quad z>\alpha_l\frac{\nu}{u_*}. \tag{5.25}$$

所以

$$f(z_+)=A\ln z_++B\quad \text{当}\quad z_+>\alpha_l. \qquad (5.25')$$

这里必须指出，传统上经常用$\kappa=\frac{1}{A}$代替系数A。κ通常被称为冯·卡门常量。把A替换为$\frac{1}{\kappa}$并把$e^{-\kappa B}$记作β，方程（5.25）也可以重写为

$$\overline{u}(z)=\frac{u_*}{\kappa}\ln\frac{zu_*}{\beta\nu}. \qquad (5.25'')$$

方程（5.25）-（5.25"）中的常量A（或$\kappa=1/A$）和B（或$\beta=e^{-\kappa B}$）的数值可以从实验数据确定。如5.2 节指出的，可以在光滑管、具有光

滑壁的矩形渠和光滑平面上方的边界层中进行测量。Nikuradse (1932)在不同半径、$\mathrm{Re}=\frac{U_m D}{\nu}$从$4\times10^3$到$3.2\times10^6$的光滑直管中的水流中进行了第一批有用的这种测量，即精确测量平均速度分布和剪切应力分布。他的数据表明，对于流动相当大的一部分，从距离壁大约$30\frac{\nu}{u_*}$的距离持续到几乎管的中心，平均速度可以以很好的精度用方程（5.25）形式的方程描述。对于这个方程中的系数A和B，Nikuradse给出了两种选择：对于$A=2.4, B=5.8$（即$\kappa=0.417, \beta\approx0.09\approx1/11$）方程（5.25）和实验数据在$30\nu/u_*<z<1000\nu/u_*$区域符合得最好，不延伸到管的中心，而$A=2.5, B=5.5$（即$\kappa=0.40, \beta\approx0.11\approx1/9$）被证明可以使方程（5.25）最好地应用于从$z=30\nu/u_*$到管中心的整个区域。后来，类似的测量对于管流（或平面渠流）和平面上的边界层重复了很多次。而所有情形中的方程（5.25）都相当可靠地被证实，在得到的A值和特别是B值中，有一小部分弥散[见，例如Hinze (1962)的调查，这个工作含有A和B值的大量数据的细致分析]。[5]所考虑的三种流动的很多数据收集在图25 中（借自Kestin, Richardson (1963)，在这里以例子的方式给出）。我们看到，对于$z<5\nu/u_*$，所有$u_+=\overline{u}/u_*$ 的观察值非常接近方程（5.20）的曲线$u_+=zu_*/\nu$，而对于$500\nu/u_*>z>30\nu/u_*$，它们唯一曲线$u_+=2.5\log zu_*/\nu+5.1$ 上，对应于Coles (1955)建议的系数$A=2.5, B=5.1$ （即$\kappa=0.4, \beta=0.13$）的方程（5.25），这些系数接近（1955年前及1955 年后的）所有其他研究者给出的系数的平均值。[6]

在中间区域$5\nu/u_*<z<30\nu/u_*$区域中，图25中画出的比例$\overline{u}(z)/u_*$的实验值显然偏离方程（5.20）给出的值和（5.25）给出的值。根据实验数据，这个区域的$f(z_+)$值可以用一条光滑曲线表示，这条曲线在$z_+=5$进入曲线（5.20），而在$z_+=30$进入$A=2.5, B=5.1$的曲线（5.25'）（图25中的点线）。进一步，我们注意到点线对图25中的实线偏离不是非常大。所以，在不要求很高精度的情形，可以假设直到$z_+=11.1$（曲线$u_+=z_+$和$u_+=2.5\ln z_+ +5.1$交点的横坐标）平均速度分布由方

[5]我们回想一下，根据理论推导，A和B仅对常剪切应力τ_0的理想平面平行流是普适常量。所以对于实际的实验室实验（在那里方程（5.25）的可用性是“用肉眼”确定的），这些系数的经验值小的弥散完全可以解释，即使忽略了不可避免的测量误差。

[6]例如，Clauser (1956)提出，对于边界层流动，$A=2.44, B=4.9$。Townsend (1956)使用$A=2.44, B=5.85$。在Longwell (1966)的教科书中建议了略微不同的$A=2.71, B=3.5$。Spalding (1964)和Escudier, Nicoll (1966)假设$A=2.5, B=4.7$。Coantic (1966)在圆管流中和Comte-Bellot (1965)在平面平行流中的测量分别给出$A=2.50, 4.40\le B\le 5.50$和$A=2.7, 4.5\le B\le 6.0$。研究者也研究$A$和$B$可能略微依赖于Re（即，依赖于黏滞$\nu$）[Hinze (1962), Comte-Bellot (1965)]。对于常应力层，这种依赖显然和物理上令人信服的量纲论证不相容。然而，容易用应力变化的影响来解释。关于这个依赖关系的数据极端不确定[例如，在Lindgren (1965)近期非常精确的数据中完全没有对Re的依赖]。所以目前合理的做法是弃之。

程（5.20）给出，而对于$z_+ > 11.1$，它由方程（5.25）给出。这个假设[被Prandtl (1919,1928) 和G. I. Taylor (1916)的文章接受]当然意味着我们忽略$\rho\nu\frac{d\overline{u}}{dz}$和$-\rho\overline{u'w'}$具有同样量级的中间区，并假设在黏滞亚层（我们现在考虑其厚度$\delta_v = \delta_l = 11.1\nu/u_*$）外就是对数层，其中黏滞应力和雷诺应力相比小得可以忽略。

此外，我们注意到，从湍流黏滞K[见方程（5.5）]观点看，我们可以定义黏滞亚层为可以假设$K \equiv 0$（即有些黏滞系数等于$\nu =$常量）的亚层。对数层可以以完全相同的方式定义为分子黏滞和湍流黏滞相比小得可以忽略的层，湍流黏滞由这个方程给出：

$$K = \frac{u_* z}{A} = \kappa u_* z, \quad \kappa \approx 0.4. \tag{5.26}$$

在这些项中，图25中的点线对应于有效黏滞系数以某种方式从接近ν（对于$z = 5\nu/u_*$）光滑变化到$30\kappa\nu \approx 12\nu$（对于$z = 30\nu/u_*$）的层。

到目前为止，我们仅讨论了湍流的平均速度分布。然而，让我们得到壁的普适规律和对数层概率的物理考虑同样可以很好地应用到刚性平面壁附近的任何其他单点速度矩量的研究中。所有这些恒应力层中矩量当然仅依赖于参数z, τ, ν和ρ，即它们一定由摩擦速度u_*的某次幂和无量纲距离$z_+ = zu_*/\nu$的一个特定函数的乘积表示。对于足够大的z_+，湍流涨落的统计机制不再依赖于黏滞系数ν。所以在中心矩（不依赖于平均速度$\overline{u}$）情形，相应的普适函数在$z_+ \to \infty$时趋向于常量。作为例子，我们区涨落u', v'和w'的单点二阶矩。总共由六个这种矩。然而，由于湍流对平面Oxz的对称性，其中两个（即$\overline{u'v'}$和$\overline{v'w'}$）恒等于零。所以仅剩下四个非零矩量：$\overline{u'^2} = \sigma_u^2, \overline{v'^2} = \sigma_v^2, \overline{w'^2} = \sigma_w^2$和$\overline{u'w'}$。所以，除了方程（5.13），我们还有四个这种形式的方程：

$$\begin{aligned} \sigma_u &= u_* f_1(z_+), \sigma_v = u_* f_2(z_+) \\ \sigma_w &= u_* f_3(z_+), -\overline{u'w'} = u_*^2 f_4(z_+), \end{aligned} \tag{5.27}$$

含有四个新的普适函数。除了$f_4(z_+)$，我们也可以使用函数$f_5(z_+) = f_4/f_1 f_3$，它描述了u'和w'之间相关系数的变化

$$-r_{uw} = \frac{-\overline{u'w'}}{(\overline{u'^2 w'^2})^{1/2}} = f_5(z_+).$$

在对数层中，函数$f_4(z_+)$一定恒等于1，而函数f_1, f_2, f_3和f_5假设常数值

$$f_1(\infty) = A_1, f_2(\infty) = A_2, f_3(\infty) = A_3 \text{和} f_5(\infty) = A_5 = (A_1A_3)^{-1}.$$

当我们靠近壁，函数$f_1, ..., f_4$趋于零，而它们在$z_+ = 0$的泰勒级数展开有这种形式：

$$\begin{aligned} f_1(z_+) &= a_1z_+ + b_1z_+^2 + ..., \\ f_2(z_+) &= a_2z_+ + b_2z_+^2 + ..., \\ f_3(z_+) &= a_3z_+^2 + b_3z_+^3 + ..., \\ f_1(z_+) &= a_4z_+^3 + b_4z_+^4 + ..., \end{aligned}$$

（因为当$z = 0$时$u' = v' = w' = \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$）。系数$a_4$和$b_4$和方程（5.20'）有一个简单的关系，因为在壁附近$f_4(z_+) = 1 - f'(z_+)$[由方程（5.11）]。函数$f_1, ..., f_5$的精确形式无法从理论上得到，而它们的近似形式可以从Laufer (1954)、Klebanoff (1955)、Comte-Bellot (1965)、Coantic (1966, 1967)和其他人（见，例如，基于Laufer和Klebanoff 数据的图26和27）的数据中发现。这两幅图的其他例子由Dumas, Marcillat (1966)发表。他们的数据和Comte-Bellot的数据并不十分接近，但是令人满意的。管流和边界层流的数据互相符合得很好。特别是，对于两种情形的常数A_1, A_2和A_3，可以得到近似相等的值：

$$A_1 \approx 2.3, A_2 \approx 1.7, A_3 \approx 0.9.$$

（A_1和A_3值相对接近其他人得到的值，包括在大气表面层进行测量的那些人，见下面的8.5节。）除了壁附近速度涨落已有的数据，我们也可以得到系数$a_1, ..., a_4$值的一个近似估计（尽管精度仍然相当低），即

$$a_1 \approx 0.3, a_2 \approx 0.07, a_3 \approx 0.008, a_4 \approx 0.001$$

[见Laufer (1954)、Klebanoff (1955)、Townsend (1956)、Coantic (1965)]。

对于速度涨落的（三阶或更高阶的）高阶矩，数据壁方程（5.27）定义的二阶矩少得多。然而，Comte-Bellot (1963, 1965) 构建了普适函数$f_6(z_+) = \overline{u'^3}/\left(\overline{u'^2}\right)^{3/2}$和$f_7(z_+) = \overline{u'^4}/\left(\overline{u'^2}\right)^2$一些初步的经验图，它们定义了纵向分量$u'$的偏斜（skewness）和超出（excess）。

与壁的规律有关的相似性定律不仅可以对平均速度分布和一点速度矩写出，也可以对常应力层中的点的速度分量的一般多点概率分布写出。所有这些分布一定只依赖于ν, u_*和点的坐标。此外，如果我们考虑速度涨

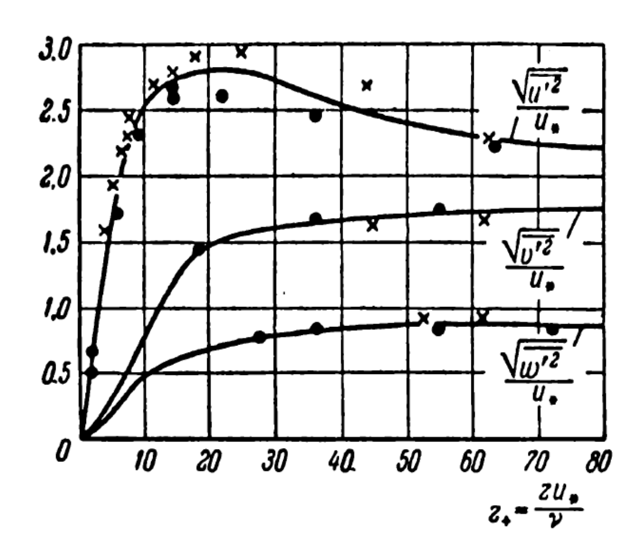


图 26 光滑壁附近流动的三个速度分量涨落强度的普适无量纲分布，根据Klebanoff （×）和Laufer （·）的数据。

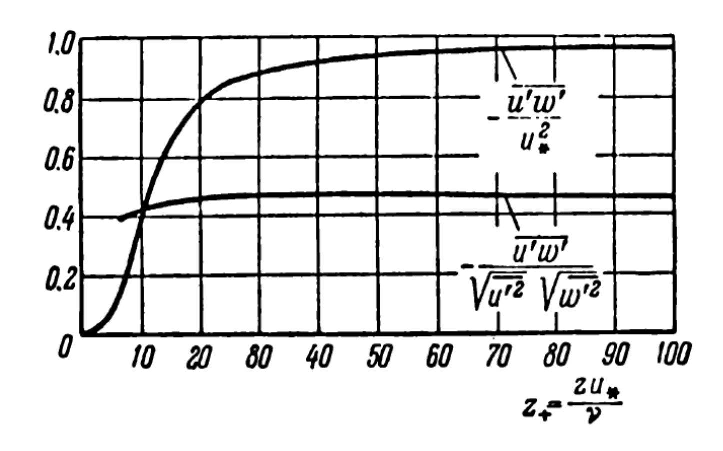


图 27 根据Laufer的测量得到的普适函数$f_4(z_+)$和$f_5(z_+)$。

落u', u'和w'在常应力层（满足条件：1) 对于所有$i=1,...,n$，$z_i \gg z_* = \nu/u_*$（即所有位于对数层中的点）以及2)任意两点之间的距离远大于z_*）中$(x_1,y_1,z_1),...,(x_n,y_n,z_n)$ 点上同时的值的概率分布，一定对黏滞系数ν没有依赖。在这些条件下，无量纲变量$u'/u_*, v'/u_*, w'/u_*$的概率密度只能依赖于无量纲参量

$$\frac{x_2-x_1}{z_1},...,\frac{x_n-x_1}{z_1},\frac{y_2-y_1}{z_1},...,\frac{y_n-y_1}{z_1},\frac{z_2}{z_1},...,\frac{z_n}{z_1}.$$

对数层中概率分布的一般相似性假设也可以推广到多点和多时间概率分布

（参见7.5节，那里会考虑更一般的密度分层湍流边界层的情形）。然而，目前甚至对于适于证实这个假设的较简单的单时刻多点概率分布也没有实验数据，常应力层中的多点速度矩的数据也极端缺乏。

在某些情形，主要是通过流体的湍流热输运和质量输运的情形（见下面的5.7节），图25的实线显然是足够严格的，而光滑的虚线非常不方便。在这些情形，需要一个描述中间层$\delta_v < z < \delta_l$中平均速度分布的解析表达式，和$z \leq \delta_v = \alpha_v \nu/u_*$和$z \geq \delta_l = \alpha_l \nu/u_*$的极限表达式（5.20）和（5.25）有光滑连接。不同作者已经多次提出不同复杂性的函数$f(z_+)$的一系列这种表达式。其中第一批这种表达式是冯·卡门的表达式(1934, 1939)，在转换区$\alpha_v < z_+ < \alpha_l$ 使用了近似$f(z_+) = A_1 \ln z_+ + B_1$，其中系数$A_1$和$B_1$（不同于$A$和$B$）使得在$z_+ = \alpha_v$ 和$z_+ = \alpha_l$取的和$A_1 \ln z_+ + B_1$，分别和函数（5.20）和（5.25）相同。换句话说，它对应于图25中用直线把点D_0和D_1连起来。后来，Hofmann (1940)、Reichardt (1940)和Levich (1962)第4节提出了$f(z_+)$在$\alpha_v < z_+ < \alpha_l$的其他插值公式，和测量结果有更好的对应。Squire (1948)、Loitsyanskiy (1958)、Frank-Kamenetskiy (1947)以及Rotta (1950)、Hudimoto (1941, 1951)、Miles (1957)非常类似的工作中使用了一个不同的想法。这里，流动区域仅被分为两层：$z_+ \leq \alpha_v$和$z_+ > \alpha_v$。在第一个区域中，使用通常的线性方程（5.20），在第二个区域中，$f(z_+)$有比方程（5.25'）复杂的解析表达式给出，这个表达式在$z_+ \to \infty$时渐近趋向于方程（5.25'），在$z_+ = \alpha_v$处与方程（5.20）光滑连接。另一方面，Ribaud (1940)、Hama (1953)、Deissler (1955; 1959)、Rannie (1956)、Levich (1959)第25节、Ts'ai Ko-yeng (1961)和Tien and Wasan (1963)把流动分为两层$z_+ < \alpha_l$和$z_+ \geq \alpha_l$并在第二层中使用通常的对数方程（5.25'），在第一层中使用比方程（5.20）复杂的表达式作为$f(z_+)$。Lin, Moulton, Putnam (1953)、Loytsanskiy (1960; 1962a) 和Carr (1962)的工作使用了一个三层模型（即，假设$f(z_+)$对于$z_+ < \alpha_v$、$\alpha_v < z_+ < \alpha_l$和$z_+ > \alpha_l$ 由不同的方程给出），但是和冯·卡门的工作不同，在第一层中，对于$f(z_+)$采用了非线性表达式（这些工作中使用了不同的非线性表达式）。此外，Loytsyanskiy (1960, 1962a)也提出了一个单一的但非常复杂的$f(z_+)$表达式，适用于所有z_+值。Reichardt (1951a)、van Driest (1956)和Spalding (1961)提出了描述$f(z_+)$在整个常应力区行为的较简单的近似表达式，和所有数据都符合得相当好。Kleinstein (1967)后来也推导了Spalding的两个方程中的一个。Hinze (1961)第7节、Longwell (1966) 第8.7节和Loitsyanskiy (1962a)、Rotta (1962b)、Kestin, Richardson (1963)的文章中概述了沿这些路径的工作。Coantic (1966) 的毕业论文中包含了一个非常详细的综述（含有大约四十个不同的方程）。

$f(z_+)$在$z_+ \to \infty$的行为细节的问题引发了广泛讨论。在一些上面提到的工作中，对于$z_+ \leq \alpha_v$假设了$f(z_+) = z_+$，即在$z_+ = 0$处假设$f(z_+)$所有比一阶高的导数为零。这个假设后来被很多研究者批评。根据Ranney提出的方程，在$z_+ \to -$时，$f(z_+) = z_+ + c_3 z_+^3 + \ldots$，其中$c_3 \neq 0$，这个结果显然和精确方程（5.20'）矛盾。同时，Reichardt, Ribaud, Lin, Moulton和Putnam, Carr和Tien以及Wason的方程得出了方程（5.20'）$c_4 \neq 0$的表达式，而根据Hama, Deissler, Levich, Loytyanskiy和Ta’ai Ko-yeng，在这个表达式中$c_4 = 0$。最后Spalding同时引入了$c_4 \neq 0$和$c_4 = 0$的两个$f(z_+)$不同表达式。$f(z_+)$在$z_+ \to 0$时的行为的问题得到了相当的关注，这是因为对于足够大的Prandtl（或Schmidt）数，这个行为会极大地影响湍流热输运（或质量输运）。这会在5.7节中更详细地讨论。

在这个工作的大部分中，我们也会看到不选择函数$f(z_+)$作为讨论的基础，而是选择有效黏滞$\nu + K = \tau/\rho \frac{d\overline{u}}{dz} = \nu[f'(z_+)]^{-1}$对$z_+$的依赖关系。在某些情形，这个依赖关系的形式简单地基于数据选择，但更经常的情况它是借助某种定性论证（通常辅以特殊的半经验假设）从理论上得到的。然而，这些假设都没有被严格证明。同时，各位研究者提出的曲

线$\overline{u}_+ = f(z_+)$的弥散和幅度同量级（如果不是更大的话），和已有的实验数据的弥散有相同的特征。因此，目前没有理由为$f(z_+)$选择任何一个“最佳”方程，以及在这些方程的不同变体之间做选择，只需要考虑哪一个最适合解决任意问题。

目前关于函数$f_1 ... f_4$等的方程的情况不太令人满意。这些函数依赖于非常靠近刚性壁的流体涨落非常什么的统计性质。关于这个性质最一般的想法之一是动力学方程中非线性项的相对作用随着与壁距离的减小而减小。所以黏滞亚层中的涨落u', v'和w'可以用线性化方程描述似乎是合理的。Landau和Levich早在1940年就对这个假说作出了最早的具体推论[参见Landau and Lifshitz (1963)和Levich (1962)]。他们推测线性方程一定意味着整个黏滞亚层的时标是恒定的，并且通过这个推理得到了$\overline{-u'w'}$和y_+^4成正比。然而，这个推论是不严格的，Lyatkher (1968)更近期对同样结果的解析推导有更多疑点。（上面引用的）关于壁附近平均速度分布的一些其他工作也可以包含在和黏滞亚层有关的研究中。然而，我们认为在这里进一步讨论它们没有用。

Sternberg (1962, 1965)和Schubert, Corcos (1967)对壁附近的速度涨落进行了更详细的研究。所有这些工作中都假设湍流涨落起始与湍流层外部，从外项黏滞亚层输运。此外，这些工作都基于线性化的动力学方程。每个工作之间的不同在于对方程不同的简化和对亚层外边界条件不同的选择。在所有情形，这些作者都对亚层内涨落的统计性质进行了初步计算，得到了大体上和1965年前发现的速度涨落数据相符的结果。有趣的是注意到Einstein, Li (1956)考虑了黏滞亚层中涨落起始过程的一个完全不同的物理模型（假设壁上的过程是最重要的）。然而，他们的方程与Sternberg (1962)的相同[Einstein和Li的理论与Sternberg的理论的完整的比较可以在Kistler (1962)的文章中找到]。

然而，必须认为所有已有的理论目前都是初步的，因为它们没有考虑Kline, Reynolds et al. (1967)、Coantic (1967a,b)、Willmarth, Bo Jang Tu (1967)、Bakewell, Lumley (1967)和其他人最新的深刻实验结果。特别重要的似乎是Kline和他的合作者的结果，非常清晰地展示了黏滞亚层中涨落的很多新特征（例如，ν涨落和流动在横向（spanwise direction）的剧烈变化所起的巨大作用），这些在所有之前的理论中都没有考虑。

5.4 沿粗糙壁的流动；粗糙参数和位移高度

我们现在考虑具有平均高度h_0（和摩擦长度$z_* = \frac{\nu}{u_*}$相比不小）的突出物的粗糙壁附近的湍流。在此情形，平均速度分布由方程（5.15）给出，这个方程含有z_+和其他一些参数的普适函数f。因为很多变量的函数在实际应用中非常不方便，所以在此情形使用量纲论证不是非常有成果。然而，实际上，情况绝没有这么糟糕。

让我们假设$h_0 \geq \frac{\nu}{u_*}$。我们再一次分别考虑小和大z值的情形。对于和高度h_0相当的小z，我们必须预期平均速度$\overline{u}(z)$很大程度上依赖于壁的不规则性的形式和间距，在突起物和它们之间的空隙上方是不同的。所以这里不可能期望得到任何简单的一般规律。然而，在很多情形，我们主要感兴趣于不太靠近壁（在与摩擦长度$z_* = \frac{\nu}{u_*}$和突起物平均高度h_0相比都大的距离z）的平均速度。当然，人们认为，在距离壁如此远的地方，黏性和表面的局部性质都不会产生任何影响。这里的基本特征只是存在恒定的Oz轴负

方向的动量流，在平面$z = 0$上有一个“汇”。所以，应用于以光滑壁为界的半空间中的流动的方程（5.22）对于$z \gg h_0 > \frac{\nu}{u_*}$的两个推论在粗糙壁的情形也成立。于是，

$$\overline{u}(z) = Au_* \ln z + A_1 \text{对于} z \gg h_0 \quad (5.22a)$$

因为方程（5.22a）中的常量$A = \frac{1}{\kappa}$给出了对应于给定动量流$\tau_0 = \rho u_*^2$的平均速度梯度，所以他对于粗糙壁，必须有和光滑壁相同的值（≈ 2.5）。（同样的结论对于粗糙壁上方的对数层中的速度涨落的所有特征也成立，例如，对于比例$\sigma_u/u_* = A_1, \sigma_v/u_* = A_2$和$\sigma_w/u_* = A_3$）。然而，就系数$A_1$而言，这是由方程（5.22a）适用区域的下边界上的边界条件确定的。于是它依赖于壁邻域中平均速度的变化，这会有相当大的不同，依赖于壁是光滑的还是粗糙的。我们注意到在壁的突出物顶部和底部之间对于$z \gg h_0$的距离z的原点可以任意选取，不会明显改变结果。在实践中，通常从观测到的分布$\overline{u}(z)$和对数方程（5.22’）的最佳符合来选取[我们将在本小节后面回到这一点]。

粗糙表面上方速度分布的方程（5.22a）可以以各种不同方式写为无量纲形式。当然，我们可以适用方程（5.25），它适用于光滑壁的情形，即取

$$\overline{u}(z) = u_* \left(A \ln \frac{z u_*}{\nu} + B \right) \quad \text{对于} \quad z \gg h_0.$$

然而，这里B不再是一个普适常数，而是会依赖于确定壁的不规则型的大小、形式和位置的无量纲参数：$B = B\left(\frac{h_0 u_*}{\nu}, \alpha, \beta, ...\right)$。此外，把方程（5.22a）写为方程（5.25a），尽管对于比较光滑壁附近和粗糙壁附近的平均速度分布方便，但不太自然（在任何情况下，当$h_0 \gg \nu/u_*$）。实际上，方程（5.25a）右边含有ν，而如我们对$h_0 \gg \nu/u_*$的预期，平均速度分布（以及方程（5.22a）中的系数A_1值）一般不依赖于黏滞，仅由壁上的不规则型的大小、形式和相对位置确定，它们完全确定了最下层流动的性质。所以对于$h_0 \gg \nu/u_*$，更方便的是把平均速度分布表示为

$$\overline{u}(z) = u_* \left(A \ln \frac{z}{h_0} + B' \right). \quad (5.28)$$

我们现在可以预期，对于足够大的$\frac{h_0 u_*}{\nu}$，$B' = B + A \ln \frac{h_0 u_*}{\nu}$值不随含有黏滞$\nu$的参数$\frac{h_0 u_*}{\nu}$的变化而改变（即，它只是描述不规则性的形式和相对位置

的参数$\alpha, \beta, ...$的函数）。也有可能把方程（5.25）重写为这种形式

$$\overline{u}(z) = u_* \left(A \ln \frac{z u_*}{\nu_e} + B_0 \right), \qquad (5.25b)$$

其中$B_0 \approx 5$是关于光滑壁上方速度分布的方程（5.25）的普适常数，$\nu_e = \nu \exp[(B_0 - B)/A]$可以称为等效黏滞[它显然依赖于壁的粗糙度，即$\nu_e = \nu \cdot f_1(h_0 u_*/\nu, \alpha, \beta, ...)$]。最后，我们可以尝试用流体在壁上的表面摩擦性质（以一些未知的方式依赖于壁的几何性质）直接表示方程（5.22a）中的常数A_1。作为无量纲表面摩擦特征，我们通常使用摩擦系数（或摩擦因子）

$$c_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 2\left(\frac{u_*}{U}\right)^2, \qquad (5.29)$$

其中U是流动的特征速度。然而，对于无限半空间中的理想流动，没有特征速度。所以，这里我们只能得到无量纲系数

$$c_f(z) = 2\left[\frac{u_*}{\overline{u}(z)}\right]^2,$$

它依赖于高度，于是没什么用。但如果我们把

$$\overline{u}(z) = \frac{u_*}{\sqrt{\frac{1}{2}c_f(z)}}$$

带入方程（5.22'），那么我们得到下面简单的定律：

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}c_f(z_2)}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}c_f(z_1)}} = A \ln \frac{z_2}{z_1}$$

所以我们看到在对数层中

$$z_1 e^{-\frac{1}{A\sqrt{\frac{1}{2}c_f(z_1)}}} = z_2 e^{-\frac{1}{A\sqrt{\frac{1}{2}c_f(z_2)}}}.$$

所以物理量

$$z_0 = z e^{-\frac{1}{A\sqrt{\frac{1}{2}c_f(z)}}} = z e^{-\frac{\sqrt{2}\kappa}{\sqrt{c_f(z)}}}, \qquad (5.30)$$

具有长度量纲，不依赖于z。这个量是流动与壁面动力学相互作用的可观特征，自然地依赖于壁面的不规则性。它被称为粗糙度参数、粗糙度长度或

简称粗糙度。现在把

$$\sqrt{\frac{1}{2}c_f(z)} = \left[A \ln \frac{z}{z_)}\right]^{-1}$$

带入

$$\overline{u}(z) = \frac{u_*}{\sqrt{\frac{1}{2}c_f(z)}},$$

我们得到

$$\overline{u}(z) = Au_* \ln \frac{z}{z_0} = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0}. \tag{5.31}$$

于是

$$z_0 = \frac{\nu}{u_*} e^{-\kappa B} = h_0 e^{-\kappa B'}.$$

根据方程（5.31），粗糙度参数也可以定义为流动平均速度变为零的高度，如果$\overline{u}(z)$的对数方程适用于这个高度的话。当然，实际上，对数方程在大得多的z值就不适用了。

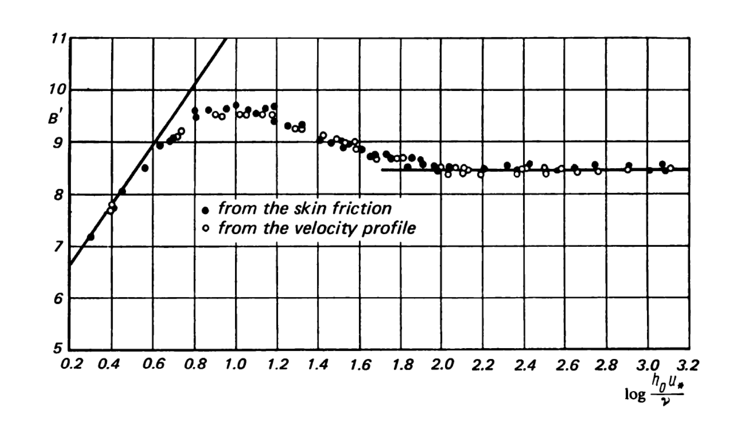


图 28 系数B'对$\frac{h_0 u_*}{\nu}$的依赖，根据Nikuradse (1933)的数据。

为了找到B, B', ν_e和z_0对突出物高度的依赖关系，我们需要来自实验的结果，其中只有突出物的大小变化，而形状和相对位置不变。非常仔细的这类实验是Nikuradse (1933)在圆管中进行的。管壁涂上了一层给定大小的沙子颗粒，不同的实验大小不同，并尽可能近地粘在一起。这些实验中得到的方程（5.28）中的系数B'对$\frac{h_0 u_*}{\nu}$的依赖如图28 所示。（这里浅色和深色的点对应于两种B'的定义方式：第一种基于直接比较测量的速度分布和方程（5.28），第二种在5.5节中描述。）对于$\log \frac{h_0 u_*}{\nu} \leq 0.6$（即$\frac{h_0 u_*}{\nu} \leq 4$）的均匀的沙子粗糙度，这种类型的方程

$$B' = A \ln \frac{h_0 u_*}{\nu} + B, \quad \text{其中} A = 2.5, B = \text{常数}(\approx 5.5)$$

成立。所以，对于$h_0 \le 4\frac{\nu}{u_*}$我们有$\nu_e = \nu$，并且速度分布将完全不依赖于h_0，即可以认为壁面是*动力学光滑的*。[7]我们观察到，对于这些h_0 值，壁的突起物将完全浸没在黏滞亚层中。这解释了它们对对数层中流动没有影响这个事实。对于$0.6 \le \ln\frac{h_0 u_*}{\nu} \le 1.7$，即$4 \le \frac{h_0 u_*}{\nu} \le 60$，会出现一个过渡区，其中突起物的峰从黏滞亚层中突出，产生额外的扰动，导致壁上的系数B和B'对$\frac{h_0 u_*}{\nu}$的特定依赖。在此情形的壁面必须考虑为*略微动力学粗糙的*。最后，对于$\log\frac{h_0 u_*}{\nu} > 1.7$，即$\frac{h_0 u_*}{\nu} > 60$，实际上不再存在黏滞亚层，而壁面附近的流动完全由单个突起物周围的流动产生的涡旋组成。这里平均速度分布$\overline{u}(z)$不依赖于黏滞系数ν，B'是常数（根据图28的数据，$B' \approx 8.5$）。在后一种情形，壁面可以称为*完全动力学粗糙的*。当然，壁面是动力学光滑、略微粗糙还是完全粗糙不仅依赖于表面的性质，也依赖于u_*和ν值（即，依赖于流动的雷诺数）。根据Nikuradse的数据（仅适用于均匀沙子的粗糙度），动力学光滑和完全动力学粗糙的三个参数B, B'和z_0值等于

$$\begin{aligned} B &\approx 5.5, B' \approx 2.5\ln\frac{h_0 u_*}{\nu} + 5.5, z_0 \approx \frac{1}{9}\frac{\nu}{u_*}\text{光滑壁} \\ B &\approx -2.5\ln\frac{h_0 u_*}{\nu} + 8.5, B' \approx 8.5, z_0 = \frac{h_0}{30}\text{完全粗糙壁} \end{aligned}$$

如果我们认为均匀沙子粗糙度的壁面上方的对数层的数据是足够完备的，那么我们可以把任何类型的粗糙度和*等价沙子粗糙高度*h_s（对于同样的τ_0对应于相同的对数速度分布）联系起来。对于覆盖了几何形状规则的突起物的完全粗糙的人工表面，这个高度h_s是Schlichting (1936)通过实验确定的[也参见Schlichting (1960)第X章第7节]。在Schlichting 的书中，我们也可以找到关于人工粗糙表面和一些工程中使用的普通表面（混凝土、铸铁、钢等，它们在很多情形被证明是完全动力学粗糙的）的等价沙子粗糙高度的额外数据和参考文献。类似的数据可以在Longwell (1966)的书和Chamberlain (1966, 1968)的文章和其他一些文献中找到。

描述不同粗糙度壁面附近对数速度轮廓的另一个方法是确定与具有相同剪切应力τ_0的光滑壁面上的流动相比，平均速度$\overline{u}$的相应减小。不规则性的存在总是导致壁面附近速度分布的平滑，即对于非常小的z值，平均速度的增长率减小。所以，在粗糙壁的情形，对数层下边缘的速度值以及整个这一层中的速度值小于光滑壁的值。使用方程（5.25）和（5.28）我们可以

[7]术语*液压光滑*或*空气动力学光滑*也经常在文献中使用。然而，文中所用的术语更好，因为它和流体的特殊性质无关。同样的评论也适用于描述所有其他粗糙度状态的术语。

写出

$$\frac{\delta u}{u_*} = A \ln \frac{h_0 u_*}{\nu} + B - B', \tag{5.32}$$

其中A = 常数 ≈ 2.5，$B = B_0$ = 常数 ≈ 5。所以$\frac{\delta \overline{u}}{u_*}$不依赖于$z$，对于完全动力学粗糙的壁，它将线性依赖于$\ln \frac{h_0 u_*}{\nu}$。$\frac{\delta \overline{u}}{u_*}$和$\ln \frac{h_0 u_*}{\nu}$之间的依赖关系在略微粗糙壁面的情形变得非线性，而对于壁面变得动力学光滑的h_0值，差$\delta \overline{u}$等于零。Hama (1954)收集了零压强梯度边界层和渡槽中对于不同粗糙度相当大量$\frac{\delta \overline{u}}{u_*}$（即$B'$ 值）的实验数据[也参见Clauser (1956)、Robertson (1957)和Perry, Joubert (1963)]。取自Clauser (1956)综述文章的图29给出了一些$\frac{\delta \overline{u}}{u_*}$。我们看到，对于足够大的$\frac{h_0 u_*}{\nu}$值，$\frac{\delta \overline{u}}{u_*}$ 实际上会变为$\ln \frac{h_0 u_*}{\nu}$的非线性函数，对应于B' = 常数（完全粗糙表面的情形）。然而，转换为全中间态，$\frac{\delta \overline{u}}{u_*}$对$\frac{h_0 u_*}{\nu}$的依赖偏离线性，对于不同类型的粗糙性发生在不同的$\frac{h_0 u_*}{\nu}$值（一般在30到100之间，根据图29的数据）。此外，$\frac{\delta \overline{u}}{u_*}$对$\frac{h_0 u_*}{\nu}$的依赖特征对于不同类型的略微粗糙表面完全不同。我们进一步注意到，图29使我们对于任意粗糙性可以非常简单地确定等价沙子粗糙度的高度h_s，即对应于同样$\frac{\delta \overline{u}}{u_*}$值的沙子粗糙度。对于完全粗糙的壁面（但仅对这种壁面），高度h_s显然正比于高度h_0。所以粗糙度参数$z_0 = \frac{h_s}{30}$在此情形也正比于h_0。

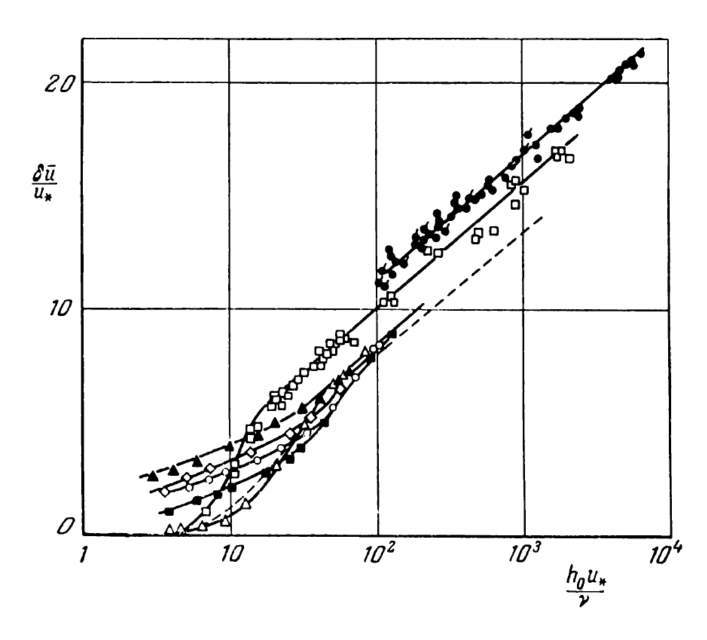


图 29 壁面粗糙性对平均速度的相对减小$\delta \overline{u}/u_*$的影响[根据Clauser (1956)]。图中各种符号表示不同类型粗糙性的数据。虚线对应于均匀沙子粗糙性的数据。

我们已经提到，平均速度对高度的对数依赖对中性（或接近中性）热

分层的大气低层（厚度为10-100 m量级）的风速也一定成立[这个事实显然是Prandtl (1932a)首先指出的]。Sverdrup (1936)、Paeschke (1936)和很多其他研究者对此进行了实验验证。[见，例如，Sutton (1953)和Priestly (1959a)]。在一些情形，对风的分布的观测是通过直接测量剪切应力τ_0实现的。对于这种测量方法的讨论见下面的8.3节。因为$u_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$可以从对数轮廓的斜率确定，假设$\kappa \approx 0.4, A = \frac{1}{\kappa} \approx 2.5$从实验室实验得到，对$\tau_0$的独立测量使得对数方程（5.31）可以相比只有风速垂向变化观测时要可靠得多。只需要记住，每个τ_0的单独测量的精度通常不是非常高，所以足够可靠的结果只能从基于大量数据得到[见，例如Perepelkina (1957)]。

所有确定摩擦速度的方法表明它的值在大气中处于10到100 cm/sec之间。因为对于空气，$\nu \approx 0.15\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{sec}$，很明显大气下方的陆地表面几乎总是完全粗糙的。风速的对数分布可以使用粗糙度参数z_0的概念方便地放到方程（5.31）中。此外，在大气中，正确选择高度z的零点通常是重要的。实际上在这里，地面上不规则物的大小h_0可以有相对大的值（例如，对于高的草或长了庄稼的田地）。同时，增加测量高度z通常被证明是非常令人沮丧的，因为随着z 增大，浮力效应也快速增大（见本书第4章）。这里重要的是考虑高度仅略大于地面突出物平均高度z的速度分布形式的问题。

对于$z \sim h_0$，参数h_0（无量纲长度）也会影响平均流动。如已经看到的，对于完全粗糙壁面，黏滞ν可以忽略。所以$d\overline{u}/dz$是τ_0, ρ, z和h_0的函数，由此我们可以形成一个无量纲组合h_0/z。于是，与平均速度梯度的方程（5.21）不同，更一般的方程

$$\frac{d\overline{u}(z)}{dz} = \frac{u_*}{\kappa z} g\left(\frac{h_0}{z}\right) \tag{5.33}$$

对$z \sim h_0$成立，其中$\kappa \approx 0.4$，$g\left(\frac{h_0}{z}\right)$是一个改正函数。当然，这个对通常方程（5.28）的改正在$z \gg h_0$时肯定就不发挥作用了，所以$g(0) = 1$。考虑$\frac{h_0}{z} < 1$，我们把函数$g\left(\frac{h_0}{z}\right)$展宽为$\frac{h_0}{z}$的幂级数，得到

$$\frac{d\overline{u}}{dz} = \frac{u_*}{\kappa z}\left[1 + a\frac{h_0}{z} + b\left(\frac{h_0}{z}\right)^2 + ...\right]. \tag{5.34}$$

我们现在引入一个新的零点，令$z = z_1 + z'$，其中z_1时固定的，量级和h_0相同，z'大于z_1和h_0。现在让我们把方程（5.34）右边的z替换为z'，不同于用$\frac{h_0}{z}$的幂级数展宽，使用$\frac{h_0}{z'}$的幂级数展宽。容易看到，这个新展宽的领头

项有如下形式：

$$\frac{d\overline{u}}{dz} = \frac{u_*}{\kappa z'}\left[1 + \left(a - \frac{z_1}{h_0}\right)\frac{h_0}{z'} + b_1\left(\frac{h_0}{z'}\right)^2 + ...\right]. \tag{5.35}$$

现在我们选择z_1使得这个展宽的一阶项变为零（即，取$z_1 = ah_0 = g'(0)h_0$）。于是，精确到二阶项我们得到

$$\frac{d\overline{u}}{dz} = \frac{u_*}{\kappa(z - z_1)}, \tag{5.36}$$

其中

$$\overline{u}(z) = \frac{u_*}{\kappa}\ln\frac{z - z_1}{z_0}. \tag{5.37}$$

我们看到，当z不是特别小，有限高度h_0的效应在一阶近似导致速度分布为对数的，这些高度是从给定的$z = z_1$开始测量的，不是从$z = 0$开始测量的。高度z_1可以称为*偏移高度*或*零偏移*（类比边界层理论中位移厚度的概念）。

各种类型自然表面的粗糙度参数z_0和位移高度z_1的数据可以在广泛的文献中找到[见，例如Paeschke (1936)、Deacon (1949)、Sutton (1953)、Ellison (1956)、Priestly (1959a)、Tanner and Pelton (1960)、Lettau (1967)、Zilitinkevich (1970)]。不幸的是，这些数据互相符合得不是非常好（可能因为两个参数z_0和z_1依赖于下方表面相当小的细节）。对于完全粗糙的表面，粗糙度参数z_0是必须的，它根据风的分布确定，通常可以假设为近似正比于地面突起物的高度h_0。然而，对于通常的草地和农作物覆盖，正比系数比系数1/30大得多（根据Nikuradse的数据，对应于均匀沙子粗糙性），通常接近1/10 或甚至1/5。（例如，Tanner和Pelton建议$z_0 \approx h_0/7.5$作为对不同草、庄稼和灌木的平均估计。）有趣的是，Chamberlain (1966, 1968)在风洞中对几种形式的人工粗糙元得到的h_0/z_0的结果非常接近有自然植被的陆地的结果。当然，对于一组不同形式的不规则性，h_0/z_0一定不是严格常数。所以对不同植物种群得到的经验关系具有$z_0 \approx h^{1.2}/11.7$的形式[见Lettau (1967)] 就不足为奇了。对于不太高的植被，偏移高度z_1一般可以取为零。然而，对于高的植被，通常必须取在h_0和$\frac{h_0}{2}$之间。

此外，我们注意到，对于较高的草的覆盖，粗糙度参数也可能依赖于风的平均速度，它使草茎弯曲，从而改变了表面的形式。例如，Deacon (1949)发现，对于高的草（大约60 cm高），z_0可以从极小风时候的9 cm到强风时的4 cm。者对于水波是类似的，此时不规则性的高度和形式显然也依赖于风速。如果，在研究风-波时，忽略水的黏滞和表面张力，大海的粗

糙度完全由局域大气条件定义（即，仅由剪切应力的局域值确定），于是由量纲论证我们得到如下形式的粗糙度系数z_0的方程

$$z_0 = b\frac{u_*^2}{g}. \tag{5.38}$$

这里，g是引力加速度，$u_*^2 = \tau_0/\rho$（其中ρ是空气密度），特别地，常数b依赖于空气和水的密度比。到目前为止，海上的风速分布观测仍然非常不完备和不精确。此外，它们给人的印象是这种关系（5.38）没有在实验上被证明合理。（我们注意到，例如，Charnock (1958b)和Ellison (1956)使用这个方程得到了非常不同的b值。根据Charnock，$b \approx 1/80$，根据Ellison，$b \approx 1/12$。随后，Kitaygorodskiy, Volkov (1965)[也参见kitaygorodskiy (1968)和Zilitinkevich (1970)]得出结论，对于$b \approx 1/30$，方程（5.38）在一个非常宽范围的条件下近似正确。然而，Hidy, Plate (1966)和Wu (1968)仔细的实验室实验表明，$b \approx 1/90$的估计和Phillips (1966)收集的野外观测数据和$b \approx 1/40$的值符合。）在这方面，许多研究者倾向于认为，在海上，z_0不仅依赖于局域气象条件[而是也依赖于，例如，表征海面上风的路径的风场，参见例如Hino (1966)]。同时，已有的所有数据表明海面动力学上比地球上大部分陆地表明光滑得多。甚至对于海上相当强的风，也有$z_0 < 0.1$ cm[根据很多作者的数据，可以认为海面是动力学光滑的，只要风不是非常强，见Sutton (1953)、Deacon (1962)]。所以，在海上的风的研究中，粗糙度参数的使用相对罕见。在此情形我们更经常地使用摩擦系数c_f替代z_0，涉及某个固定高度z的速度$U = \overline{u}(z)$[见，例如Wilson (1960)、Deacon (1962)、Deacon, Webb (1962)、Roll (1965)、Phillips (1966)]。在任何情形，海面粗糙度的问题目前远远没有搞清楚。

5.5 管和渠中的湍流；表面摩擦定律

上面讨论的沿刚性壁的湍流的一般定律涉及一大类流动。特别地，这些流动包括渠中和管中的流动。在前面两小节中，我们已经使用了渠中和管中湍流的一些数据。然而，渠中和管中的流动也具有一些我们已经处理过的半空间$z > 0$中理想化流动中没有的特征。首先，在渠流或管流中，和半空间中的流动不同，存在一个特征长度H_1（渠的半宽度）或R（管的半径）和一个特征速度U_0 （渠中间或管的轴上的最大平均速度）或U_m（平均整体速度），定义为

$$\frac{1}{H_1}\int_0^{H_1} \overline{u}(z)dz$$

或

$$\frac{2}{R^2}\int_0^R \overline{u}(r)rdr.$$

所以，很明显，壁面附近的常应力层中流动的理论没有穷尽渠中和管中流动的整个理论。我们在下面考虑这一点。

我们从一般的相似性考虑开始。为了简单，让我们首先假设壁面是动力学光滑的。我们仅考虑距离渠或管的入口足够距离处的流动，使入口的条件没有影响。此外，我们假设流动是稳态和完全湍动的。在此情形，只有平均速度的纵向分量$\overline{u} = \overline{u}_x$不为零，湍流的所有统计特征依赖于一个坐标$z$，与渠或管壁的距离（对应管，$z = R - r$，其中$r$ 是与轴的距离）。对于给定大小的渠或管和给定密度和黏滞的流体，我们会有一个单参数流动集合，由“压强头”（pressure-head）值——不变的纵向压强梯度定义。压强梯度还将唯一地定义流动特征，例如速度U_0和U_m和壁面上的剪切应力τ_0，或者摩擦速度$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$。所以，与壁面距离$z$处流动的统计特征的值依赖于下面的参数：$\rho$、$\nu$、$z$、$H_1$（对于管，我们现在把半径标记为$H_1$，即我们令$H_1 = R$）和速度$U_0$、$U_m$或$u_*$ 之一。由这些参数我们可以写出两个无量纲组合：雷诺数$\xi = \frac{u_* H_1}{\nu}$（把$u_*$选为特征速度是方便的）和无量纲距离$\eta = \frac{z}{H_1}$。

所以我们有

$$\overline{u}(z) = u_*\varphi\left(\frac{u_* H_1}{\nu}, \frac{z}{H_1}\right) = u_*\varphi(\xi,\eta), \tag{5.39}$$

这个更一般的方程现在替代了壁面定律（5.13）。[8]

一般来说，渠和管中流动的平均速度分布有一个两参数函数（当然，对于渠和管可能是不同的）定义。然而，有两个重要的极限情形，其中函数$\varphi(\xi,\eta)$可以用一个单参数函数表示。

这些情形中的第一个（在5.2-5.4节中详细考虑过）是小z的情形，即$\eta = \frac{z}{H_1} \ll 1$。在此情形，速度$\overline{z}$对长度$H_1$的依赖变得可以忽略，故而方程（5.39）转换为

$$\frac{\overline{u}(z)}{u_*} = f\left(\frac{u_* z}{\nu}\right) = f(\xi\cdot\eta)\text{对于}\eta < \eta_0, \tag{5.40}$$

（其中η_0是某个远小于1的常数）这就是方程（5.13）。第二个极限情形（之前我们还没碰到过）是大$\eta = \frac{z}{H_1}$ 值的情形，对应于流动的“湍动

[8] 当然，方程（5.39）等价于方程$\overline{u}(z) = u_* f(zu_*/\nu)(2H_1 - z)u_*/\nu$，这是在5.2节的一个脚注中作为渠流的一个特殊情形给出的。

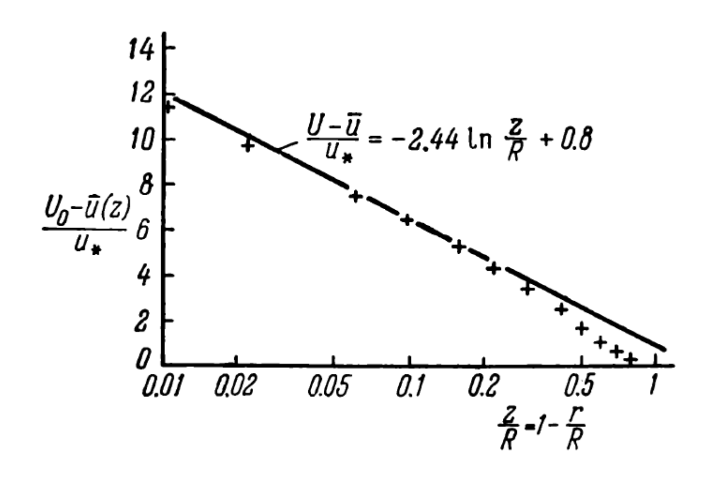


图 30 根据Laufer (1954)的数据验证管中湍流的速度缺定律。

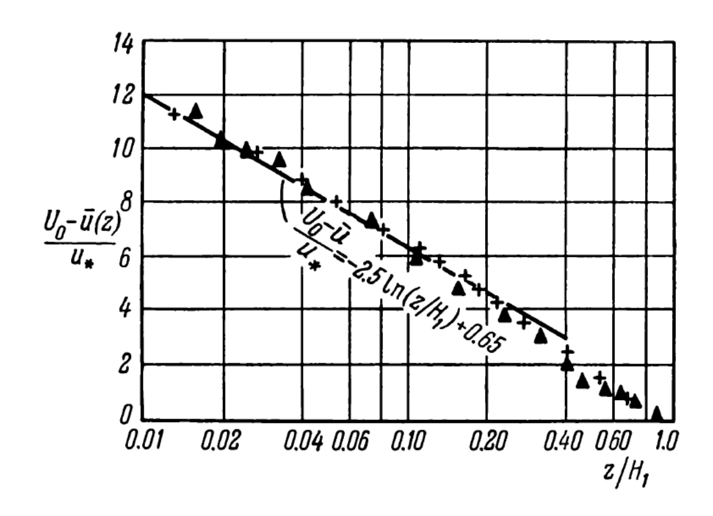


图 31 根据Laufer的数据（△）和（+）验证矩形渠中湍流的速度缺定律。

核”，靠近渠的中心或管的轴。在这个远离壁面的大η值区域，我们可以假设5.3节中说明对数速度分布的论证适用。也就是说，因为这里的湍流剪切应力壁黏滞应力大很多倍，所以有理由认为在“湍动核”中，黏滞对流动没有直接影响（尽管会间接影响，因为“核”的边界上的边界条件依赖于它，以及u_*值，方程（5.17）和（5.17'）确定了整个流动中湍流应力的分布）。在没有特征长度的情况下，我们从这里得到方程（5.21），得到一个对数分布。当我们有一个长度标度H_1，我们得到一个更一般的方程，$\frac{d\bar{u}(z)}{dz}=\frac{u_*}{H_1}\varphi_1\left(\frac{z}{H_1}\right)$。把未知函数$\varphi_1$写为$\varphi_1(\eta)=-f_1'(\eta)$，

其中$f_1(1)=0$，对$\frac{d\overline{u}(z)}{dz}$的表达式从某个$z$值积分到$z=H_1$，我们发现

$$\frac{U_0-\overline{u}(z)}{u_*}=f_1\left(\frac{z}{H_1}\right)=f_1(\eta)\text{对于}\eta_1\leq\eta\leq 1. \qquad (5.41)$$

方程（5.41）通常被称为*速度缺定律*（the velocity defect law），其适用区域有时称为*缺层*。定律（5.41）首先由von Kármán (1930)对管流写出，基于Fritsch (1928)的实验数据。后来，这个定律的正确性被仔细验证过很多次，所有结果都是肯定的（见图30和图31）。现在这个定律通常被认为是*雷诺数相似性*一般原理的一个特殊情况，对于一大类湍流流动，其精度相当高。根据这个原理，对于足够大的雷诺数（$\nu\ll K\sim UL$，其中U和L是特征速度和特征长度）对于相对大的湍流区域（通常包含几乎整个流动，除了壁面附近相对薄的层），平均运动不直接依赖于黏滞系数（即，不直接依赖于雷诺数，它仅通过边界条件和U值影响流动[见Townsend (1956)]）。这里我们也必须注意到，雷诺数相似性不仅发生在平均速度上，而且也发生在流动的所有不直接与动能的黏滞耗散相关的统计特征上，即，它对$\overline{u'^2}$或$\overline{u'w'}$成立，但对$\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2}$不成立。我们将在本小节末回到这个重要的论断。

现在我们会回到平均速度分布并考虑Izakson (1937)重要的论证[随后在millikan (1938)和von Mises (1941)的工作中得到发展]，这允许我们在某些情形确立函数f和f_1的精确形式。让我们假设$\eta_1<\eta_0$，故而存在$\eta=\frac{z}{H_1}$值的某些“重叠区间”$\eta_1<\eta<\eta_0$，对于这个区间，一般方程（5.29）可以同时写为（5.40）的形式和（5.41）的形式[当然，这个假设无法理论证明，必须通过实验数据验证]。在此情形，将方程（5.40）和（5.41）相加，我们得到

$$f(\xi\eta)+f_1(\eta)=f_2(\xi)\text{对于}\eta_1<\eta<\eta_0, \qquad (5.42)$$

其中$f_2(\xi)$表示$\frac{U_0}{u_*}$值，它显然只能依赖于雷诺数$\xi=\frac{u_*H_1}{\nu}$，而不依赖于$\eta=\frac{z}{H_1}$。从函数方程（5.42）容易得到，所有三个函数f、f_1和f_2是对数函数。实际上，首先将方程（5.42）对ξ求导，然后对η求导，我们得到

$$f'(\xi\eta)+\xi\eta f''(\xi\eta)=0,$$

所以$f(\xi\eta)=A\ln\xi\eta+B$，其中A和B是积分常数。所以我们再次得到方程（5.25），这次是从不同的假设出发。把这个$f(\xi\eta)$的表达式带入方程（5.42），我们证实了

$$f_1(\eta)=-A\ln\eta+B_1, f_2(\xi)=A\ln\xi+B_2, B_2-B_1=B.$$

所以重叠区$\eta_1 < \eta < \eta$的速度缺定律一定具有这种形式

$$\frac{U_0 - \overline{u}(z)}{u_*} = -\frac{1}{\kappa} \ln \frac{z}{H_1} + B_1. \tag{5.43}$$

此外，如果我们假设方程（5.43）可以应用到$z = H_1$值（即$\eta = 1$），那么显然$B_1 = 0$（这个等式不是自动从之前的论证得到的，因为它们仅适用于$\eta_1 < \eta < \eta_0$区）。最终，f_2的对数方程给出如下的比例$\frac{U_0}{u_*}$对雷诺数的依赖：

$$\frac{U_0}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_* H_1}{\nu} + B_2. \tag{5.44}$$

引入摩擦系数（或摩擦因子）

$$c_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U_0^2} = 2\left(\frac{u_*}{U_0}\right)^2,$$

替代$\frac{U_0}{u_*}$，我们可以把上一个方程写为这种形式

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = \frac{1}{\kappa\sqrt{2}} \ln(\mathrm{Re}\sqrt{c_f}) + B_3, \mathrm{Re} = \frac{U_0 H_1}{\nu}, B_3 = \frac{B_2}{\sqrt{2}} - \frac{\ln 2}{2\kappa\sqrt{2}}. \tag{5.45}$$

（随后，我们将看到这个对数方程的简单推导，而摩擦定律可以用于一些问题，见5.7节和6.6节末。）

到目前位置，我们总是假设渠或管的壁面是光滑的。然而，容易看到，整个论证容易迁移到具有粗糙壁的渠或管的情形。在此情形，方程（5.39）中的$\varphi(\xi, \eta)$和方程（5.40）中的$f(\xi\eta)$也可能依赖于额外的宗量$h_0 u_*/\nu$（或h_0/H_1）,$\alpha, \beta, ...$，它们定义了壁面上不规则性的大小、形式和相对位置。然而，可以自然地认为，在流动的“核”中，只会通过边界条件核湍流剪切应力（依赖于壁面上的摩擦）间接感受到粗糙性的存在。如果是这样，那么同样的方程（5.41）对光滑核粗糙壁面都成立。然而，假设满足方程（5.40）和（5.41）的区域部分重叠，我们再次得到函数方程（5.42），唯一的区别是现在f和f可能也依赖于额外的表征粗糙性的参数。所以，和之前一样得到，对于重叠区域$\eta_1 < \eta < \eta_0$，所有三个函数f, f_1和f_2都一定是具有相同系数$A = 1/\kappa$的对数函数。于是，这个系数一定是一个普适常数（正如系数B）。对于B和B_2，它们可能包含一些共同的依赖于粗糙性大小和性质的求和项。如果我们假设方程（5.43）直到$z = H_1$都适用，那么$B_1 = 0$，$B_2 = B$。所以基于这个假设，摩擦因子c_f的数据使得可以马上确定B值（或和B简单相关的方程（5.28）中的B'）。图28中用黑点表示的不同$\frac{h_0 u_*}{\nu}$的B'值是用完全相同的方法得到

的。

在动力学完全粗糙壁面的特殊情形，函数

$$f\left(\xi\eta, \frac{u_* h_0}{\nu}, \alpha, \beta, ...\right)$$

一定不依赖于黏滞ν，即它一定只是$\xi\eta \cdot \frac{\nu}{u_* h_0} = \frac{z}{h_0}, \alpha, \beta, ...$的函数。所以，函数$f_2\left(\xi, \frac{u_* h_0}{\nu}, \alpha, \beta, ...\right)$也仅依赖于$\xi \cdot \frac{\nu}{u_* h_0} = \frac{H_1}{h_0}, \alpha, \beta, ...$。于是，在此情形，方程（5.44）和（5.45）具有这种形式

$$\frac{U_0}{u_*} = \frac{1}{\kappa}\ln\frac{H_1}{h_0} + B_2, \qquad (5.44')$$
$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = \frac{1}{\kappa\sqrt{2}}\ln\frac{H_1}{h_0} + \frac{B_2}{\sqrt{2}}, \qquad (5.45')$$

其中系数B_2可能依赖于壁面上不规则性的形式和相对位置。

图25中收集了相当多的数据，证实了方程（5.40）[和方程（5.13）相同]对管和渠中的湍流的正确性。当然，如果有可能把距离$z_+ = \frac{u_* z}{\nu}$转换为变量$\eta = \frac{z}{H_1}$，我们必须知道$\xi = \frac{u_* H_1}{\nu}$，它是雷诺数$\mathrm{Re} = \frac{U_0 H_1}{\nu}$的复杂函数，由方程（5.45）隐含给出。作为指导，下表显示了光滑管中流动对数层的下边界$\delta_l = 30\frac{\nu}{u_*}$对最广泛使用的雷诺数$\mathrm{Re}_D = \frac{U_m D}{\nu}$的依赖。（我们稍后讨论最大速度$U_0$ 和整体速度U_m之间的关系。）随着雷诺数增大，比例δ_l/H_1自然减小，但不是无限减小。对于每根真实的管道，当雷诺数增大，会有一个时刻它看起来是完全粗糙的。然后对数层的下边界开始仅依赖于h_0而不随流动平均速度的进一步增大而变化。

Re_D	5×10^3	10^4	10^5	10^6
$\frac{\delta_l}{H_1} = 2\frac{\delta_l}{D}$	0.2	0.1	0.012	0.0016

对于适用对数方程（5.25）的z值的上边界，已经指出，根据Nikuradse的数据，这个值对于光滑和粗糙的管，在一个很宽范围的雷诺数都非常接近$z = R$。（所以对数层可以没有太多误差地扩展到管的中心。）然而，为了使对数方程适用于整个管流，Nikuradse必须改变系数A和B，以使其与流动靠近管壁的部分有最好的符合。所以，很明显，不能认为Nikuradse提出的整个流动的对数方程和在$\delta_l/H_1 < \eta < \eta_0$成立的理论方程（5.25）符合。实际上，理论方程（5.25）中的系数A和B必须根据仅与壁面附近湍流部分有关的大量数据来确定。仅使用这些系数，就可以尝试阐明与对数层有关的速度分布方程是否会在管的中心部分失效。Millikan (1938)是第一个这样做的人。他使用了当时所知的几乎所有

管中和渠中流动的有限数据。特别值得注意的是，对于方程（5.25）中的A和B值，Millikan得到$A = 2.5, B = 5.0$，和现在认为最可靠的值相差非常小（见上面的5.3节）。此外，根据他的估计，圆管中平均速度分布与方程（5.25）给出的值的偏差直到差不多$\eta = 0.1$（即直到τ变化10%）都完全观测不到，而对于所有η，它们不超过相应$\overline{u}(z)$值的10%。尽管目前圆管中速度分布数据的质量自1938年以来已经显著增加[见，例如Hinze (1962)的综述文章]，Millikan的推导现在仍然是完全正确的。

从Nikuradse的结果也很明显，如果把对数形式（5.43）的速度缺定律中的$A = 1/\kappa$和B_1看作经验常数，那么我们可以假设这个方程直到$z = H_1$都适用，即它可能对于$B_1 = 0$都和实验数据符合得很好。然而，理论上，A不能看作任意常数，而必须在对壁面附近流动测量的基础上确定。为了符合得最好，这里我们必须取$B \neq 0$[见，例如，从Hinze (1959)借来，在Laufer (1954) 测量的基础上画的图30。这里根据Clauser (1956)的建议选取$A = 2.44$，即$\kappa \approx 0.41$]。对于矩形渠中的流动得到了类似的结果（见图31，借自Schubauer, Tchen (1959)，其中A取为2.5）。在两个情形，与对数方程（5.43）的偏离开始于大约$\eta = 0.25$。

大量工作中考虑了为$f_1(\eta)$选取一个（在很大的η值范围和数据符合得很好的）解析方程的问题[见，例如，Gosse (1961)]。然而，在实际问题中通常有可能简单认为管中的平均速度分布直到轴都由对数方程描述。这样的轮廓非常不同于层流泊肃叶流的抛物线轮廓。实际上由于湍流强得多的径向混合，速度分布在每个地方（除了壁面上的薄层）都比层流中均匀得多（见图32）。进一步，我们注意到，对于$\eta > 2.5$，$\ln \eta$仅略微不同于$2.03\eta^{3/2}$。所以一点也不奇怪Darcy (1858)对管轴附近湍流速度的首次仔细测量中得到了一个经验公式，用我们的符号写具有这种形式

$$\frac{U_0 - \overline{u}(z)}{u_*} = 5.08 \left(1 - \frac{z}{H_1}\right)^{3/2}. \tag{5.46}$$

取管轴上的速度分布为对数分布，忽略壁面上厚度为$\delta_l = 30\nu/u_*$的薄层（其中对数方程不适用），我们也可以写出管轴上最大速度U_0和平均整体速度U_m之间的简单关系。$B_1 = 0$的方程（5.43）乘以$2\pi(H_1 - z)$，从$z = 0$到$z = H_1$积分，结果除以πH_1^2，我们得到

$$\frac{U_0 - U_m}{u_*} = -\frac{2}{\kappa}\int_0^1 (1-\eta)\ln \eta d\eta = 常数 \approx 3.75.$$

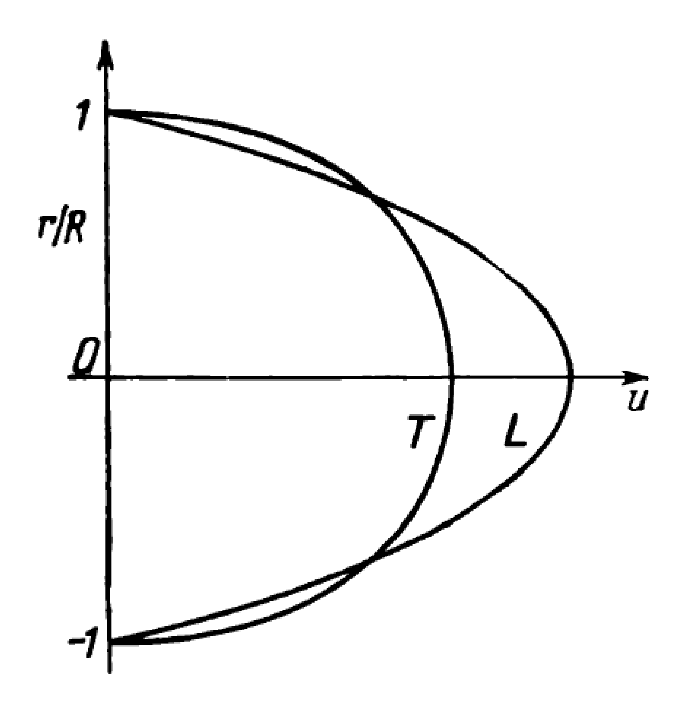


图 32 管中层流（L）和湍流（T）平均速度分布的比较。

根据方程（5.44），对于光滑的管道

$$\frac{U_m}{u_*} = \frac{1}{\kappa}\ln\frac{u_* H_1}{\nu} + B_2', B_2' = B_2 - 3.75. \tag{5.47}$$

这个方程也很好地被实验证实了。

方程（5.47）使得我们可以写出表面摩擦定律，即新的无量纲摩擦系数$\lambda = \frac{\tau_0}{\frac{1}{8}\rho U_m^2} = 8\left(\frac{u_*}{U_m}\right)^2$（它和方程（5.45）中的系数$c_f$的差别不仅是不重要的数值系数，而主要是用更容易测量的整体速度U_m替代了最大速度U_0）对雷诺数$\mathrm{Re}_D = \frac{U_m D}{\nu}$ 的依赖关系。如果在方程（5.47）中，我们把$\frac{u_* H_1}{\nu}$写为乘积形式$\frac{U_m D}{\nu}\cdot\frac{u_*}{2U_m}$，我们得到

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\kappa\sqrt{8}}\ln(\mathrm{Re}_D\sqrt{\lambda}) + B_3, \quad B_3 = \frac{B_2 - 3.75 - \frac{1}{\kappa}\ln 4\sqrt{2}}{\sqrt{8}}. \tag{5.48}$$

这里λ容易从已知的沿长度l管子一个截面的压降$\Delta_l p = \frac{4l\tau_0}{D}$和流出量$Q = \frac{\pi D^2}{4}U_m$ 确定。所以λ对Re_D依赖的数据相当多。Nikuradse (1932)证明了所有这些数据和具有如下系数值的方程（5.48）符合得非常好：$\frac{1}{\kappa\sqrt{8}} = 0.87$（对应于$\kappa \approx 0.41$），$B_3 = -0.8$[见图33，和曲线（5.48）一起，$\lambda =$

$\frac{64}{\mathrm{Re}_D}$的线也根据管中层流的表面摩擦定律方程（1.26）画出]。根据方程（5.48），λ随Re_D的增大而无限减小。当然，实际上不是这样的，因为随着Re_D增大，每根管最终都是完全粗糙的。这一旦发生，摩擦系数λ就不依赖于雷诺数，而可以以很高的精度定义为

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\kappa\sqrt{8}} \ln \frac{H_1}{h_0} + B_3', \qquad (5.48')$$

这是从$B' =$ 常数的方程（5.28）得到的，适用于$0 < z < H_1$的所有z。λ的行为清楚地用图34中的数据展示。

如果不需要很高的精度，我们可以假设对于宽度$2H_1$的平面渠中的湍流，对数形式的速度缺定律（5.43）到$z = H_1$（对应于渠的中心，在此情形，B_1必须等于零）都成立。同样的方程也经常用于深度为H_1的开放平面渠（或渡槽）中流动的情形（上边界是流体的自由表面）。在这种类型的渠中，最大速度U_0显然在上表面达到，在这里也有$B_1 = 0$。此外，在开放渠的情形，有时适用下面von Kármán(1930)的方程代替方程（5.43）：

$$\frac{U_0 - \overline{u}(z)}{u_*} = -\frac{1}{\kappa}\left\{\left(1 - \frac{z}{H_1}\right)^{1/2} + \ln\left[1 - \left(1 - \frac{z}{H_1}\right)^{1/2}\right]\right\}. \qquad (5.49)$$

使用更一般的方程

$$\frac{U_0 - \overline{u}(z)}{u_*} = -\frac{1}{\kappa}\left\{\left(1 - \frac{z}{H_1}\right)^{1/2} + C\ln\left[\frac{C - \left(1 - \frac{z}{H_1}\right)^{1/2}}{C}\right]\right\}, \qquad (5.49')$$

可以得到与实验数据更为吻合的结果，其中C_0是一个新的数值系数，根据Hunt (1964)的数据，比1大。最后，Ellison (1960)基于某些理论考虑，提出对于开放渠，使用这种形式的方程

$$\frac{U_0 - \overline{u}(z)}{u_*} = -\frac{1}{\kappa}\left\{\ln\frac{1 + \left(1 + \frac{z}{H_1}\right)^{1/2}}{1 + \left(1 - \frac{z}{H_1}\right)^{1/2}} - \frac{1}{b}\ln\frac{b + \left(1 - \frac{z}{H_1}\right)^{1/2}}{b - \left(1 - \frac{z}{H_1}\right)^{1/2}}\right\} \qquad (5.49'')$$

代替方程（5.49）或（5.49’）。Ellison方程右边对于某些b值非常接近[$B_1 = 0$的]方程（5.43）的右边和方程（5.49）或（5.49’）的右边。根据Ellison对b的间接估计（将在第5章更详细地讨论），$b \approx 1.4$，和开放渠中平均速度分布的已有数据不矛盾。

让我们简单考虑雷诺数相似性在管流和渠流速度涨落矩量中的应用。

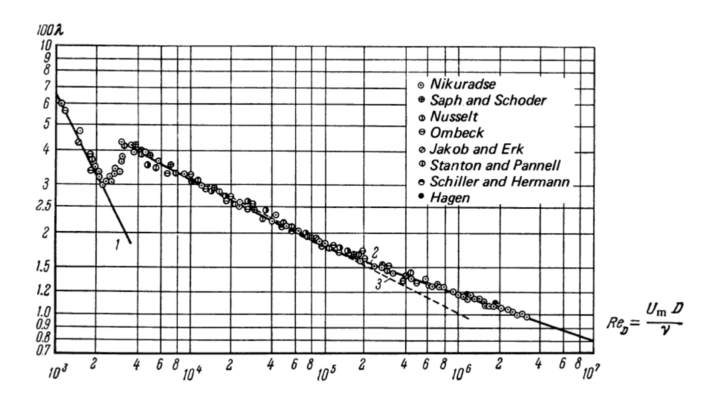


图 33 表面摩擦系数λ对雷诺数Re_D的依赖，根据不同作者的数据。曲线1给出层流哈根-泊肃叶流的摩擦定律$\lambda = 64/\mathrm{Re}_D$；曲线2给出$\kappa = 0.41, B_3 = -0.8$的定律（5.48）；点线3给出Blasius近似定律(5.52)。

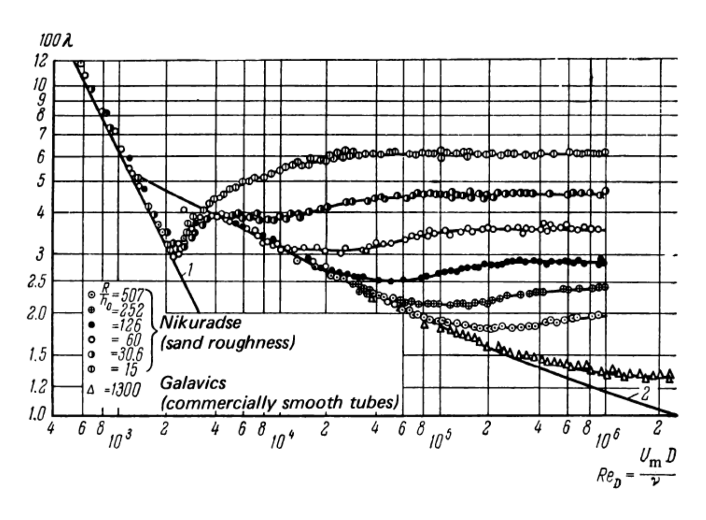


图 34 对于各种粗糙度的管，表面摩擦系数λ作为雷诺数Re_D的函数。

举个例子，根据这个相似性，所有非零二阶矩（即四个量$\overline{u'^2}, \overline{v'^2}, \overline{w'^2}$和$\overline{u'w'}$）在几乎整个流动中（除了壁面层，对于足够大的Re，它非常薄）一定由$u_*^2\psi_i(\eta)$ 形式的公式代表，其中$\eta = z/H_1$，$\psi_i, i = 1,2,3,4$是普适函数（特别是对每个矩量）。关于四个普适函数ψ_i有大量数据，例如，在Townsend (1956)、Hinze (1959)、Comte-Bellot (1965)、Coantic (1967a)和其他文献中。特别地，根据雷诺数相似性，管轴上的比例$\overline{u'^2}/u_*^2$对于所有足够大的Re一定是个常数。这个论断的正确性现在被很多数据证实[根据Coantic (1967a)，这个常数值是0.788 ± 0.002]。所以方程（5.44）表明，管轴上湍流的相对强度（可以定量地用$(\overline{u'^2})^{1/2}/U_0$值表征）一定随着Re增大而连续减小。这个事实也从实验数据可知（参考引用的Coantic的文

章）。

雷诺数相似性一定也适用于速度涨落的高阶矩。然而，目前，这些矩量的实验数据非常稀少。然而，Comte-Bellot (1965)发现，对于平面渠中几乎所有流动区域，所有三个速度分量的无量纲偏斜度和平坦度因子可以用$\eta = z/H_1$的普适函数代表（和雷诺数相似性原理完全符合）。

对于有限范围的雷诺数，一般方程（5.48）可以近似替换为简单得多的幂律表面摩擦定律

$$\lambda = c(\mathrm{Re}_D)^{-m}. \tag{5.50}$$

特别地，这些幂律定律是将速度分布$\overline{u}(z)$近似为一个幂律方程

$$\frac{\overline{u}(z)}{u_*} = C\left(\frac{zu_*}{\nu}\right)^n \tag{5.51}$$

得到的（过去已经完成了）。容易看到，方程（5.51）可以得出方程

$$\frac{U_m}{U_0} = \frac{2}{(n+1)(n+2)},\quad \frac{U_0}{u_*} = C^{\frac{1}{n+1}}\left(\frac{H_1U_0}{\nu}\right)^{\frac{n}{n+1}},\quad m = \frac{2n}{n+1}. \tag{5.51$'$}$$

已知最好的幂律摩擦定律是Blasius (1913)的经验定律

$$\lambda = 0.3164(\mathrm{Re}_D)^{-1/4}, \tag{5.52}$$

这是基于不超过5×10^4雷诺数Re_D的数据得出的（见图33）。根据方程（5.51'），布拉休斯的定律对应于速度分布的“七分之一定律”，$\overline{u}(z)\sim z^{1/7}$。这个“七分之一定律”（在$\mathrm{Re}\approx10^5$和实验符合得很好）已经在20世纪20年代以来的很多研究中广泛使用。[9] 然而，没有一个幂律是普适的（即适合所有雷诺数）。对于较大的雷诺数，必须使用较小的n值。

当然，除了幂律方程，我们也可以选择$\lambda(\mathrm{Re})$的其他方程，在很大的Re范围近似了隐式关系（5.48）。特别地，Nikuradse提出使用近似方程$\lambda = 0.032 + \frac{0.221}{\mathrm{Re}_D^{0.237}}$。其他研究者提出了很多其他这种类型的方程（见，例如Kolmogorov (1952)的批判性文章，给出了几个这种方程）。

最后，我们必须强调，方程（5.48）和（5.48'）也不是严格的，因为它们基于这个假设，速度分布的对数方程直到管的轴都适用。借助考虑了剪切应力的速度分布精确规律可以得到更精确的方程。Townsend (1961)和A. J. Reynolds (1965)基于一般方程（5.39），补充一些看起来自然但更具体的假设，发展了修正近似对数形式速度分布的一种方法。结果，他们得到了一个这种形式的方程

$$\frac{d\overline{u}}{dz} = \frac{u_*}{\kappa z}\left(1 - B\frac{z}{\tau}\left|\frac{d\tau}{dz}\right|\right). \tag{5.21$'$}$$

这里$u_* = (\tau_0/\rho)^{1/2}$是通常的摩擦速度，$\kappa = 1/A$是冯·卡门常数，$B$是一个新的无量纲常量，根据方程（5.17）和（5.17'），管和平面渠的$d\tau/dz$等于τ_0/H_1。方程（5.21'）是通常方程（5.21）[仅在常应力层中成立]的改进形式，不同在于右边的第二个改正项。它给出了壁面外紧邻区域（即分子黏滞不起很大作用的区域）中速度分布的一个特殊形式，在

[9] 更近期的时候，Burton (1965)提出了下面对“七分之一律”的简单推广：$z_+ = \overline{u}_+ + (\overline{u}_+/8.74)^7$。这个推广的定律在整个壁面定律层中有令人满意的精度，可以用于改进的布拉休斯摩擦方程（5.52）。

满足条件$z\left|\frac{d\tau}{dz}\right| \ll \tau_0$的常应力薄层中变为通常的对数分布[见Townsend (1961)]。根据A. J. Reynolds收集和处理的实验数据，对于圆管，$B \approx 1.1$，对于二维渠，$B \approx 1.7$。所以作为合理的一级近似，$B = 1.5$可以同时用于两种类型的流动。（雷诺对于零压强梯度的边界层流动得到了几乎相同的值$B \approx 1.47$。）

Kleinstein (1967)发展了一个相关的（但更复杂的）理论。他证明了剪切应力变化可以非常容易地包含在导出普适壁面定律的Spalding方程$\overline{u}_+ = f(z_+)$的半经验论证中[我们已经提到Kleinstein也独立于Spalding推导了这个方程]。然而，从所有包含了剪切应力变化效应得到的改进的速度分布推导出的对数速度分布目前仍然处于已有数据的弥散中。

5.6 平板上方的湍流边界层

现在我们考虑一块长平板上入流速度为常量U的湍流边界层（即零压强梯度）。这个边界层中的平均流动是稳态的几乎平面平行的。在很多方面，它接近于半径等于边界层厚度δ（轴上的速度等于这一层之外的速度U）的管中的流动。然而，管中的流动和边界层中的流动之间的相似性至少有两个原因会失效。首先，边界层的外边界上的物理条件非常不同于管中心的条件。在边界层外（即$z > \delta$）通常没有湍流，而管中的流动到处都是湍流。其次，边界层流动的特征不仅依赖于垂直于平板的坐标z，而且也依赖于（即使相对而言较弱）沿平板的纵向坐标x。从理论上来说，这导致边界层中的流动壁渠或管中的流动复杂得多。

管中和渠中边界层中流动之间的不同不影响平板邻域中的流体薄层（其中普适的“壁面定律”（5.13）适用）。从图25可以清楚地看到，所有点位于同一条曲线上，这个定律对于管、渠和边界层是相同的。当然，边界层中的u_*值[可以在方程（5.13）中找到]随x 变化。然而，这个变化相当慢（加下面本小节末），所以在任意截面$x =$ 常数，这个流动有时间根据局域条件调整，对于给定的x 只依赖于u_*。规律（5.13）适用的流体层相对厚度也随x增大：对于不超过10^6的小$\mathrm{Re}_x = \frac{Ux}{\nu}$，方程（5.13）可以近似用于到几乎湍流边界层边界的所有z；对于$10^7 - 10^8$的$\mathrm{Re}_x = \frac{Ux}{\nu}$，黏滞亚层和对数层的总厚度不会超出厚度$\delta$的10-20%。当然，上面这个事实将边界层流动与管流和渠流（对于所有$\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\mathrm{cr}}$，对数方程可以应用直到管的轴或渠的中心而没有大的误差）区分开。

边界外部的平均速度分布自然地用速度缺$U - \overline{u}(z)$对z的依赖关系表征。如果我们假设（这已经被实验很好地证实）对于未扰动边界层，每个截面$x =$ 常数的速度分布只依赖于这个截面的局域条件，那么差$U - \overline{u}(z)$一定由U, δ，流体参数ν和（在粗糙平板的情形）给定x的粗糙度参数确定。根据雷诺数相似性的一般原理，我们一定会预期在流动的外部，足够远离壁面的地方，黏滞系数ν和粗糙度参数只会影响壁面上剪切应力的平均值τ_0或

摩擦速度$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$或局域摩擦系数$c_f = 2\left(\frac{u_*}{U}\right)^2$。所以我们得到了如下边界层速度缺定律的一般形式：

$$\frac{U - \overline{u}(z)}{u_*} = f_1\left(\frac{z}{\delta}, \frac{u_*}{U}\right) \tag{5.53}$$

[见Rotta (1962a,b)]。为了验证这个定律，方便的是画出$\frac{U-\overline{u}(z)}{u_*}$作为$\frac{z}{\delta}$函数的图，试图用对比值$\frac{u_*}{U}$的依赖来解释实验点的弥散特征。然而，可以发现这种弥散完全被实验点的普通弥散所掩盖。所以，在测量误差极限内，所有$\frac{U-\overline{u}(z)}{u_*}$值都以足够的精度位于一条曲线上[见，例如图35，借自Clauser的综述文章（1956）]。所以比例$\frac{U-u(z)}{u_*}$对$\frac{u_*}{U}$的依赖（它随Re_x的变化缓慢变化）即使有，也非常弱。[10]于是，在实践中，平板上边界层的速度缺定律可以写为

$$\frac{U - \overline{u}(z)}{u_*} = f_1\left(\frac{z}{\delta}\right), \tag{5.54}$$

完全类似于上面管流和渠流中使用的定律。

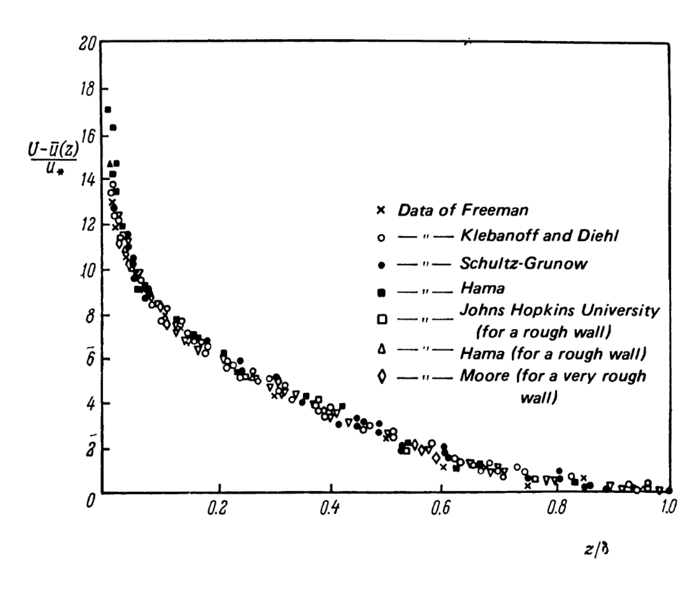


图 35 根据不同作者的数据验证湍流边界层中的“速度缺定律”。

和管和渠的速度缺定律（5.41）比较，方程（5.54）只有一个缺陷：在方程（5.41）中，我们已经精确定义了长度H_1，在方程（5.54）中我们有边界层厚度δ，没有精确定义，只是非常近似地从实验数据确定的。同

[10]Crocco (1965)试图在实验数据中揭示这种依赖关系，并用一种特殊的半经验理论来揭示它，这种理论基于修正形式的Coles“尾流定律”（后面会讨论这个定律）。然而，他的尝试不完全成功，不在本书中讨论（但是可以参见本小节中关于Coles“尾流定律”的脚注）。

时，δ和更精确定义的这类厚度（例如和层流情形不同的湍流边界层中的位移厚度δ^*）的比例是可变的（依赖于u_*/U）。特别地，如果方程（5.54）成立，那么从位移厚度δ^*的定义（1.53）得到

$$\delta^* = C\frac{u_*}{U}\delta, C = \int_0^1 f_1(\eta)d\eta = \text{常量}. \tag{5.55}$$

（这里我们忽略了方程（5.54）不适用的黏滞应力不可忽略流体层的厚度。）考虑这个关系，Rotta (1951a)提出在方程（5.54）使用无量纲宗量$\eta_1 = \frac{z}{\delta^*}\frac{u_*}{U}$（不含有$\delta$）代替$\eta = z/\delta$。根据方程（1.53），这个宗量对于归一化条件$\int_0^\infty \frac{U-\overline{u}}{u_*}d\eta_1 = 1$也是方便的。我们现在假设$\frac{U-\overline{u}}{u_*} = \phi_1(\eta_1)$，其中对于$\eta_1 = c$，$\varphi_1(\eta_1) = 0$。那么显然，$\delta = c\frac{U}{u_*}\delta^*$，$\varphi_1(\eta_1) = f_1\left(\frac{\eta_1}{c}\right)$。于是，在处理观测时完全可以把$\delta$替换为$\delta^*\frac{U}{u_*}$，并且如果$\frac{U-\overline{u}}{u_*}$是$\eta_1 = \frac{z}{\delta^*}\frac{u_*}{U}$的一个单值函数，这意味着方程（5.54）也是满足的。

当然，方程（5.54）不能直到$z = 0$都满足。这是因为它不含有黏滞，没有考虑边界条件$\overline{u}(0) = 0$。在壁面附近，普适规律（5.13）适用，并且如我们已经看到的，在两个规律同时适用的重叠区域，函数f和f_1一定是对数的。所以就不奇怪，在把图35的数据转移到一幅横坐标用对数标度的新图后，从$\eta = 0.01$到近似$\eta = 0.15$函数$f_1(\eta)$是一条直线$-A\ln\eta + B_1$（见图36，其中只考虑了图35中的一部分点）。[11]我们注意到在这里，系数$A = 1/\kappa$ 的值和图31 平面渠的值完全相同，如对数定律（5.25）普适性所要求的。然而，对于渠和边界层，B_1 不同。此外，比较图36和图31 明显看到，对于$\eta > 0.15$，边界层的$f_1(\eta)$ 对直线$A\ln\eta + B_1$ 的发射远比平面渠相应的函数剧烈。根据Hama (1954)，边界层在$\eta > 0.15$区域的$f_1(\eta)$值很好地由经验公式$f_1(\eta) = 9.6(1-\eta)^2$ 描述。然而，对于平面渠中的流动，$\eta > 0.15$ 的$f_1(\eta)$可以合理地用方程$f_1(\eta) = A'\ln\eta + B_1'$描述，其中$A'$和$B'$仅略微不同于$A$和$B_1$。

湍流边界层中靠近外边缘的速度分布以及管和渠中靠近轴的速度分布之间的巨大差异可以由边界层靠外部分和管或渠中心部分中湍流本身性质的差异解释。在这方面，我们看到，与没有明确定义的外边缘的层流边界层不同，湍流边界层通常具有一个确定的边缘，在此之外没有湍流（即，流动实际上是无旋的）。这个边缘（或界面）轮廓不规则，随时间无序变化。这在通过阴影图方法（，该方法使得流动的扰动区域可见，参见，例如图37）得到的湍流边界层的照片中清晰可见。对应于这张照片的

[11]光滑和粗糙平板上边界层的函数$\phi_1(\eta_1)$的类似图像可以在这里找到：例如Rotta (1962a,b)和Furuya, Fujita (1967)。

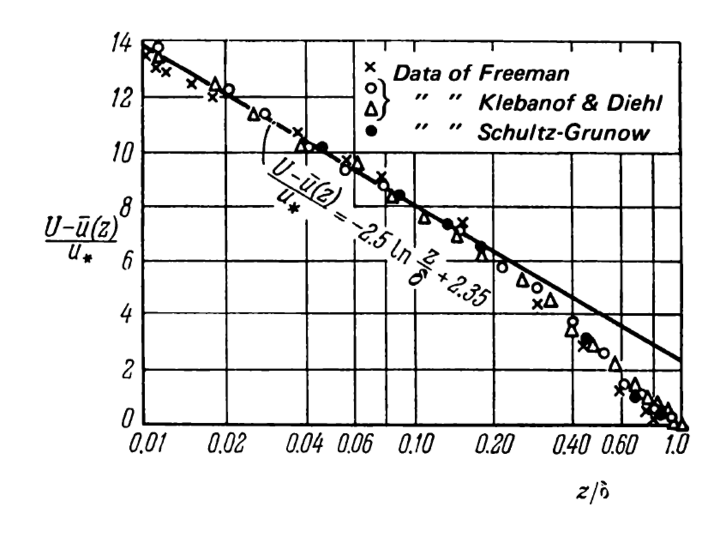


图 36 边界层的对数形式的速度缺定律。

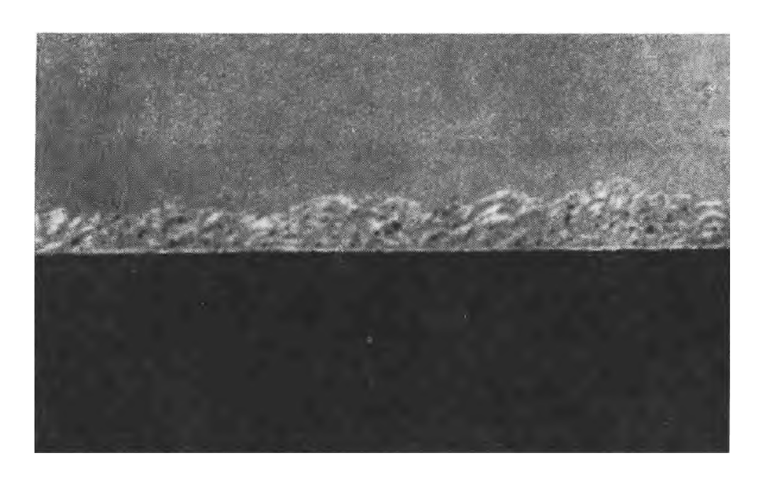


图 37 圆柱上湍流边界层的阴影图[取自Rotta (1962a,b)]。流动方向是从左到右。

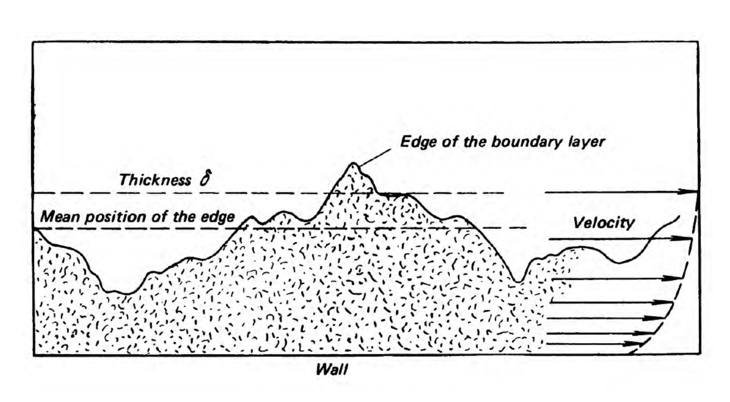


图 38 平板上湍流边界层的总图。

湍流边界层的总图在图38中给出。根据Klebanoff (1955)、Corrsin, Kistler (1955)、Fiedler, Head (1966)和其他人的实验数据，湍流边界层上边缘在大约$0.3\delta-0.4\delta$和1.2δ之间起伏（其中δ是平均速度等于$0.99U$处与壁面的距离），几乎符合正态分布，平均值为$0.78\delta-0.8\delta$。在与壁面的距离z可以观测到湍流的时间的比例$\gamma(z)$随z的增大而减小，在$z=\delta$ 处仅为0.06。因此，很清楚为什么充分发展的湍流的对数分布特征可以以合理的精度应用于管和渠中直到中心。然而，在大Re的边界层中，仅在靠近壁面的薄流体层以相当的精度得到满足。在这个流动区域外，湍流的存在与不存在快速地交替。所以在足够长的时间段平均得到的平均速度实际上是对应层流和湍流的速度值的平均。（假设对数壁面定律适用于边界层靠外部分，但仅适用于存在湍流且无旋速度是自由流动的速度时，B. G. J. Thompson (1963, 1965)能够得到一个标准速度分布的两参数族，与实测的边界层速度分布很好地吻合[也参见Dvorak, Head (1967)]。）

因为层流中相邻流体层之间的动量交换比湍流小很多（所以，速度梯度更陡），很明显在湍流边界层靠外部分中平均速度随与壁面距离的增大一定比对数定律增长得更快。这被图36的数据所证实。同样，对于沿平板的高强度湍流产生的边界层，外边界条件和管中间的条件的差异一定小得多。实际上，Wieghardt (1944)和其他人（他们让流动首先经过一个网格产生高的湍流强度）的实验表明，方程（5.54）中$f_1(\eta)$ 的形式依赖于入流的湍流强度，当这个强度增大，它近似为管和渠中流动的特征。

Coles (1956)进行了一个有趣的尝试，将壁面的普适定律（5.13）和速度缺定律（5.54）结合起来。基于方程（5.13），边界层每个截面$x=$常量中的平均速度可以写为

$$\overline{u}(z)=u_*\left[f\left(\frac{zu_*}{\nu}\right)+h(z)\right], \tag{5.56}$$

其中$f(z_+)$时图25所代表的函数（在$z_+>30$转换为$A\ln z_+ + B$），$h(z)$是对壁面普适定律（5.13）的一个修正，它在平板附近（即，对于$z<0.1\delta$）变为零。然而，在此情形，对于$z>30\frac{\nu}{u_*}$，$\frac{U-\overline{u}}{u_*}=A\ln\frac{\delta}{z}+h(\delta)-h(z)$，所以要满足普适速度缺定律，$h(z)$必须只依赖于$\frac{z}{\delta}$。在此基础上，Coles提出

$$\frac{\overline{u}(z)}{u_*}=f\left(\frac{zu_*}{\nu}\right)+\frac{\Pi}{\kappa}w\left(\frac{z}{\delta}\right), \tag{5.57}$$

其中$\kappa=\frac{1}{A}\approx 0.4$是冯·卡门常数，$\Pi$是一个新的常量，$w(\eta)$是归一化条件为$w(1)=2$的单变量函数。然而，某些不确定性仍然与厚度$\delta$不是唯一定义

的这个事实有关。使用这个事实，Coles在$w(\eta)$中加入了额外的归一化条件

$$\int_0^1 w(\eta)d\eta = 1,$$

容易看到，这等价于条件$\delta^* \frac{U}{u_*} = \frac{1+\Pi}{\kappa}\delta$。于是，他根据这个条件给出了方程（5.55）中系数C的确定形式，即他推导出尺度δ和位移厚度δ^*（这容易从实验得到）之间的关系，$\frac{u_*}{U}$和参数κ和Π的值。在大量平板边界层速度分布实验数据的基础上，在恒定压强和存在压强梯度的情况下，Coles发现对于一大类二维湍流边界层，函数$w(\eta)$是相同的。所以，根据他的数据，流动的外边界条件（包括自由流动中的压强分布）仅反映在因子Π 的值中。在复合压强分布的情形，可以假设这个因子依赖于x坐标。在零压强梯度（即，速度不变）流过平板流动的最简单情形，对于所有不太小的雷诺数，$\Pi =$ 常数 ≈ 0.55。[12]Coles 根据实验数据得到的普适函数$w(\eta)$如图39 所示。它具有几乎完全斜对称的S形形式，并且很好地由正弦曲线$w = 1 + \sin\frac{(2\eta-1)\pi}{2} = 1 - \cos\pi_\eta$在$0 \le \eta \le 1$的一段近似。（$w(\eta)$的这种形式得到了广泛使用在，例如Spalding (1964)和Escudier, Nicoll (1966)的很多和具有一个平面刚性边界的一大类流体有关的很多计算中。）

在方程（5.57）中，我们可以形式上得到$u_* \to 0$（即$\tau_0 \to 0$时的极限），借助方程（5.55）和条件$w(1) = 2$，我们得到最简单的结果

$$\overline{u}(z) = \frac{U}{2} w\left(\frac{z}{\delta}\right).$$

所以函数$w(\eta)$给出了$\tau_0 = 0$（即边界层的分离点，$\frac{d\overline{u}}{dz} = 0$处）点平均速度分布的形式（参见图8 中的示意图）。在此基础上，Coles把函数$w(\eta)$称为*尾流函数*，把边界层中平均速度分布对壁面普适定律（5.13）的偏离严格正比于普适尾流函数这个定律，称为*尾流定律*。满足这个尾流定律的平均速度分布的一般形式$\overline{u}(z)$如图40 所示。这里虚线代表假设的湍流尾流上半部分的平均速度分布。这基本上是由尾流的湍流核与外部层流相互作用，以及流动的湍流和非湍流部分之间的界面起伏产生的，和图38一致。这个尾流中心和边界上平均速度的差等于$\frac{2\Pi}{\kappa}u_*$。如果我们在这个尾流中心放一块刚性板，那么这个尾流中的速度分布会发生很大变化。这是由于在表面附近，流动开始受到无滑动条件$\overline{u}(z) = 0$导致的黏滞效应的强烈限制。这个额外的限制，在纯粹形式上产生了“普适壁面分布”，如果图40中的点线所

[12]根据Coles在1962的一份未发表的报告[Crocco (1965)进行了综述]，在$\mathrm{Re}_{\delta^{**}} = U\delta^{**} \ge 6000$，$\Pi =$ 常数，而对于小于大约6000的$\mathrm{Re}_{\delta^{**}}$值，$\Pi$快速减小并在$\mathrm{Re}_{\delta^{**}} \approx 500$变为零。根据Crocco，$\Pi$在所有$\mathrm{Re}_{\delta^{**}}$略微依赖于$\mathrm{Re}_{\delta^{**}}$（即略微依赖于$u_*/U$）。

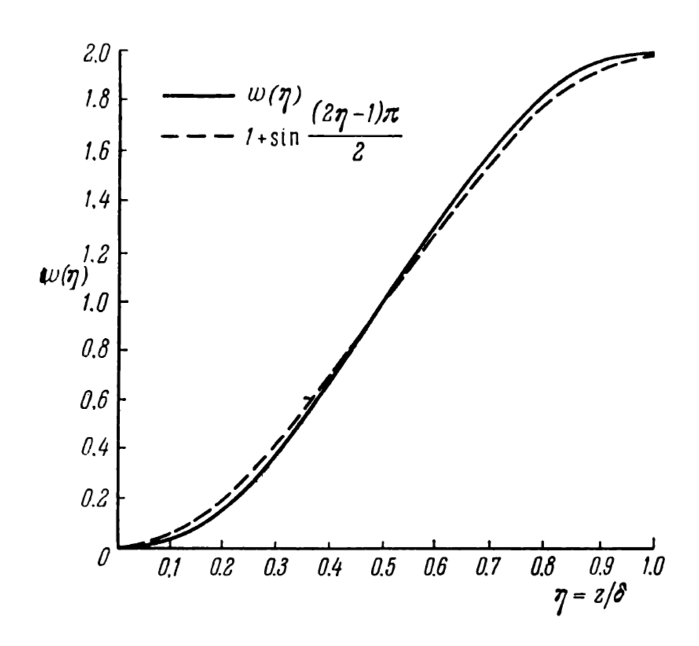


图 39 普适尾流函数$w(\eta)$，根据Coles (1956)。

示。将这个“壁面分布”叠加在尾流分布上，得到了图40中实线所示的湍流边界层的真实速度分布。

B. G. J. Thompson (1963, 1965)提出了研究边界层中速度分布的另一个方法。我们在本小节前面提到了这个方法。它显然和Coles 的方法有关，尽管它基于不同的假设。

和管中的流动类似，因为流动存在一个满足壁面定律（5.13）和速度缺定律（5.54）的截面（具有对数函数f和f_1），所以局域摩擦系数

$$c_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 2\left(\frac{u_*}{U}\right)^2$$

必须满足一个这种形式的方程

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = \frac{1}{\kappa\sqrt{2}}\ln(\mathrm{Re}_\delta\sqrt{c_f}) + B_3, \mathrm{Re}_\delta = \frac{U\delta}{\nu} \tag{5.58}$$

[参见5.5节中方程（5.54）的推导]。正如定律（5.54），公式（5.58）中存在不精确定义的边界层厚度δ使得这个方程不适于实际应用。所以希望用另一个更容易定义的长度标度来代替δ。最常见的是使用方程（5.55），这使

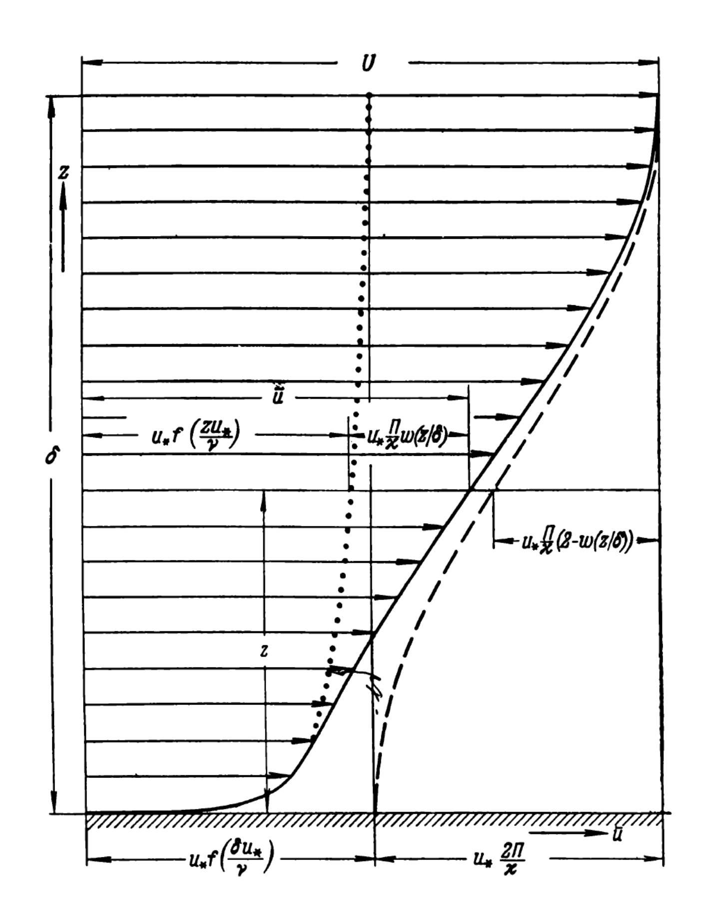


图 40 满足Coles的尾流定律的速度分布的示意图。

得方程（5.58）可以重写为这种形式

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = \frac{1}{\kappa\sqrt{2}} \ln \mathrm{Re}_{\delta^*} + B_4, \mathrm{Re}_{\delta^*} = \frac{U\delta^*}{\nu}. \tag{5.59}$$

Schultz-Grunow (1940)和Smith, Walker (1959)比较了这个关系和光滑平板上方边界层中不同点的局域摩擦系数值的直接测量的数据，如图41所示。在这幅图中，实验值$\frac{1}{\sqrt{c_f}}$和方程（5.58）右边$\kappa = 0.40$和$B_4 = 2.6$时相当接近。

将δ简单替换为长度x（从板的原点算起）有点复杂。为此，我们必须用x来表达厚度δ，可以用下面的近似考虑进行。因为边界层中旋转湍流的流线不穿过层外，所以边界层的平均外边缘一定和距离平板δ处平均运动的流线重合。因此，该边缘相对Ox轴的倾角的正切必须等于边缘上的点的平均垂向速度（沿Oz轴方向）和平均水平速度之比。然而，边界层边缘的水平速度等于U。平均垂向速度不依赖于U，仅由与Oz方向动量输运有

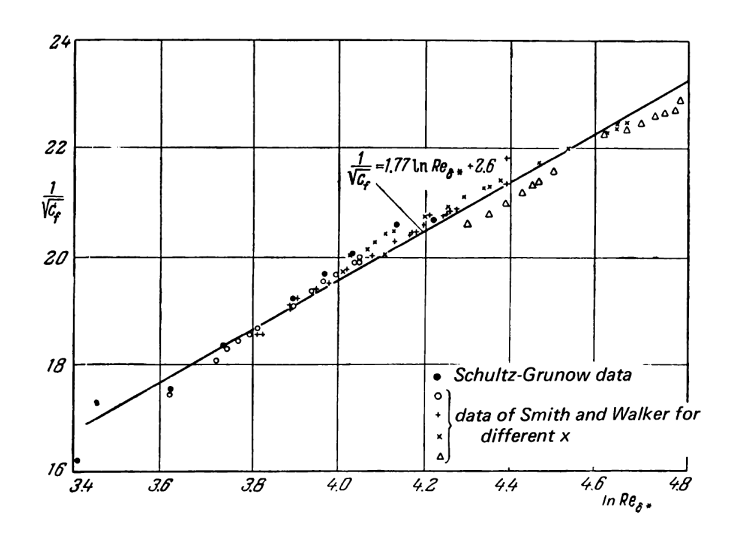


图 41 平板上方边界层局域表面摩擦系数c_f 对雷诺数Re_{δ^*}的依赖，根据Schultz-Grunow和Smith, Walker 的数据。

关的相对涨落运动确定。于是，从量纲考虑，垂向速度一定正比于摩擦速度u_*，用给定x的τ_0值给出。所以有

$$\frac{d\delta}{\mathrm{d}x}=b_1\frac{u_*}{U}, \tag{5.60}$$

其中b_1时一个数值系数（量级为1）。我们现在假设边界层是湍流的，实际上是从板本身的前缘开始的。所以方程（5.60）对从$x=0$（那里$\delta=0$）开始的所有x都满足。一般来说，u_*/U是x的函数，但因为它变化非常慢，对方程（5.60）积分，我们可以把它从积分号中提出来而不引起很大误差（如果需要，同时略微改变系数b_1）。所以，我们得到近似方程

$$\delta=b_1\frac{u_*}{U}x. \tag{5.61}$$

严格来说，方程（5.61）可以从方程（5.60）得到，仅当

$$\frac{u_*}{U}=\sqrt{\frac{c_f}{2}}$$

可以用一个简单的x的幂函数表示。然而，可以从下面的讨论看出，这个表示具有相当高的精度。见，例如，方程（5.66），图42 给出了它和实验数据的比较。

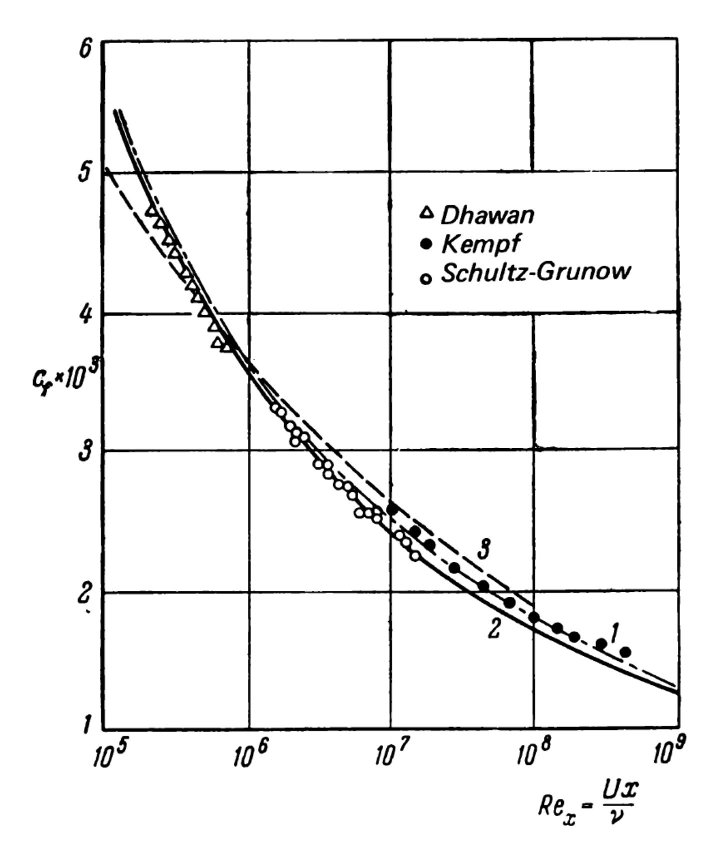


图 42 平板上方边界层表面摩擦系数c_f对雷诺数Re_x的依赖，根据Kempf, Schultz-Grunow, Dhawan的数据。曲线1：$x = 0.39, B_5 = 1.7$的冯·卡门表面摩擦定律（5.62）；曲线2：Schultz-Grunow定律（5.64）；曲线3：Falkner定律（5.66）。

把方程（5.61）带入方程（5.58），我们得到

$$\frac{1}{\sqrt{c_f}} = \frac{1}{\kappa\sqrt{2}} \ln(\mathrm{Re}_x \cdot c_f) + B_5. \tag{5.62}$$

这个结果首先由von Kármán (1930, 1934)给出。他是用不同相同的论证得到的，和Kempf (1929)借助测力计直接测量局域表面摩擦系数得到的较老实验数据符合得很好。冯·卡门的结果也和Schultz-Grunow (1940)和Dhawan (1952)后来的实验数据[见图42，其中系数$\frac{1}{\kappa\sqrt{2}} = 1.8$，即$\kappa = 0.39$和$B_5 = 1.7$，它们使得和Kempf的数据符合得最好]符合得很好。我们进一步注意到，通过比较方程（5.59）和（5.62）中的系数B_4和B_5值得到与实验数据的最佳拟合，也有可能估计方程（5.61）中的b值。特别地，如果我们取图41和42中所用的这些系数值（忽略所选κ值相当小的散度），那么对于方

程（5.55）定义的$C=\frac{1.55}{0.4}\approx 3.9$的厚度$\delta$[即，和Coles (1965)相同的$C$值]，我们得到$b\approx 0.3$。

对于粗糙平板，上面的方程必须进行和粗糙管类似的改变。例如方程（5.58）对于完全粗糙管必须写成（5.45'）形式[但是用δ替代H_1]。然而，我们在这里不过多讨论这一点[见，例如，Schlichting (1960)第21章，第4节]。

根据方程（5.62），c_f是一个缓慢变化的x的函数。然而，借助方程（5.62）给出的c_f作为Re_x函数的显式定义相当复杂，在实践中，通常使用较简单的插值或经验方程。所以，例如Schlichting (1960)[不是源自冯·卡门方程，而是源自普朗特的更一般结果，在Schlichting (1960) 的书中有所描述]提出了c_f 的计算公式

$$c_f=(2\ln\mathrm{Re}-0.65)^{-2.3}, \tag{5.63}$$

给出的结果接近从方程（5.62）得到的结果。后来，Schultz-Grunow (1940)使用方程

$$c_f=0.370(\ln\mathrm{Re}_x)^{-2.584}, \tag{5.64}$$

其结果在图42中和数据进行了比较。最后，如果我们假设边界层中平均速度分布在所有截面中由“七分之一律”给出（见5.5节结尾），那么可以得到非常简单的公式

$$c_f=c(\mathrm{Re}_x)^{-1/5}. \tag{5.65}$$

$c=0.0576$时，这个公式在雷诺数范围$5\times 10^5<\mathrm{Re}_x<10^7$也给出对测量值相当好的描述。进一步增大雷诺数$\mathrm{Re}_x$，方程（5.65）给出的$c_f$开始减小，所以为了得到可能的最佳拟合，必须将公式中的幂指数1/5替换为一个较小的值。特别地，对于高达10^9的Re_x，使用Falkner (1943)的公式

$$c_f=0.0262(\mathrm{Re}_x)^{-1/7} \tag{5.66}$$

可以得到和数据很好的拟合。

除了局域摩擦系数c_f，我们也可以考虑长度l的平板的总摩擦系数C_f，

$$C_f=\frac{F}{\frac{1}{2}\rho U^2\cdot 2l}=\frac{1}{l}\int_0^l c_f(x)\mathrm{d}x,\qquad F=2\int_0^l\tau_0(x)\mathrm{d}x \tag{5.67}$$

[参见方程（1.51）-（1.52）]。这个总摩擦系数的测量比局域摩擦系数c_f的测量要多得多，有关于它的大量数据，最早的可以追溯到1793年[见Schubauer, Tchen (1959)、Goldstein (1938)和Schlichting (1960)]。使用方程（5.62）作为起点，Schoenherr (1932)得到了C_f的关系式

$$\frac{1}{\sqrt{C_f}}=4.13\ln(\mathrm{Re}_l\cdot C_f),\qquad \mathrm{Re}_l=\frac{Ul}{\nu}, \tag{5.68}$$

和实验数据符合得很好。Schlichting使用普朗特更复杂的计算替代方程（5.62），提出了简单的插值公式

$$C_f=0.455(\ln\mathrm{Re}_l)^{-2.58}, \tag{5.69}$$

给出了稍微不同于方程（5.68）的结果。Schultz-Grunow (1940)使用了类似的公式

$$C_f=0.427(\ln\mathrm{Re}_l-0.407)^{-2.64}. \tag{5.70}$$

如果我们从“七分之一律”开始，那么如我们已经看到的，我们得到$C_f \sim (\mathrm{Re}_l)^{-1/5}$。如果我们取

$$C_f = 0.0306\mathrm{Re}_l^{-1/7}, \tag{5.71}$$

可以在很宽的雷诺数范围得到更好的拟合。将这个结果和平板层流摩擦系数的方程（1.52）进行比较表明，在湍流情形，摩擦比层流情形大得多（例如，在$\mathrm{Re}_l = 5\times10^5$，差不多大2.5倍），随着雷诺数增大的下降要缓慢得多。

上述所有考虑都指的是边界层从平板前缘开始可以考虑为完全湍流的情形。然而，如果向湍流的转捩发生在点$x = x_0$（离前缘足够远），那么对于边界层的层流部分我们必须在表面摩擦定律中引入一个修正。如果我们使用Prandtl (1927)的假设，转捩为湍流后，边界层近似表现为似乎它们从平板前缘开始就是湍流的，这个修正可以简化如下：对于从平板前缘到转捩点$x = x_0$的部分，对于上面计算的摩擦力F 的值，我们必须减去湍流和层流情形摩擦力之间的差。如果我们考虑这个修正，那么摩擦系数等于

$$C_f - \frac{\rho U^2 x_0[C_1(x_0) - C_2(x_0)]}{\frac{1}{2}\rho U^2\cdot 2l} = C_f - \frac{\mathrm{Re}_{x_0}[C_1(x_0) - C_2(x_0)]}{\mathrm{Re}_l} = C_f - \frac{A(x_0)}{\mathrm{Re}_l}, \tag{5.72}$$

其中C_f由方程（5.68）[或上面给出的某些方程]给出，$C_1(x_0)$和$C_2(x_0)$分别是长度l的平板对于湍流和层流的摩擦系数。这个修正使得我们可以描述层流摩擦定律（1.52）和我们讨论的纯湍流摩擦定律的转换区域。方程（5.72）中的系数$A(x_0)$当然依赖于层流向湍流转捩的临界雷诺数$\mathrm{Re}_{x_0} = \mathrm{Re}_{x\ \mathrm{cr}}$。根据普朗特的数据，例如，对于$\mathrm{Re}_{x_0} = 5\times10^5$，$A(x_0) = 1700$[对于某些其他$\mathrm{Re}_{x_0}$值，$A(x_0)$值可以在Schlichting (1960)的书中找到]。

所引用的c_f和C_f随雷诺数Re_x和Re_l的变化规律也可以用于研究平均速度分布（根据方程（5.57），依赖于$u_* = U\sqrt{\frac{c_f}{2}}$和$\delta$）随$x$ 增大的变化。c_f对x的依赖上面已经讨论过，δ随x增大的变化可以从方程（5.61）确定，它也含有$\frac{u_*}{U} = \sqrt{\frac{c_f}{2}}$。因为$c_f$随$x$的增大减小得非常慢，所以厚度$\delta$ 几乎随x一次幂增大（如果我们使用方程（5.66），δ正比于$x^{13/14}$）。重要的是这种增大比层流边界层厚度的增大（根据方程（1.33）正比于$x^{1/2}$）快得多（参见图4，1.4节，含有边界层层流和湍流部分的厚度δ的直接测量结果）。

5.7 壁面附近被动外加物的浓度分布；湍流边界层中的质量和热量输运

我们已经讨论了壁面附近湍流平均速度分布和摩擦的问题。人们发现类似的考虑可以应用于湍流质量和热量输运的研究中。下面，我们将给出关于这个问题的一些基本事实。较详细的描述可以在，例如，Grober, Erk (1955)、MacAdams (1954)和Eckert, Drake (1959)的工程书、Howarth (1953)编著的专著的第14章、Levich (1962)的第3-4章、Deissler (1959)的综述文章、Kestin, Richardson (1963)和Spalding, Jayatillaka (1965)中找到。

和5.2-5.3节中一样，我们考虑以沿Ox轴的刚性光滑壁面为界的半空间$z > 0$中没有纵向压强梯度的流体的平面平行流动。让我们假设在边界面$z = 0$上，被动外加物浓度保持一个不变值ϑ_0。于是流体中会产生一个不变的这种外加物的流量j，指向壁面之外，即Oz的正方向，方程（5.7’）具

有这种形式

$$j(z) = -\rho\chi\frac{d\overline{\vartheta}}{dz} + \rho\overline{\theta' w'} = j_0 = \text{常量}. \tag{5.73}$$

平均速度分布依赖于速度长的统计特征（由参数ν和u_*）以及分子扩散系数χ、密度ρ和外加物流量j_0。引入ϑ的特殊量纲Θ，把质量量纲记作M，我们有

$$[j_0] = M\Theta L^{-2}T^{-1}, [\rho] = ML^{-3}, [u_*] = LT^{-1}, [\nu] = [\chi] = L^2T^{-1}.$$

于是，通过量纲的考虑，我们有

$$\overline{\vartheta}(z) - \overline{\vartheta}(0) = \frac{j_0}{\rho\kappa u_*}\phi\left(\frac{zu_*}{\nu}, \frac{\nu}{\chi}\right) = \theta_*\phi(z_+, \mathrm{Pr}), \tag{5.74}$$

其中

$$\theta_* = -\frac{1}{\kappa u_*}\frac{j_0}{\rho} \tag{5.75}$$

是一个量纲Θ的常量，给出了浓度的自然标度[这里在θ_*的定义中包含了冯·卡门无量纲常量$\kappa = \frac{1}{A} \approx 0.4$，因为有时在接下来的论证中是方便的]，$\phi(z_+, \mathrm{Pr})$是一个两变量的普适函数，满足条件$\phi(0, \mathrm{Pr}) \equiv 0$。如果$\vartheta$是温度$T$，那么方程（5.73）-（5.75）当然必须写为

$$\begin{aligned} q(z) &= -c_p\rho\chi\frac{d\overline{T}}{dz} + c_p\rho\overline{T'w'} = q_0 = \text{常量}, \quad (5.73') \\ \overline{T}(z) - \overline{T}(0) &= -\frac{q_0}{c_p\rho\kappa u_*}\phi\left(\frac{zu_*}{\nu}, \frac{\nu}{\chi}\right) = T_*\phi(z_+, \mathrm{Pr}), \quad (5.74') \\ T_* &= -\frac{1}{\kappa u_*}\frac{q_0}{c_p\rho}, \quad (5.75') \end{aligned}$$

其中函数$\phi(z_+, \mathrm{Pr})$和方程（5.74）的中一样。我们注意到，对于温度的情形，被动性的假设比物质外加物的情形更可疑。这既是因为在非均匀加热的流体中存在浮力（这将在第4章中详细讨论），也是因为流体密度、黏滞系数和热扩散律的温度依赖[关于考虑这些对气体和液体不同的依赖关系的问题，见例如Deissler (1959)和von Driest (1959)的文章]。此外，能量耗散导致的加热在实验室流动中不总是可以忽略。然而，作为一个规则，下面为了确定，ϑ将被称为温度，将使用（5.73'）-（5.75' ）形式的方程，但ϑ替换T。（如1.5节所解释的，使用符号ϑ表明我们我们始终关注的是一种完全被动的外加物。）

含有位置函数ϕ的方程（5.74'）对于足够大的z值可以大大简化。关于

足够大的z值，我们指的是满足条件$z \gg z_* = \frac{\nu}{u_*}$，故而分子黏滞$\nu$对平均速度分布没有影响，从而（因为同样的原因）对平均温度的分布没有影响。此外，对于所讨论的z值，要求湍动热流$q^{(1)} = c_p\rho\overline{\vartheta' w'}$比分子热流$c_p\rho\chi\frac{d\overline{\vartheta}}{dz}$大很多。在这个条件下，系数$\chi$对$\overline{\vartheta}$随高度的变化也没有影响。因为湍动热流是由产生湍流动量流$\tau^{(1)} = -\rho\overline{u'w'}$同样的涡旋运动产生的，所以自然地假设涡旋黏滞$K$和涡旋热扩散系数$K_\vartheta$具有同样的量级。所以，如果$\mathrm{Pr} \gtrsim 1$，即$\chi \lesssim \nu$，那么在$z \gg z_* = \frac{\nu}{u_*}$，涡旋热扩散系数将比分子扩散系数$\chi$大得多。所以，对于$z > z_*$，$z$可以视为足够大，两个必要条件都满足。然而，如果$\mathrm{Pr} \ll 1$，那么仅当$z \gg \frac{\chi}{u_*} = \mathrm{Pr}^{-1} \cdot z_*$时涡旋热扩散系数[根据方程（5.26），对于$z \gg z_*$，它处于$u_* z$的量级]远比分子热扩散系数$\chi$大。所以，一般来说，仅当满足两个条件：$z \gg z_*$和$z \gg \mathrm{Pr}^{-1} \cdot z_*$（第二个条件显然仅在$\mathrm{Pr} \ll 1$的情形重要），我们可以忽略$\nu$ 和χ 对平均温度随高度变化的影响。

当$z \gg z_*$和$z \gg \mathrm{Pr}^{-1} \cdot z_*$，平均温度梯度必须仅由参数$q_0/c_0, u_*$和$z$确定。所以，通过量纲分析，我们有

$$\frac{d\overline{\vartheta}}{dz} = \frac{q_0}{\alpha c_p \rho \kappa u_* z} = \frac{\theta_*}{\alpha z}, \tag{5.76}$$

其中α是一个新的量级为1的无量纲常量。于是

$$\overline{\vartheta}(z) - \overline{\vartheta}(0) = \frac{\theta_*}{\alpha} \ln z + A_1 \tag{5.77}$$

（参见Landau, Lifshitz (1963)第1部分，第54节），而这里的常量A_1[和方程（5.22）的情形相同]必须从分布（5.77）和下层中平均温度分布（方程（5.77）不适用）的匹配条件确定。

由方程（5.77）很明显

$$\phi(z_+, \mathrm{Pr}) = \frac{1}{\alpha} \ln z_+ + C, \qquad 对于 z_+ \gg \max(1, \mathrm{Pr}^{-1}).$$

所以，对于足够大的z_+值，ϕ和方程（5.13）的函数f的差别仅在于数值系数值（仅有一个，C可以依赖于普朗特数）。此外，我们注意到，通过方程（5.9），分布（5.77）对应于下面的涡旋热扩散系数值：

$$K_\vartheta = \alpha \kappa u_* z. \tag{5.78}$$

所以很清楚的是，常量α的意义是对数边界层湍流普朗特数的倒数：

$$\alpha = \frac{1}{\mathrm{Pr}_t} = \frac{K_\vartheta}{K}, \mathrm{Pr}_t = \frac{K}{K_\vartheta}. \tag{5.79}$$

不幸的是，真实流动中壁面附近被动外加物浓度分布的数据比平均速度的数据少得多。于是，到显现在为止，这些方程的实验验证仍然非常不完备。气象学家经常重复的对大气表面层平均温度分布的测量对于这个目的几乎没什么用，因为在空气温度有高度依赖（即非中性热分层）的大气表面层中，浮力起了相当大的作用，温度不能考虑为一个被动外加物。更详细的讨论见第4章。更有希望的是仔细测量大气表面层的湿度分布（即水汽浓度）数据。事实上，尽管浮力在存在垂向温度梯度时会影响湿度的垂向分布（见第4 章），但在“中性条件”下（即对于等温情形）也可以观测湿度分布，而温度分布仅在非中性条件下才有意义。到目前为止，这方面只有非常少的实验数据。然而，我们这里会提到Pasquill (1949)、Rider (1954)和其他研究者的结果，这些结果证实了在温度分层接近中性时，湿度分布可以很好地用对数方程描述（见下面的8.2节）。在伴随强受迫对流的实验室剪切流中，相比大气中，温度更可以考虑为被动外加物。然而，已发表的壁面附近实验室流动中温度分布的测量数据非常少，而且大多数精度非常低。因此我们只能说它们不违背定律（5.77）。然而，早在20世纪20年代，Elias就展示了，在加热平板上的边界层中，$z > 0.056\delta$的温度分布近似为对数的，类似于平均速度分布[见Elias (1929)]。后来，Nunner (1956)也在沿粗糙管的非等温空气流中得到了几乎完全对数的平均温度分布，从$z = 0.02R$开始，几乎一直延续到管的中心。Reynolds, Kays, Kline (1958)、Brundrett, Baines, Peregrym, Burroughs (1965)和Perry, Bell, Joubert (1966)对温度分布的测量结果也和存在具有对数温度分布的相对厚的层的推断符合得很好。最后，Johnk, Hanratty (1962)和Hishida (1967)对光滑的（具有小的热流，可以把流体性质考虑为常量，也减小了其他误差来源）加热管中空气流的温度分布的仔细测量非常确定地表明，在完全发展的热力学情形，在所有$\mathrm{Re} \geq 25000$，温度分布在$z_+ = 30$到$z_+ = 200 - 300$具有对数形式（见，例如取自Johnk和Hanratty文章的图43）。Johnk和Hanratty的结果弥散非常小。他们在$\kappa = 0.4$时无量纲温度$\overline{T}_+(z) = c_p\rho u_*[\overline{T}(z) - \overline{T}(0)]/q_0$的平均数据可以由这个方程代表

$$\phi(z_+, 0.7) = 0.9 \ln z_+ + 1.3$$

（即，根据数据$\mathrm{Pr}_t \approx 0.9, \alpha \approx 1.1, C(0.7) \approx 1.3$）。Hishida得到了几乎相

同的结果：根据他的数据，$\mathrm{Pr}_t \approx 0.87, \alpha \approx 1.15, C(0.7) \approx 1.4$。Reynolds, Kays, Kline (1958)和Perry, Bell, Joubert (1966)的实验数据弥散更大，后一个工作得到了非常接近的平均估计：$\mathrm{Pr}_t \approx 1, \alpha \approx 1, C(0.7) \approx 1.6$。

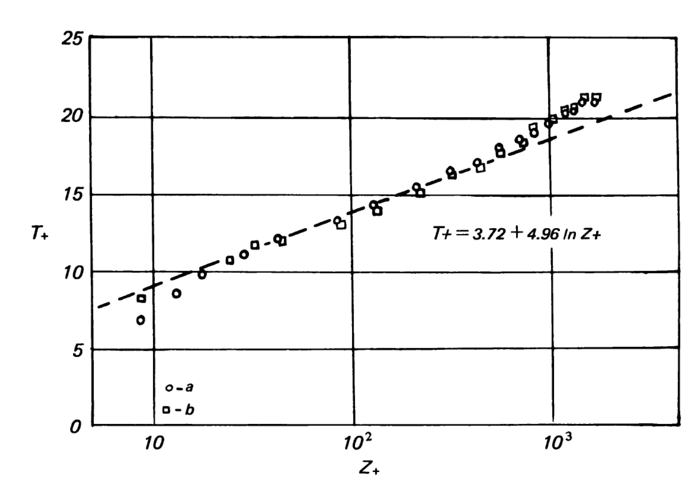


图 43 管流中无量纲平均温度$T_+(z) = c_p \rho u_* [T(0)]/q_0$的分布，根据Johnk和Hanratty 的两个测量：a)$\mathrm{Re} = 71200$;b)$\mathrm{Re} = 70200$。

在管、渠或边界层中非等温流的靠外部分，*扩展雷诺数相似性原理*（*即雷诺和佩克雷数相似性原理*）显然必须成立。根据这个原理，在远离刚性壁面的流动区域中，如果雷诺数和佩克雷数都足够大，那么温度场的统计性质不直接依赖于分子黏滞和热扩散系数（即无量纲组合Re, Pe和$\mathrm{Pr} = \mathrm{Pe}/\mathrm{Re}$）。这个原理对于平均温度分布最重要的结果是一个这种形式的一般性*温度缺定律*

$$\frac{\overline{\vartheta}_1 - \overline{\vartheta}(z)}{\theta_*} = \varphi_1\left(\frac{z}{H_1}\right) = \varphi_1(\eta), \tag{5.80}$$

其中H_1是管的半径、渠的半宽或边界层厚度，而$\overline{\vartheta}_1 = \overline{\vartheta}(H_1)$。函数$\varphi_1(\eta)$对于不同类型的流动当然可能不同。Johnk和Hanratty对于管流在各个Re（但仅有一个$\mathrm{Pr} = 0.7$）的数据支持了温度缺定律。根据这些数据，对于管流，从$\eta = 0.02$到$\eta = 1$的函数$\varphi_1(\eta)$可以近似为$\varphi_1(\eta) = 2.9\eta^2$[或$\varphi_1 = 3(\eta^2 - \eta^4/12)$]。这个管流的温度缺定律的一些应用可以在W. Squire (1964)的文章中找到。对非等温边界层流动的函数$\phi_1(\eta)$的一些初步测量发表在Žukauskas, Šlančiauskas, Pedišius, and Ulinskas (1968)中。然而，他们的数据和φ_1不依赖于Pr的假设不符（或许是因为在测量中Re 和Pe值不足够大）。我们也必须强调，在温度壁面定律（5.74'）和温度缺定律（5.80）都适用的重叠层，函数φ 和φ_1都一定是对数的（参见5.5节）。然而，对数层

外φ_1函数的定义和温度缺定律的精确实验验证都强烈要求对所有三种流动在高雷诺数和佩克雷数以及一个大范围普朗特数的温度分布的进一步仔细测量。

温度壁面定律和温度缺定律都具有对数形式的重叠层的存在使得可以得到一个非常一般性的热输运定律。实际上，两个对数定律的和容易写为这种形式：

$$\frac{\overline{\vartheta}_1 - \overline{\vartheta}_0}{\theta_*} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{H_1 u_*}{\nu} + C_1(\mathrm{Pr})$$

其中$\overline{\vartheta}_0 = \overline{\vartheta}(0), C_1(\mathrm{Pr}) = C(\mathrm{Pr}) + C_2$，而$C_2$是对数形式的温度缺定律中的常数项（它显然不依赖于Pr，但可能对于管、渠和边界层不同）。最后一个方程给出了下面的热输运过程的主要无量纲特征－－热输运系数的一般定律（斯坦顿数）

$$c_h = \frac{q_0}{c_p \rho U(\overline{\vartheta}_0 - \overline{\vartheta}_1)},$$

其中U是流动的某个典型速度标度：

$$c_h = \frac{\sqrt{c_f/2}}{\ln(\mathrm{Re}\sqrt{c_f})/\kappa\alpha + C_3(\mathrm{Pr})}, C_3 = \frac{1}{\alpha} C_1(\mathrm{Pr}) - \frac{\ln 2}{2\kappa\alpha}, \qquad (5.80')$$

其中$\mathrm{Re} = UH_1/\nu$，$c_f = 2(u_*/U)^2$是摩擦系数（Kader, Yaglom (1970)，也参见5.5节方程（5.45）的类似推导）。

对于空气中热输运的情形（$\mathrm{Pr} \approx 0.7$）我们知道$C(0.7) \approx 1.3$。此外，对于圆管中流动的情形，常数C_2可以大致从Johnk, Hanratty (1962)关于温度缺定律的数据估计得到$C_2 \approx 0.3$。所以圆管中空气流中热输运的方程（5.80'）中的所有系数可以认为是已知的。然而，使用这个方程的计算和热输运数据的比较不是直接的，因为几乎所有已有的管中的热输运数据都和管轴温度$\overline{\vartheta}_1 = \overline{\vartheta}(H_1)$无关，而和整体温度（即，和流过管道的流体的平均温度有）

$$\overline{\vartheta}_m = \int_0^{H_1} \overline{\vartheta}(z)\overline{u}(z)(H_1 - z)dz \Big/ \int_0^{H_1} \overline{u}(z)(H_1 - z)dz$$

有关，并且通常使用整体速度

$$U_m = \frac{2}{R^2} \int_0^{H_1} \overline{u}(z)(H_1 - z)dz$$

作为典型速度。换句话说，已有数据没有给出系数c_h值，而是给出了修正的热输运系数

$$C_h = q_0/c_p\rho U_m(\overline{\vartheta}_0 - \overline{\vartheta}_m) = c_h(1-\Delta)$$

其中

$$\Delta = \frac{\overline{\vartheta}_m - \overline{\vartheta}_1}{\overline{\vartheta}_0 - \overline{\vartheta}_1}.$$

在实践中，在估计改正量Δ时，至少对于管中的空气流，有可能忽略分子黏滞和热传导直接影响的薄壁面层，把速度和温度分布考虑为纯对数的。在这个近似中，容易证明

$$\Delta \approx \frac{3.75}{\alpha}\frac{c_h}{(c_f/2)^{1/2}}[1-(c_f/2)^{1/2}/1.2] \approx 3.4c_h(c_f/2)^{-1/2}, \text{ 当}(c_f/2)^{1/2} \ll 1$$

（参见5.5节中方程（5.47）的类似推导）。使用这个Δ的方程，方程（5.80'）可以写为这种形式

$$C_h = \frac{\sqrt{C_f/2}}{\ln(\mathrm{Re}_D\sqrt{C_f})/\kappa\alpha + C_4(\mathrm{Pr})}, C_4(\mathrm{Pr}) = C_3(\mathrm{Pr}) - \ln 2/\kappa\alpha - 3.4 \quad (5.80'')$$

其中$\mathrm{Re}_D = DU_m/\nu = 2H_1U_m/\nu$，$C_f = 2(u_*/U_m)^2$。进一步，使用5.5节$C_f = \lambda/4$或$\mathrm{Re}_D$依赖的数据（见图33）我们可以从方程（5.80"）计算对热输运系数C_h，或者等价的，所谓Nusselt数$\mathrm{Nu} = C_h\mathrm{RePr}$ 对雷诺数Re_D的依赖。这些结果和各种来源的数据的比较如图A所示，其中同时给出了广泛使用的纯经验关系$\mathrm{Nu} = 0.018\mathrm{Re}_D^{0.8}$[参见，例如McAdams (1954)]。

使用方程（5.80'）和（5.80"）的计算和具有其他普朗特数的管流中的热输运和质量输运的数据的比较将在本小节后面考虑。

壁面的温度定律和温度缺定律都可以推广到温度涨落的特征，与速度涨落相应的结果非常类似。然而，现在，几乎没有合适的实验数据证实这些推广的定律所预测的关系。

数据的缺乏也使系数α（或$\mathrm{Pr}_t = \frac{1}{\alpha}$）的可靠估计变得相当复杂。到目前为止，在大多数有关工程装置和大气的应用传热计算中，按照O. Reynolds (1874)，通常假设$\alpha = 1$。然而，通常情况下，这些计算结果与直接测量的数据相当吻合。然而，传热技术特别关注的整体传热特性通常对参数α不太大的变化不是很敏感，因此无法对其进行可靠的估计。或许已有对数层α和Pr_t的最佳估计是从Johnk, Hanratty (1962)和Hishida (1967)的数据得到的，上面已经简单描述。尝试从管流和渠流平均速度和温度分布的测量直接估计α也一般得到比1大的α 值，量级为1.1-1.4[即，$\mathrm{Pr}_t \approx 0.9 -$

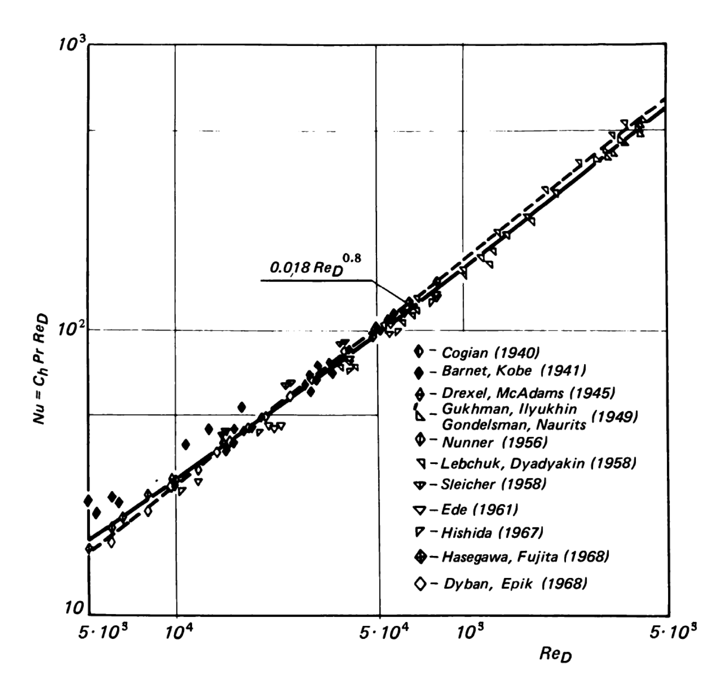


图 43 A. 各种来源的管中空气流的湍动热输运数据和方程（5.80'）给出理论依赖[实线]的比较，以及和经验公式$\mathrm{Nu} = 0.018\mathrm{Re}_D^{0.8}$[虚线]的比较，根据Kader, Yaglom (1970)。

$0.7 < 1$。见，例如，Corcoran et al. (1952)、Cavers, Hsu, Schlinger, Sage (1953)、Hsu, Sato, Sage (1956)、Ludwieg (1956)、Sleicher (1958)、Venezian, Sage (1961)、Zukauskas et al. (1968)以及Longwell (1966)的书和Deissler (1959), Kestin, Richardson (1963)和Blom and De Vries (1968)的综述文章]。然而，有时（主要是在一些液态金属传热的实验中）也得到稍微大约1 的α值，即$\mathrm{Pr}_t > 1$[见，例如，Subbotin, Ibragimov, Nomofilov (1963)、Dwyer (1963)和Longwell (1966)]。从大气中的风和温度分布确定α仅可以在温度分层非中性的情形进行。然而，这里有可能尝试找到当分层趋向于中性时α趋向的极限，并令这个极限等于对数边界层的系数K_ϑ和K的比。这样的尝试进行了多次，但结果都不相同。所以，例如，Rider (1954)、Priestley (1963－1964)和Swinbank (1964)发现$\alpha > 1$，但在Swinbank (1955)和Gurvich (1965)的工作中得到了$\alpha < 1$。Panofsky et al. (1967)收集的结果给人的印象是α非常接近于1 （见下面的8.2节）。一般来说，我们必须记住，到目前为止，湍流传热（和质量输运）的所有已有数据大体上是矛盾的，在使用它们的时候必须非常小心。所以，例如，甚至在给出近似相同的α平均值的工作中，我们发现关于α随与壁面距离z变化的论断中明显的矛盾。（根据Ludwieg (1956)，α随z的增大略微增大，

而另一方面，根据Corcoran et al. (1952)和Sleicher (1958)，α随z的增大而减小。）这些事实可以简单解释为所有已有测量精度低的结果。这是特别危险的，因为实验图必须求导得到α或Pr_t。在这方面，值得再次注意的是，根据上面给出的一般考虑，在充分发展的流动的对数区域，剪切应力和湍动热流都是恒定的，系数α也必须是常量（即，完全不依赖于z）。此外，因为我们这里处理的是分子黏滞和热扩散都不起作用的流体区域，所以α一定不依赖于它们，所以也不依赖于分子普朗特数Pr。这个论断和从机油（Žukauskas等人进行了研究）到液态金属的流体（即，极大的Pr范围）得到的α值的变化惊人地小相符。此外，如果我们相信受迫对流（其中温度像一个纯的被动外加物一样被输运）的条件是可能的，那么必须认为热输运和质量输运的α值是完全相等的。然而，如果这两个值不同，那么这只能意味着存在某些（我们不知道的）物理机制对热输运和质量输运产生了不同的效应。

对于非常小的$z_+ = zu_*/\nu$值，对于光滑壁面，方程

$$\overline{\vartheta}(z) - \overline{\theta}(0) = -\frac{q_0 z}{c_p \rho_\chi}, \varphi(z_+, \mathrm{Pr}) = \kappa \mathrm{Pr} \cdot z_+ \tag{5.81}$$

自然必须成立（这类似于方程（5.20））。函数$\varphi(z_+, \mathrm{Pr})$在点$z_+ = 0$邻域展开成$z_+$的泰勒级数的其他项可以通过在点$z_+ = 0$对方程（5.73’）求导得到。在$z = 0$具有恒定温度$\vartheta' = 0$的壁面的情形，对于精确到$z_+$的四阶项的方程（5.20’），我们有

$$\overline{\vartheta}(z) = \overline{\vartheta}(0) - \frac{q_0 z}{c_p \rho_\chi} + c_4' \frac{q_0 u_*^3 z^4}{c_p \rho_\chi \nu^3}, \quad \varphi(z_+, \mathrm{Pr}) = \kappa \mathrm{Pr}(z_+ - c_4' z_+^4) \tag{5.81'}$$

其中[13]

$$c_4' = \frac{c_p \rho \nu^3}{8 q_0 u_*^3} \left(\overline{\frac{\partial \vartheta'}{\partial z} \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}} \right)_{z=0}.$$

从$\varphi(z_+, \mathrm{Pr})$对$z_+$的二阶和三阶导数在$z_+ = 0$变为零的事实可以得到，温度的变化在相当大的$z$值范围接近线性。所以我们可以引入分子热扩散亚层的概念，其中函数$\varphi(z_+, \mathrm{Pr})$的值实际上和$\kappa \mathrm{Pr} \cdot z_+$没有什么不同。然而，这个亚层的厚度$\delta_\vartheta'$现在由三个参数$\nu, \chi$和$u_*$决定，所以一般来说，我们只能

[13]我们注意到，和严格方程（5.20’）不同，平均温度分布（但不是物质的被动外加物浓度分布）的方程（5.81’）只是近似的。实际上，推导方程（5.81’）的初始方程（5.73’）本身就是近似的，因为在推导它时我们丢掉了描述动能耗散加热流体的项，这在方程（1.70）[1.5节]中有。如果我们保留这一项，那么在函数$\varphi(z_+)$的泰勒展开中会出现z_+^2和z_+^3阶的项，系数依赖于速度涨落的统计性质。Tien (1964)的工作致力于估计这些项。他证明了，在$z_+ \leq 10$的层中，它们仅当$|\rho u_*^3/q_0| > 10^{-3}$（其中现在假设$q_0$用量纲$MT^{-3}$的单位表达）时发挥一些作用。

说$\delta'_\vartheta = \psi(\mathrm{Pr})\nu/u_*$。在分子热扩散亚层之外，一定有某个转换区，介于方程（5.81）适用的区域和对数层之间。在这层之外是对数温度层，由方程（5.77）描述。不幸的是，目前，还没有对壁面附近温度分布或外加物浓度分布可靠的直接测量可以使我们能够验证所有这些一般性推导并追踪函数$\varphi(z_+, \mathrm{Pr})$完整的源。所以，我们必须基于湍流中热输运和质量输运的研究得到的间接数据推测这个函数在小z_+的值。

这些间接数据（有大量这种数据）包括对这些无量纲积分传热特征值的推导：Nusselt数$\mathrm{Nu} = \frac{-q_0\delta}{c_p\rho\chi(\vartheta_1-\vartheta_0)}$或对于不同$\mathrm{Re}_\delta = \frac{U\delta}{\nu}$和$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\chi}$的热输运系数（斯坦顿数）$c_h = \frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Re}_\delta \mathrm{Pr}} = \frac{-q_0}{c_p\rho U(\vartheta_1-\vartheta_0)}$。这里$\vartheta_0 = \overline{\vartheta}(0)$时壁面温度（一般来说，平板或管壁），假设恒定，$\vartheta_1$是边界层外或管轴上流动的温度，$\delta$是边界层厚度或管的半径，$U$是未扰动流动的速度或管轴上的速度。[14] 同样的无量纲特征量通常也在质量输运计算中确定。在此情形，只需要把q_0 替换为f_0，忽略Nu 和c_h 分母中的c_p，令ϑ_0 和ϑ_1 代表相应的浓度。Deissler (1951, 1954)、Hatton (1964) 和其他一些研究者证明了速度、温度和浓度分布以及管中和边界层中热输运和质量输运的所有积分特征量对于τ和q沿Oz轴的变化是相对不敏感的（至少当雷诺数不是特别大且普朗特数不是特别小的时候）。所以恒定应力和恒定流量层的模型通常可以作为合理的（甚至是很好）的一级近似。如果我们现在重写方程（5.77'）为

$$\overline{\vartheta}(z) - \vartheta_0 = \theta_* \left(\frac{1}{\alpha} \ln \frac{z u_*}{\nu} + C \right),$$

那么为了确定差$\vartheta_1 - \vartheta_0$，只需要知道参数$\kappa$和$\alpha$并估计常数$C$（主要依赖于温度在靠近壁面的薄层中的变化）。已经提出了一系列理论来估计这个常数。它们以不同的精度被实验证实。

可以估计C值的最简单的假设是O. Reynolds (1874)提出的。他假设湍流中热量和动量输运的机制是相同的。所以根据雷诺的理论，湍动热量q一定和剪切应力τ通过这种形式的关系式相联系：

$$\frac{q}{c_p\rho(U_2 - U_1)(\vartheta_2 - \vartheta_1)} = \frac{\tau}{\rho(U_2 - U_1)^2}, \tag{5.82}$$

其中U_1, U_2, ϑ_1和ϑ_2是两个任意高度处的评价速度和温度。根据这个关系式，整个恒流层（τ 和q 恒定）中的平均速度和平均温度一定严格成正比（正比系数等于$c_p\tau/q$）。所以得到$\varphi(z_+, \mathrm{Pr}) = \kappa f(z_+)$[故而$\varphi$不依赖于Pr]和$C = \kappa B$。将方程（5.81）和方程（5.20）结合，方程（5.77'）和方程（5.25）结合，容易确定这种正比性仅当$\chi = \nu$（即如果$\mathrm{Pr} = 1$）、$\alpha = 1$（即在对数层中$\mathrm{Pr}_t = 1$）以及

$$\frac{q}{c_p \frac{d\overline{\vartheta}}{dz}} = \frac{\tau}{\frac{d\overline{u}}{dz}}$$

（即在黏滞亚层和对数层之间的整个转换区中也有$\mathrm{Pr}_t = 1$）时成立。我们注意到，条件$\mathrm{Pr} = 1$对于空气和大部分其他气体只是近似满足（精度不超过20-30%），对于绝大多数液体根本不满足。另一方面，条件$\mathrm{Pr}_t = 1$对无旋速度和温度涨落施加了严格限制，这也是很少严格成立的。然而，写成这种形式的雷诺假设[或者更通常称为*雷诺类比*，考虑到方程

[14]我们已经注意到，在管中热输运的实际研究中，通常用整体速度U_m和整体温度ϑ_m代替U和$\overline{\vartheta}_1$。然而，我们不讨论这一点，因为如果我们知道基于$\overline{\vartheta}_1$和U的Nu和c_h的值，那么就容易得到基于$\overline{\vartheta}_m$和U_m的这些值，非常类似于5.5节中[参见方程（5.47）的推导]以及本小节中和图A 数据有关的论述。

（5.82）表示的热量流和动量流之间的相似性]

$$c_h = \frac{1}{2} c_f \tag{5.83}$$

是气体中很多湍流热交换实验结构好得惊人的描述，所以仍然广泛用于工程计算中。

雷诺类比的一个明显缺陷是，它忽略了分子普朗特数（在很多情形都明确起作用）对热交换的影响。方程（5.83）的一个简单推广目的是以某种方式考虑Pr的影响，这是Prandtl (1910, 1928)和G. I. Taylor (1916)独立提出的。根据他们的假设，可以假设在对数层中$\alpha = 1$，但在黏滞亚层中（延伸到$z = \alpha_v \frac{\nu}{u_*}$）我们必须使用严格的方程（5.20）和（5.81），即我们必须考虑系数ν和χ的真实值。对于转换区，这在普朗特-泰勒理论中是忽略掉的，即假设实际上对于$z > \alpha_v \frac{\nu}{u_*}$，对数方程（5.25）和（5.77）成立。所以对于$z_+ < \alpha_v$，函数$\varphi(z_+, \mathrm{Pr})$由方程（5.81）定义，对于$z_+ > \alpha_v$，由$\alpha = 1$的方程（5.77'）定义。特别地，在这个理论中，$C = \alpha_v \kappa \mathrm{Pr} - \ln \alpha_v$。然而，容易验证这个$C$值（$\alpha = 1$）对应于传热系数

$$c_h = \frac{\frac{1}{2} c_f}{1 + \alpha_v (\mathrm{Pr} - 1) \sqrt{\frac{c_f}{2}}}, \tag{5.84}$$

这是普朗特-泰勒理论的主要结果。对于$\mathrm{Pr} = 1$，方程（5.84）变得和方程（5.83）相同。然而，如果$\mathrm{Pr} \neq 1$（但不偏离1很远），那么合理选择α_v（例如，普朗特取$\alpha_v = 5.6$）可以给出比雷诺公式（5.83）更好的对实验数据的拟合。

普朗特-泰勒理论的一个进一步改进是von Kármán(1934, 1939)提出的，他在计算中引入了“转换层”$\alpha_v < z_+ < \alpha_l$（其中$\alpha_v = 5, \alpha_l = 30$，见上面的5.3节）。如我们已经看到的（在5.3节末），冯·卡门假设在这个转换层中苏菲分布也由（5.25）形式的对数方程给出，但是系数A和B的值不同。特别地，他取$A = \frac{2}{\kappa} \approx 5$，所以对于$5 < z_+ < 30$，$K = \frac{\kappa}{2} u_* z = 0.2 \nu z_+$。在平均温度分布[即函数$\varphi(z_+, \mathrm{Pr})$]的计算中假设了在$z_+ < 5$ 区域中满足方程（5.81），即只有分子热扩散起作用，在$5 < z_+ < 30$区域中，有分子和湍流热扩散，而$K_\vartheta = K$，也就是说$\frac{d\bar{\vartheta}}{dz} = \frac{q_0}{c_p \rho (\chi + 0.2 u_* z)}$，而对于$z_+ > 30$，系数$\chi$可以忽略，我们可以假设$\frac{d\bar{\vartheta}}{dz} = -\frac{q_0}{c_p \rho \cdot 0.4 u_* z}$（在这个理论中，对于$z > 5\nu / u_*$，$\mathrm{Pr}_t$取为每个地方都等于1）。在此基础上，容易得到整个范围的函数$\varphi(z_+, \mathrm{Pr})$[用三个不同的解析表达式定义]以及得到$C$的值。对于$c_h$我们得到

$$c_h = \frac{\frac{1}{2} c_f}{1 + 5 \left[(\mathrm{Pr} - 1) + \ln \frac{1 + 5\mathrm{Pr}}{6} \right] \sqrt{\frac{c_f}{2}}}. \tag{5.85}$$

对于$\mathrm{Pr} = 1$，这个方程再次变为方程（5.83），但Pr为十分之几（即，对于普通液体），它和实验数据符合得比普朗特-泰勒方程（5.84）好的多。然而，对于非常大或非常小的Pr值，方程（5.85）也严重偏离实验。

后来，很多作者提出大量新的c_h（或Nu）的半经验方程，见，例如5.3节末引用的工作，以及Ribaud (1961)、Kapitza (1947)、Sherwood (1950)、Levich (1951)、Reichardt (1951b)、Chapman, Kester (1953)、Deissler (1951, 1954)、Petukhov, Kirillov (1958)、van Driest (1959)、Spalding (1963, 1964)、W. Squire (1964)、Spalding, Jayatillaka (1965)、Kishenevsky (1965)和Dil'man (1967)的文章。在这些工作中可以找到更多参考文献。同样，在大部分这些工作中，对理论的基本改进是（在各种直觉或经验考虑的基础上）选择函数$\varphi(z_+, \mathrm{Pr})$更复杂的表达式，通常由一个$K_\vartheta = -\frac{q_0}{c_p \rho d\bar{\vartheta}/dz} - \chi$ 方程的形式给出。于是，分布$\bar{\vartheta}(z)$分布[即函数$\varphi(z_+, \mathrm{Pr})$]的计算和系数$c_h$的确定简化为一个积分（对于更复杂的理论必须数值积分）。Hatton (1964)、Dvorak, Head (1967)、Donovan, Hanna, Yerazunis (1967)和Patnakar, Spalding (1967)讨论了求解各种热输运和质量输运问题的数值方法。我

们在这里不讨论这些结果，它们基本上是纯工程的，我们只考虑物理上有趣的普朗特数非常大或非常小的特殊性质的传热问题。

在这两个极限情形，普朗特-泰勒理论和冯·卡门理论中的假设显然没有道理的：分子热扩散层的厚度可以估计为$\delta_v' = \alpha_v \frac{\nu}{u_*}$，其中$\alpha_v$是从平均速度分布的两个渐近曲线的交叉得到的，故而不依赖于Pr。让我们首先考虑非常小的普朗特数的情形，这是液态金属的主要性质（即贡和熔化的金属）。因为在此情形χ非常大，分子热扩散层比黏滞亚层厚很多，所以在整个对数平均速度分布区域中忽略χ一定会导致严重的误差。为了避免这些误差，很多研究者，特别是研究液态金属中湍流热交换理论的研究者[例如Martinelh (1947)、Lyon (1951)、Lykoudis, Touloukian (1958) 等]，没有忽略任何流动区域中的分子热扩散。实际上，这是不必要的，至少在整个半空间$z > 0$中的理想流动的情形是不必要的，但系数χ仍然起作用（即，和涡旋扩散系数K_ϑ）的层的厚度δ_v'对于$\mathrm{Pr} \ll 1$必须借助关系式$\delta_v' u_* \sim \chi$估计（因为对于$z \gg \nu/u_*$，$K \sim u_* z$，K_ϑ量级和K相同）。所以，例如，在简化的“两层”普朗特-泰勒理论中，对于$\mathrm{Pr} \ll 1$我们必须假设对于$z_+ < \beta_v \frac{\chi}{\nu} = \frac{\beta_v}{\mathrm{Pr}}$（其中$\beta_v$显著不依赖于Pr，和黏滞亚层的无量纲厚度$\alpha_v$量级相同），$\varphi(z_+, \mathrm{Pr})$ 由方程（5.81）给出，对于$z_+ > \frac{\beta_v}{\mathrm{Pr}}$，由方程（5.77’）给出，故而，$C = \kappa\beta - \alpha \ln \frac{\beta_v}{\mathrm{Pr}}$。在此基础上容易计算传热系数$c_h$。Levich (1962)进行了这个计算，取$\beta = 11.7$，$\alpha = 1.2$。尽管计算中使用了粗略的假设，但由此得到的方程和很多管中液态金属湍流传热的数据对应得非常好。

$C(\mathrm{Pr}) = C_1(\mathrm{Pr}) - C_2 \approx C_1(\mathrm{Pr}) - 0.3$的表达式也可以直接带入方程（5.80’）的$c_h$。Kader, Yaglom (1970)使用了这个方法[他们取$\alpha = 1.1$和相对小的β_v值]，在引入用$\overline{\vartheta}_m$替代$\overline{\vartheta}_1$ 的修正后（即从c_h转换为C_h），他们得到对很多汞和钠钾合金（二者都有$\mathrm{Pr} = 0.025$）管流中相对精确的传热数据的相对好的描述。

$\mathrm{Pr} \gg 1$的第二种极限情形在工业用油中传热或液体中外加物扩散的研究中碰到，这要复杂得多。在此情形，热扩散亚层比黏滞亚层薄得多，于是，即使对于$z \ll \nu/u_*$，热输运（或外加物输运）主要由涡旋扩散决定。同时，对湍流的定量理解在$z \le \nu/u_*$是最缺乏的，那里分子黏滞仍然起了重要作用。因为目前还没有办法独立确定这个区域中两个函数$f(z_+)$和$\varphi(z_+)$的行为，所以通常假设对于$z \le \nu/u_*$，系数K和K_ϑ要么严格相等，那么只相差一个常数因子α（或多或少任意从数据选择或粗略地从数据估计）。所以，$\mathrm{Pr} \gg 1$的湍流传热简化为研究湍流剪切应力$-\rho\overline{u'w'}$[或者等价地，函数$f(z_+)$]在$z \ll \nu/u_*$（即$z_+ \ll 1$）的渐近行为，由于这个原因很多工作致力于这个研究（见5.3节末）。现在让我们假设$z \to 0$时$K \sim K_\vartheta \sim z^m$（即$|\overline{u'w'}| \sim |\overline{\vartheta' w'}| \sim z^m$，以及$|f(z_+) - z_+| \sim |\varphi(z_+, \mathrm{Pr}) - \kappa \mathrm{Pr} \cdot z_+| \sim z_+^{m+1}$）。因为黏滞亚层的厚度$\delta_v$由条件$K(\delta_v) \sim \nu$定义，而热扩散亚层的厚度$\delta_v'$由条件$K_\vartheta(\delta_v') \sim \chi$定义，在此情形，考虑到

$$\delta_v' \sim (\mathrm{Pr})^{-\frac{1}{m}} \delta_v \sim (\mathrm{Pr})^{-\frac{1}{m}} \frac{\nu}{u_*},$$

这是很显然的。$\overline{\vartheta}(z)$的分布仅在$z > \delta_v$可以令人满意地用线性方程（5.81）描述。在$\delta_v' < z < \delta_v$层中，方程$-q_0 = c_p \rho K_\vartheta \frac{d\overline{\vartheta}}{dz} \sim z^m \frac{d\overline{\vartheta}}{dz}$的解给出这个分布合理的一级近似（故而$\overline{\vartheta}(z) =$常量$- cz^{-m+1}$），而对于$z > \delta_v$，它转换为对数分布（5.77）。这些结果可以解析地从简化的两层的普朗特-泰勒模型得到，如果我们假设对于$z_+ \le \beta_v$，$K_+ = K_\vartheta/\nu = \alpha_1 z_+^m$，对于$z_+ \ge \beta_v$，$K_+ = \alpha\kappa z_+$（其中$\beta_v$由匹配条件$\alpha_1 \beta_v^m = \alpha\kappa\beta_v$定义），并且在$z_+ \le \beta_v$（即$z < \delta_v$）时考虑分子扩散系数$\chi$。于是$z < \beta_v \nu/u_*$的方程$-q_0 = c_p\rho(\chi + K_\vartheta)\frac{d\overline{\vartheta}}{dz}$可以转换为

$$\frac{d\overline{\vartheta}_+}{dz_+} = \frac{\mathrm{Pr}}{1 + \mathrm{Pr}K_+}, \text{其中} \overline{\vartheta}_+ = -\frac{c_p \rho u_* \overline{\vartheta}}{q_0} = \frac{\overline{\vartheta}}{\kappa\theta_*}.$$

实际上，我们要处理一个三层模型，因为这个方程的解对Pr的幂级数展开在$\mathrm{Pr}K_+ =$

$\alpha_1 z_+^m \mathrm{Pr} < 1$区域和$\mathrm{Pr}K_+ = \alpha_1 z_+^m \mathrm{Pr} > 1$区域具有不同的形式。在$z_+ < (\alpha_1 \mathrm{Pr})^{-1/m}$和$z_+ > (\alpha_1 \mathrm{Pr})^{-1/m}$层中求解这个方程，把两个解在$z_+ = (\alpha_1 \mathrm{Pr})^{-1/m}$连接起来，第二个解在$z_+ = \beta_v$具有对数分布，仅保留Pr幂级数展开中的领头项，我们容易得到下面的$\mathrm{Pr} \gg 1$时的传热系数渐近方程：

$$c_h = \frac{\sqrt{c_f/2}}{B_1 \mathrm{Pr}^{(m-1)/m}} \sim (\mathrm{Pr})^{\frac{m-1}{m}} \tag{5.86}$$

[参见Levich (1962)；推导这个方程的方法用的是Kader (1966)的方法]。这里，B_1是一个正比于$\alpha_1^{-1/m}$的无量纲常量，根据Kader的文章

$$B_1 = \alpha_1^{-1/m} \left[1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(mk)^2 - 1} \right].$$

然而，关于指数m的值，目前有一些分歧，如我们已经看到的。我们已经看到，根据连续性方程，我们必须取$m \geq 3$。如果我们取$m = 3$，于是根据方程（5.86），

$$c_h \sim (\mathrm{Pr})^{-\frac{2}{3}} \text{在} \mathrm{Pr} \gg 1.(5.86')$$

$m = 3$的假设使得Murphree (1932)可以得到一个c_h的方程，给出了气体、水和工业用油（普朗特数达到1000）流中所有传热数据很好的描述。后来Ribaud (1941)得出了类似的结论。关系式（5.86'）是Chilton, Colbum (1934)纯经验地得到的，他们研究了液体中的质量输运（没有参考热输运的工作）。后来，这被很多其他研究者证实，其中我们必须提到Lin, Denton et al. (1951)，他们仔细地测量了电化学反应（普朗特数从300变化到3000）中的质量输运速率。在20年代50年代初，$m = 3$的假设再次开始被广泛用于理论工作中[例如Reichardt (1951a)和Lin, Moulton, Putnam (1933)关于湍流质量输运的研究]。同样的假设被用于Petukhov, Kirillov (1958)、Wasan, Wilke (1964)、Dil'man (1967)和其他人关于热输运和质量输运的工作中。然而，Rannie (1956)成功使用关系式$m = 2$和$c_h \sim (\mathrm{Pr})^{-1/2}$相当好地描述了$\mathrm{Pr} \leq 120$的传热实验数据，Kishinevsky (1965)尝试证明了这些关系式甚至可以用于描述相当宽范围Pr的质量输运数据。Frank-Kamenetskiy (1967)[在他1947年书的第二版中]假设方程$c_h \sim (\mathrm{Pr})^{-1}$[对应于$K = K_\vartheta \equiv 0$的纯层流亚层模型；参见方程（5.84）和（5.85）]甚至可以用于10^3 量级的Pr （然而，他仅用了三个普朗特数的值作为其假设的基础）。同时，很多其他人[例如Levich (1944, 1951, 1959)、Deissler (1955, 1959)、Loitsyanskiy (1960)、Son, Hanratty (1967)]倾向于假设$m = 4$，于是

$$c_h \sim (\mathrm{Pr})^{-\frac{3}{4}} \text{对于} \mathrm{Pr} \gg 1.$$

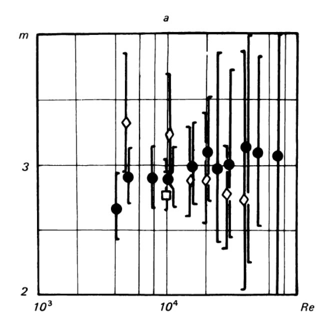
他们证明了这个结果也给出了对很多已有的Pr值高达4000的湍流热输运和质量输运数据完全令人满意的描述。我们已经在5.3节注意到在Spalding (1961, 1964)和其他工作中提出了两个不同方程：一个$m = 3$，第二个$m = 4$。在这个课题的旧文献中，也可能找到对应于$m = 5$[Reichardt (1951b)]，甚至$m = 6$[Hofmann (1937)]的方程。

大量相互矛盾的理论方程都有看似都有令人满意的实验验证，者可以有几种解释。首先，所提出的每个方程都包含额外的未知参数，以得到和实验数据的最佳符合。同时，所有已有数据的弥散非常大，因为很多因素使得热输运和质量输运的精确实验非常困难。其次，大部分研究者使用了相对有限范围普朗特数的数据并且使用了不同的数据处理技术，在某些情形有明显缺陷。最后，主要的方程（5.86'）和（5.86"）中的指数2/3和3/4仅相差1/12，非常小，难以在实验室实验中可靠地探测。所以并不奇怪，同样的数据被不同研究者用于支持各个理论方程。很明显，这个问题的最终解决迫切需要在完全受控条件下针对非常宽范围

的Pr非常仔细的广泛测量，使得可以进行统一和精确的统计处理。

伊利诺伊大学的Hanratty和他的合作者发展了一种特别的电化学技术来测量非常靠近避免的各种湍流特征量[见，例如Mitchell, Hanratty (1966)和Hanratty (1967)，在那里可以找到更多参考文献]。这个技术被特别用于测量从壁面到流体的质量输运速率。所有在普朗特（或者更准确地，施密特）数范围400-2000内得到的结果由Son, Hanratty (1967)以相当的精度用方程$K_+ = K_\vartheta/\nu = 0.00032z_+^4$（对应于$m = 4$的假设）描述。然而，在非常广泛的施密特数范围内质量输运的最广泛和最精确的均匀数据可以在Hamilton (1963)的三篇论文中找到[也参见Harriott, Hamilton (1965)、Hubbard (1964)、Hubbard, Lightfoot (1966)、Kader (1969)和Gukhman, Kader (1969)]。在这些工作的第二个中，质量输运通过电化学反应中阴极上特定离子的扩散控制还原来研究，即Lin, Denton et al. (1951)发展并且后来由Hanratty等人大幅改进的电化学技术。这些在施密特数从1700到30000测量得到的结果和$m = 3$的方程（5.86）[即方程（5.86'）]符合得非常好。在Hamilton的工作和Kader的工作中使用了不同的方法，即，测量当水或甘油水溶液在管中循环时，由苯甲酸或有关物质制成的特殊可溶性管段的溶解速率。Hamilton的观测是在施密特数430到10^5进行的，Kader的观测在施密特数500到10^6。两位作者的这些结果显然和方程（5.86"）矛盾，而和方程（5.86'）接近得多。

继Hubbard (1964)和Hamilton (1963)之后，Donovan, Hanna, Yerazunis (1967)得出结论，方程（5.86）中必须取$m = 3$。Kader (1966, 1969)和Gukhman, Kader (1969)对这个课题的所有已有数据进行了细致的统计处理。这些作者在不同实验中使用的每个特定雷诺数（或更精确地说，在很多Re值的小区间）确定了方程（5.86）中两个参数B_1和m的非线性最小二乘估计[即，使方程（5.86）右边和中间的差的平方和最小的B和m值]。这种处理的结果收集在图Ia和b中（在图Ia中引用了三项最广泛的研究，在图1b中可以找到26项处于各种Pr和Re的热输运和质量输运的数据）。我们看到这些结果明确支持$m = 3$的假设。



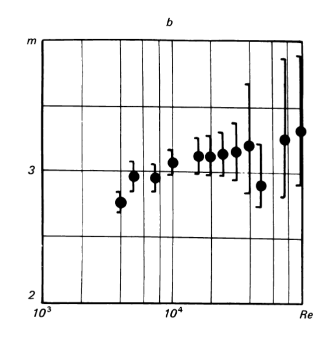


图 43 I. Kader从热输运和质量输运数据得到的指数m的经验值（对应于90%的置信度）。a-从Hamilton（□）、Hubbard（⋄）和Kader（·）的数据得到的结果，b- 对从26个不同实验工作中取得的更广泛的数据集处理得到的结果。

$m = 3$和$B_1 = 12.5$的方程（5.86）是$C_3(\mathrm{Pr}) = 12.5\mathrm{Pr}^{2/3} + (\ln \mathrm{Pr})/\kappa\alpha - 5.0 - \ln 2/2\kappa\alpha$（这个方程对应于一个简单的两层模型，$C_3$表达式的常数项根据$\mathrm{Pr} = 0.7$的数据（图A中的实线基于此）来选择。）的更精确方程（5.80'）的渐近形式（对于$\mathrm{Pr} \gg 1$）。使用具有这种$C_3(\mathrm{Pr})$的方程（5.80'）的这些计算结果（通过考虑从系数c_h变换为系数C_h进行修正，即从方程（5.80'）变换为方程（5.80"），这仅在$\mathrm{Pr} < 10$重要，写成了$\mathrm{Nu} = C_h\mathrm{Re}_D\mathrm{Pr}$依赖于$\mathrm{Re}_D$的形式）展示在图B中，包括了一个广泛范围的普朗特数和雷

诺数，和32个来源的大量湍动管流中热输运和质量输运数据进行了比较。计算和数据直接很好的符合同时表明了$B = 12.5$和$m = 3$的渐近方程（5.86）的正确性。

当使用了$m = 3$的假设，根据Kader，方程（5.86）中常数B_1对所有已有数据的最小二乘估计为$B_1 = 12.5$。根据联系B_1 和α_1的方程，这个B_1的出版估计对应于$\alpha_1 = 0.001$。我们看到，所得到的α_1和5.3节末基于一个完全不同的基础给出的同样的系数α_4精确符合。这种符合显然使得两个估计都更可靠。

当然，所有上面的讨论仅和光滑壁面附近的热输运和质量输运的情形有关。在热（或质量）输运系数（即斯坦顿数）的情形，$c_h = \mathrm{Nu}/\mathrm{RePr}$需要差$\vartheta_1 - \vartheta_0$的演化，$\overline{\vartheta}$在下层（厚度和壁面的不规则结构的平均高度$h_0$相当）中的变化有相当大的贡献。为了描述这个贡献，Owen, Thompson (1963)提出把完全粗糙流动的最低粗糙层中$\overline{\vartheta}(z)$的变化表示为

$$\Delta_{h_0}\overline{\vartheta} = \kappa\theta_* B,$$

其中B式一个无量纲量，对于给定形式和排列方式的壁面不规则性，仅依赖于粗糙性雷诺数$h_0 u_*/\nu$和普朗特数（或施密特数）Pr。对于对数层中的z，差$\overline{\vartheta}(z) - \vartheta_0$在此情形可以用这个方程估计：

$$\overline{\vartheta}(z) - \vartheta_0 = \frac{\theta_*}{\alpha}\ln\frac{z}{z_0} + \kappa B,$$

其中z_0是通常的粗糙性参数。使用Nunner (1956)的数据，Dipprey [见Dpprey, Sabersky (1963)]他们自己的数据和其他人的数据，Owen, Thompson 得到了经验关系

$$B = c^{-1}(h_0 u_*/\nu)^{-k}\mathrm{Pr}^{-n},$$

其中当h_0替换为等价的沙子粗糙度h_s时，常数c, k和n的值分别近似为$0.5, 0.45$和0.8。关于函数B值的额外信息可以在Chamberlain (1966, 1968)的工作中找到，他进行了特殊的风洞实验，也收集了野外条件下质量输运的数据（有一些是他自己的）。

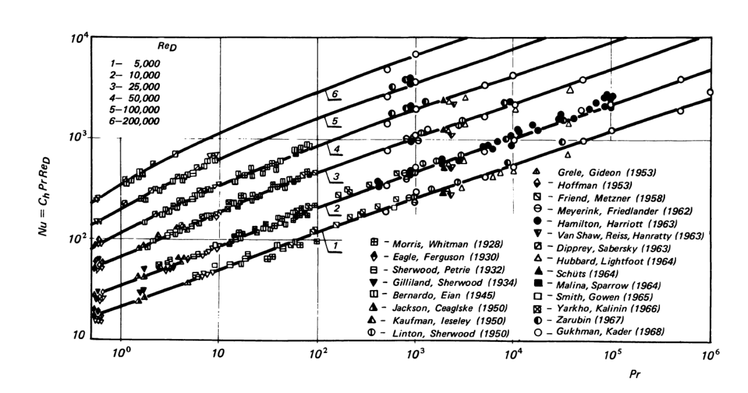


图 43 B. 圆管中各种热输运和质量输运测量得到的$\mathrm{Nu} = C_h\mathrm{PrRe}_D$对Pr和$\mathrm{Re}_D$的依赖的数据和基于方程（5.80’）计算结果的比较[根据Kader, Yaglom (1970)]。

5.8 自由湍流

到目前为止，我们已经考虑了渠、管和边界层中的湍流，即靠近刚性

壁面的流动，其上的摩擦导致持续产生涡度，对整个流动产生相当大的影响。然而，在自然中和技术中，我们通常碰到一种完全不同类型的湍流，其中没有任何刚性壁面的直接影响，所以被称为*自由湍流*。最重要的自由湍流类型是放置于恒定速度流动中的（或在静止流体中运动的）刚体后方的湍动尾流、湍动喷流和（产生于其间没有任何刚性壁面的不同速度流动之间边界上的）湍流混合层。

自由湍流在很多自然现象和很多工程设备中起到了很多作用。所以毫不奇怪人们对其进行了大量理论和实验研究。这些研究产生了很多对实际计算有用的结果，但它们几乎没有增加我们对湍流的物理本质的理解。因此，我们在这里仅对与上述基本类型的自由湍流有关的一些一般推论进行简单的研究。

描述自由湍流的已知方法首先基于相应流动的某些自守性（self-preservation）假设，其次是基于更特别的半经验假设。自守性假设通常可以借助一般的相似性和量纲论证来论证。这些考虑都有明确的物理意义。然而，自由湍流的半经验理论除了一般物理学定律，还使用了一些更具推测性的假设。这样得出的推论主要对实际应用重要。从此之后，我们将在本节中仅限于对自由湍流自守性假设的分析。

首先，我们用一个特殊的例子来解释自由湍流自守性的一般想法，即从直径D的细管末端沿Ox方向喷射到充满相同流体的无限空间中的三维湍动喷流。让我们比较不同截面$x=$ 常量的流体动力学变量。观测表明，一般来说，可以认为湍动喷流是相对窄的。所以喷流中平均速度的纵向分量远超过横向分量，而流体动力学变量的统计特征的纵向变化比横向变化小。在此基础上自然可以预期，喷流给定截面的流场性质将在一定程度上再现上游截面的相应性质。换句话说，一定可以预期喷流在不同截面（即x值不同）的流体动力学变量的统计特性将彼此相似。这意味着在每个截面$x=$ 常量，我们可以分别引入一个特征长度和特征速度标度$L(x)$和$U(x)$，使得用这些标度得到的无量纲统计特征量在所有截面都相同。当然，这种相似性不会在喷流喷出的喷口后马上出现。它只有在距离喷口（和直径D相比）足够远的地方才可能，在那里，其大小和形式不再影响喷流中的流动。此外，为了有相似性，在所考虑的喷流的截面中，雷诺数$\mathrm{Re}=\frac{U(x)L(x)}{\nu}$足够大才能保证存在充分发展的湍流（以及类似的湍流大尺度分量不依赖于黏性的统计特性，这导致了喷流相邻流场之间的相互作用，这是这些流场相似性的物理基础）。

这一相似性假设是5.5节讨论的雷诺数相似性一般原理的另一个应用。也可以借助与5.3节中（推导壁面附近但在黏滞亚层之外的平均速度分布的对数方程时）使用的那些考虑有关的简单考虑得出。实际上，在当前

三维淹没射流的情形下，流动依赖于喷口直径D、射流初速度U_0和流体参数ν和ρ。所以按照量纲考虑，流动的统计特性，例如，平均速度$\overline{u}$或雷诺应力$\rho\overline{u'w'}$（这里w'是以Ox为轴的柱坐标(r,φ,x)中的径向涨落速度）一定由这种形式的方程给出：

$$\overline{u} = U_0 f_1\left(\frac{x}{D},\frac{r}{D},\varphi,\mathrm{Re}_D\right),$$
$$-\rho\overline{u'w'} = \rho U_0^2 g_1\left(\frac{x}{D},\frac{r}{D},\varphi,\mathrm{Re}_D\right),\text{其中}\mathrm{Re}_D = \frac{U_0 D}{\nu}. \tag{5.87}$$

在距离喷口足够远的距离，这些特征量实际上不再依赖于x/D。这意味着当x/D足够大，我们可以简单地在方程（5.87）中写$x/D=\infty$。这是方程（5.87）右边在$x/D\to\infty$时趋向于一个极限这个假设的推论。然而，一般来说，自然的是假设对于足够大x/D的“初始条件”U_0和D只能通过射流的“初始动量”（这决定了随x增大缓慢变化的流动的积分特征量在$x=$ 常量截面的值[即，射流轴上的特征速度$U_{\max}=U(x)$和射流的半宽$L=L(x)$，等于$\overline{u}(r,0,x)=\frac{1}{2}U_{\max}(x)$的$r$值]）得到。平面$x=$常量 附近的整个统计流在某种程度上会随$U$ 和L 变化。因此，对于大的x/D值，射流现在可以认为是轴对称的，因为φ依赖只能由喷口的形式决定，方程（5.87）在此情形可以写为

$$\overline{u} = U(x)f_2\left[\frac{r}{L(x)},\mathrm{Re}_x\right],\overline{u'w'} = -U^2(x)g_2\left[\frac{r}{L(x)},\mathrm{Re}_x\right], \tag{5.88}$$

其中

$$\mathrm{Re}_x = \frac{U(x)L(x)}{\nu}.$$

最后，对于足够大的Re_x我们可以在方程（5.88）中令$\mathrm{Re}_x=\infty$，因为对于充分发展的湍流，涡黏滞总是远超过分子黏滞，参数ν不起任何作用。这正是雷诺数相似性原理。于是，对于足够大的x/D值和Re_x值

$$\overline{u} = U(x)f\left[\frac{r}{L(x)}\right],\overline{u'w'} = -U^2(x)g\left[\frac{r}{L(x)}\right], \tag{5.89}$$

其中$f(r)$和$g(r)$是普适函数。这些关系式表达了射流中流动的自守性假设。此外，我们注意到，与刚性壁面存在时的湍流不同，在这种情况下在整个湍流区域都会有自守性。（但和“壁面”湍流情形一样，它只和与能量的黏滞耗散无关的运动大尺度成分有关。）

把方程（5.89）带入雷诺方程可以得到函数$L(x),U(x),f(r)$和$g(r)$之间

的重要联系。在稳态轴对称运动的情形，忽略含有黏滞系数的项，容易证明雷诺方程简化为一个方程

$$\overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\overline{w}\frac{\partial\overline{u}}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\overline{u'w'})-\frac{\partial}{\partial x}(\overline{u'^2}-\overline{w'^2}) \tag{5.90}$$

[见，例如，Townsend (1956)]。$\frac{\partial}{\partial x}(\overline{u'^2}-\overline{w'^2})$项这里描述了通常的湍流应力和纵向压强梯度的作用；通常它比其他项小得多（在任何情形，在流动的中心部分），经常被简单地忽略。于是，我们得到

$$\overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\overline{w}\frac{\partial\overline{u}}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\overline{u'w'}), \qquad (5.90')$$

这是几乎所有和湍动射流有关的理论研究的基础。借助平均运动的连续性方程

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\overline{w})}{\partial r}=0 \tag{5.91}$$

可以从方程（5.90’）中消去径向速度$\overline{w}$。然而，我们必须首先注意到，方程（5.90）乘以r并对r从0到∞ 积分，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \overline{u}^2 r dr=0, 即\int_0^\infty \overline{u}^2 r dr=M=常量. \tag{5.92}$$

（这个方程表达了动量守恒定律，即，通过任意足够大球面的动量流等于喷口附近中心的动量流）。现在带入方程（5.89）的第一个方程，我们发现

$$U^2L^2\int_0^\infty f^2(\eta)d\eta=常量.$$

于是，UL（以及雷诺数$\mathrm{Re}_x=UL/\nu$）不可能依赖于x。所以$U\sim 1/L$。考虑这个结果并把方程（5.89）带入方程（5.90’）和（5.91），容易看到这些方程不可能是对的，如果$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}\neq$ 常量。当然，同样的结果也可以从更一般的方程（5.90）得到。

所以，我们发现自守性仅当

$$L(x)\sim x-x_0, U\sim(x-x_0)^{-1} \tag{5.93}$$

是可能的，其中x_0是积分常数。这里，$x=x_0$扮演了一个虚拟“射流原点”的角色。因为我们仅对非常大x值的渐近定律感兴趣，所以在这里和下面，我们简单假设$x_0=0$。根据方程（5.93），在距离喷口足够远的距离，

射流的宽度正比于距离地增大，也就是说射流具有圆锥的形式，二射流中流动的平均速度反比于距离地减小。我们进一步注意到，通过射流截面的流体量为$2\pi \int_0^\infty \overline{u} r dr$，即它正比于$x$增长。这表明射流在不断从周围不运动的介质中带走流体。

在条件（5.93）下，方程组（5.90'）-（5.91）具有无穷多个（5.89）形式的解。实际上，这个方程组使得我们可以得到仅仅一个联系两个未知函数$f(\eta)$和$g(\eta)$的关系式，具有这种形式

$$g(\eta) = \frac{Af(\eta)}{\eta} \int_0^\eta \eta_1 f(\eta_1) d\eta_1, A = \text{常量}$$

[见，例如Squire (1948)]。如果我们使用更一般的方程（5.90），情况会更糟。这里我们只得到一个含有四个未知函数的关系式[见Townsend (1956)]。完全确定所有未知函数需要引入更多假设。在很多工作中，为此使用了各种半经验湍流理论，见，例如，Tollmien (1942)和Görtler (1942)的经典论文和shih-i Pai (1954)、Hinze (1959)、Abramovich (1963)和Vulis, Kashkarov (1965)的书。

当然，由雷诺方程只能得到，为了实现自守性条件（5.89），标度U和L必须满足方程（5.93），但不能得到自守性条件一定满足。由于上面给出的一般性考虑（如我们下面将要看到的，这也可以从标准的量纲分析得到），自守性似乎是可能的。然而，它只能在数据分析的基础上确定地得到。对于进入充满静止流体空间的射流，方程（5.89）和（5.93）已经被很多研究者通过实验验证[见，例如，Reichardt (1942)、Corrsin (1943)、Hinze, Van der Hegge Zijnen (1949)、Corrsin, Uberoi (1950)、Corrsin, Kistler (1954)、Forstall, Gaylord (1955)和Hinze (1959)、Abramovich (1963)、Vulis, Kashkarov (1965)的综述]。可以发现，甚至在距离喷口非常小的距离（$x > 8D$），方程（5.89）和（5.93）都很好地描述了平均纵向速度$\overline{u}(x, r)$的分布。然而，平均速度分布和速度涨落的二阶矩完整的自守性肯定只能在射流更远处的截面建立（$x > 50D$）。也观察到了分布对雷诺数$\mathrm{Re} = \frac{U_0 D}{\nu}$的依赖，这种依赖随着Re增大而变弱，对于$\mathrm{Re} \gtrsim 10^5$就看不到了。例如，图44给出（根据Reichardt的数据）射流三个截面的速度分布，通过除以$U_{\max} = U$归一化，和无量纲距离（通过一个满足$\overline{u}(L) = \frac{1}{2} U_{\max}$的长度标度$L$得到）相联系。我们看到这个分布的相似性是完全令人满意的。

自守性的类似假设也可以对其他特定类型的自由湍流写出。然而，我们这里只考虑从位于Oyz平面上沿Oy轴的无穷长狭缝射入空间$x > 0$，沿Ox 方向的平面湍动射流；放置在沿Ox方向的均匀流动中原点附近的

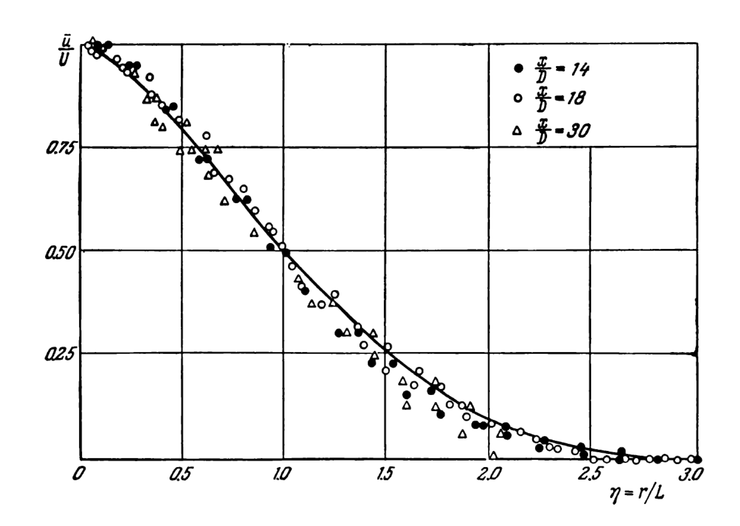


图 44 在轴对称射流的三个不同截面，归一化的平均速度u/U对$\eta = r/L$的依赖[根据Reichardt (1942)的数据]。

有限大刚体后的三维湍动尾流；放置在沿Ox方向的流动中，轴沿Oy 方向的无穷长圆柱后的平面湍动尾流；最后，半空间$z > 0$和$z < 0$中沿Ox方向的两个平面平行流（在初始截面Oyz具有恒定但不同的速度，例如对于$z > 0$为U_1，对于$z < 0$为U_2）之间的混合层。在刚体后尾流的情形，转换到随未扰动流运动的惯性坐标系是自然的（即，仅考虑尾流动速度对未扰动速度的偏离，在远离这个刚体的地方衰减）。然而，对于混合层，有用的是选择满足$U_2 = -U_1$条件的坐标系。在此情形，对于提到的所有流动，预期对于足够大的雷诺数，足够大距离x处的平均速度分布和湍动应力分布一定可以写为（5.89）的形式，其中r是横向坐标（对于三维流动是距离Ox的距离，对于平面流是距离平面$z = 0$的距离），w 是横向速度。长度标度$L(x)$和速度标度$U(x)$将总是正比于与虚拟原点纵向距离x的某个幂次，也就是说

$$L(x) \sim x^m, U(x) \sim x^{-n} \tag{5.94}$$

（故而雷诺数$\mathrm{Re}_x = \frac{U(x)L(x)}{\nu}$正比于$x^{m-n}$）。指数$m$和$n$可以像上面一样，从这些函数为雷诺方程（忽略分子黏滞）的严格解的要求确定。在障碍后方尾流的情形，方便的是使用这个事实对雷诺方程进行初步简化：在距离物体很远的地方，尾流中的平均纵向速度$\overline{u}$会比流动的恒定速度U_0（等于尾流外为扰动的速度）略小。所以$\overline{u} = U_0 - \overline{u}_1$，其中$U_0 =$ 常量，$\overline{u}_1 \ll U_0$，平均横向速度$\overline{w}$ 的量级不会超过$\overline{u}_1$。所以，例如，在三维尾流的情形，在

很大的距离x的雷诺方程可以近似写为

$$-U_0\frac{\partial \overline{u}_1}{\partial x}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\overline{u'w'}), \tag{5.95}$$

于是，在此情形

$$\int_0^\infty \overline{u}_1 r dr = N = 常数. \tag{5.96}$$

对所有这些类型的自由湍流的进一步考虑完全类似于自由湍动射流。得到的结果在下面的表中给出。[也参见Squire (1948)、Schlichting (1960)、Schubauer, Tchen (1959)。]如表中所见，我们提到的自由湍流类型之间最重要的不同包括雷诺数$\mathrm{Re}_x=\frac{U(x)L(x)}{\nu}$对距离$x$依赖的类型。在平面尾流中，和三维射流一样，Re不随距离变化。然而，平面尾流中的流动和三维射流的不同在于自我调整的速度[根据Townsend (1956)，圆柱后平面尾流中完全的自守性在$x>(500-1000)D$ 的距离才建立起来，其中D是圆柱直径]。在平面射流和混合区中，Re随x的增大而增大。在三维尾流中，Re随距离减小，故而对于足够大的x，湍流一定衰减。当然，在这些距离，自守性假设不再成立。关于这些流动的讨论，见，例如Shih-i Pai (1954)、Townsend (1956)、Birkhoff, Zarantonello (1957)、Hinze (1959)、Abramovich (1963)和Vulis, Kashkarov (1965)。

	三维射流	二维射流	三维尾流	二维尾流	混合层
m	1	1	1/3	1/2	1
n	1	1/2	2/3	1/2	0
$m-n$	0	1/2	-1/3	0	1

现在必须注意自由湍流的另一种变体，热效应造成的垂向湍动射流，这是由于被加热的物体上方浮力的作用导致的。Zel'dovich (1937)首先考虑了这种射流的自守性假设。如果和上面一样，取射流中的流动方向（即垂直方向）为Ox轴，那么这些假设包括，在射流的每个截面$x=$常量有可能引入长度标度$L(x)$、速度标度$U(x)$和温度标度$\Theta(x)$，使得由这些标度得到的流场无量纲平均特征量在所有截面都相等。特别地，方程（5.89）和类似的平均温度和径向湍动热流$c_p\rho\overline{w'T'}$的方程

$$\overline{T}=\Theta(x)f_1\left[\frac{r}{L(x)}\right], \overline{w'T'}=-U(x)\Theta(x)g_1\left[\frac{r}{L(x)}\right] \tag{5.97}$$

适用（其中w'是以Ox为轴的圆柱坐标系中的径向速度涨落）。把方程（5.89）和（5.97）带入1.5节的布西涅斯克方程平均得到的雷诺方程，并且忽略含有分子黏滞和热扩散的项（但不忽略描述浮力的项）我们得到[使用

类似方程（5.93）的推导]

$$L(x) \sim x, U(x) \sim x^{-1/3}, \Theta(x) \sim x^{-5/3}. \tag{5.98}$$

类似的考虑可以应用到出现在沿Oy轴放置于平面$x = 0$中被加热的圆柱体上方的二维对流射流。在此情形，我们得到

$$L(x) \sim x, U(x) = 常量, \Theta(x) \sim x^{-1}. \tag{5.99}$$

（Zel'dovich也得到了这些方程。）

我们进一步注意到，上表中收集的大部分结果以及方程（5.98）和（5.99）也可以简单地从某些量纲的考虑得到。例如，对于三维射流，在大距离x处的所有平均特征量除了依赖于距离x，仅依赖于密度ρ和单位时间从喷口喷出的流体的总动量$2\pi\rho M$。所以，可以得到

$$\overline{u} \sim \frac{M^{1/2}}{x} f\left(\frac{r}{x}\right), -\overline{u'w'} \sim \frac{M}{x^2} g\left(\frac{r}{x}\right) \tag{5.100}$$

[和方程（5.93）完全相符]。对于平面射流，必须考虑单位时间从单位长度狭缝中喷出的流体的动量$\rho M_1 = \rho \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{u}^2 dz$，而不是$2\pi\rho M$。于是

$$\overline{u} \sim \frac{M_1^{1/2}}{x^{1/2}} f\left(\frac{z}{x}\right), -\overline{u'w'} \sim \frac{M_1}{x} g\left(\frac{z}{x}\right) \tag{5.101}$$

（和表的第二列一致）。量纲分析应用到平面混合区更简单。这里，截面$x =$ 常量上的条件仅依赖于x和速度差$U_1 - U_2 = 2U_1 = U_0$。所以，例如

$$\overline{u} \sim U_0 f\left(\frac{z}{x}\right). \tag{5.102}$$

在自由对流射流的情形，所有平均特征量可以依赖于沿射流的总热流

$$Q = 2\pi c_p \rho \int\limits_0^{\infty} \overline{u'T'} r dr$$

或单位被加热的圆柱的热流

$$Q_1 = c_p \rho \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{u'T'} dz$$

和浮力参数$g\beta$（对于理想气体等于g/T_0）。这里Q和Q_1自然只能以组合$Q/c_p\rho$和$Q_1/c_p\rho$出现。所以，对于三维对流射流，

$$\overline{u} \sim \left(\frac{g\beta Q}{c_p\rho x}\right)^{1/3} f_1\left(\frac{r}{x}\right), T \sim \left(\frac{Q}{c_p\rho}\right)^{2/3} (g\beta)^{-1/3} x^{-5/3} g_1\left(\frac{r}{x}\right), \qquad (5.103)$$

对于平面对流射流，

$$\overline{u} \sim \left(\frac{g\beta Q_1}{c_p\rho}\right)^{1/3} f_1\left(\frac{z}{x}\right), T \sim \left(\frac{Q_1}{c_p\rho}\right)^{2/3} (g\beta)^{-1/3} \frac{1}{x} g_1\left(\frac{z}{x}\right). \qquad (5.104)$$

很明显，这些结果和方程（5.98）和（5.99）一致。

只有在尾流的情形会更复杂，因为除了施加在物体上总的阻力

$$F = 2\pi\rho U_0 N = 2\pi\rho U_0 \int_0^\infty \overline{u}_1 r dr$$

或单位圆柱长度的阻力

$$F_1 = \rho U_0 N_1 = \rho U_0 \int_0^\infty \overline{u}_1 dz$$

（它决定了尾流中的“动量缺”），在这个问题的条件中还有另一个有量纲的量，即未扰动的速度U_0。所以在此情形，（5.100）-（5.102）类型的方程不能只基于量纲分析推导。然而，借助更特殊的考虑，可以不必求解精确方程式而得到这些结果。具体来说，我们使用了这个事实，尾流中的平均流动流线相对Ox轴倾角的正切等于$\frac{\overline{w}}{\overline{u}} = \frac{\overline{w}}{U_0 - \overline{u}_1} \approx \frac{\overline{w}}{U_0}$。所以我们可以得出结论，如果$L(x)$是尾流的特征宽度，并且$U = U(x)$是速度$\overline{u}_1$和$\overline{w}$的特征标度，那么

$$\frac{dL}{\mathrm{d}x} \sim \frac{U}{U_0}. \qquad (5.105)$$

但是因为

$$N = \int_0^\infty \overline{u}_1 r \mathrm{d}r$$

在三维尾流的情形是常量，并且

$$N_1 = \int_{-\infty}^\infty \overline{u}_1 dz$$

在平面尾流的情形是常量，所以在第一种情形$UL^2 \sim N =$ 常量，在第二种情形$UL \sim N_1 =$ 常量。这些结果加上关系式（5.105）表明对于三维尾流

$$L \sim \left(\frac{Nx}{U_0}\right)^{1/3}, U \sim \left(\frac{NU_0^2}{x^2}\right)^{1/3},$$

也就是说

$$\overline{u} \sim \left(\frac{NU_0^2}{x^2}\right)^{1/3} f\left(\frac{rU_0^{1/3}}{N^{1/3}x^{1/3}}\right), \tag{5.106}$$

而对于平面尾流，

$$L \sim \left(\frac{N_1 x}{U_0}\right)^{1/2}, U \sim \left(\frac{N_1 U_0}{x}\right)^{1/2},$$

也就是说

$$\overline{u} \sim \left(\frac{N_1 U_0}{x}\right)^{1/2} f\left(\frac{zU_0^{1/2}}{N^{1/2}x^{1/2}}\right). \tag{5.107}$$

当然，关于自由对流射流的结果不能与具有受迫对流的自由流动（具有纯动力学起源的自由湍流从一个稳态连续源输运一个被动外加物ϑ（也可以是热量））的类似结果相混淆。在此情形，初始方程组由普通的流体动力学方程（不含任何浮力项）和质量（或热量）输运方程（1.72）组成。长度和速度标度自然与对应的纯动力学问题相同（即，它们由具有表种所示的指数值的方程（5.94）给出），但还有一个额外的浓度（或温度）标度$\Theta(x)$。这个新的标度可以借助一个通过$\chi = 0$的方程（1.72）的平均得到的额外的雷诺方程确定。然而，更简单的是以这个事实作为出发点：单位时间通过任意截面$x =$ 常量的外加物质量（或热流）恒定。这立即给出了方程$\Theta(x) \sim x^{-k}$中指数k的精确值，依赖于流动的类型和源的类型（二维或三维）。相应的结果将在第5章联系湍流扩散的研究详细讨论。这里我们仅注意到，知道了平均速度$\overline{u}$和平均温度$\overline{\vartheta}$的分布以及湍动流量$\overline{u'w'}$和$\overline{\vartheta' w'}$的值，我们也可以确定相应的涡扩散系数K和K_ϑ的值，并得到它们的比值$\alpha = \frac{1}{\mathrm{Pr}_t} = \frac{K_\vartheta}{K}$。能够确定这一点的测量已经被很多研究者对不同种类的流动进行了很多次[特别参见本小节早先引用的工作，主要是Hinze (1959)、Abramovich (1963)和Vulis, Kashkarov (1965)]。总的来说，这些结果互相符合得很好，并且表明，在一阶近似下，涡扩散系数K和K_ϑ可以假设为在射流或尾流的每个截面取不依赖于分子系数ν和x的常数值，对于自由湍流，比值$\alpha = K_\vartheta/K$大于1（即对于圆柱尾流和平面射流，$\alpha \approx 1.8-2$，对于轴对称射流，$\alpha \approx 1.2-1.4$）。也可以发现对

于热输运和质量输运，K_ϑ的值完全相同（但不同于涡黏滞系数K），故而$\mathrm{Pr}_t = \mathrm{Sc}_t \neq 1$[参见Kiser (1963)]。Sakipov, Tcmirbayev (1965)的实验清楚地展示了α和$\mathrm{Pr}_t = \alpha^{-1}$不依赖于分子流体性质[也参见Vulis, Kashkarov (1965)]，他们测量了工业用油、水和汞的自由射流中的K和K_ϑ（即，分子普朗特数在10^3到10^{-2}范围！），得到了相同的α和Pr值。

总之，我们必须强调所有自由湍流都拥有的一个非常重要的特征，旋转湍流占据的空间区域在每个瞬间都有一个清晰但非常不规则的边界（严格来说，者不是一个表面，而是一个薄层，所谓“科尔辛超层”（Corrsin's superlayer）），在此之外运动是无旋的。如2.2节所述，流体可以从外部被吸入湍流区域，但不能从中逃逸。只有大尺度湍流速度涨落可以穿透无旋运动区域，它们在量级为转动流区域的横向尺度$L(x)$量级的距离处衰减。这些大尺度涨落造成了湍流和无旋运动之间不规则的界面。

作为示意图，图45给出了在空气中飞行的子弹后方湍动尾流的阴影照片，取自Corrsin, Kistler (1954)的工作。

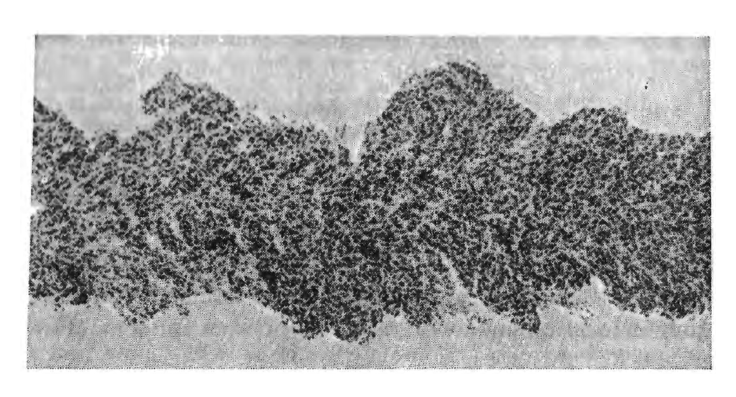


图 45 飞行的子弹后方湍动尾流的阴影照片。

所以按照Townsend (1956)的说法，每个自由湍流都有“双重结构”：它由强的小尺度湍流和相对弱的大尺度涡旋（导致了湍流- 无旋界面的不规则扭曲和运动）组成。由于自由湍流界面上的这种运动，距离其轴不太远处（或者，在二维流动的情形，距离其对称面不太远处），小尺度湍流有时存在有时不存在，即湍流是间歇性的。[15]在5.6节中，我们已经讨论了湍流边界层靠外部分中湍流的间歇性。然而，在自由湍流中，湍流间歇性区域比在边界层中宽得多。如果在边界层中，间歇性区域位于距离壁面$0.4\delta - 1.2\delta$ 处，那么，举个例子，在平面湍动尾流中，根据Corrsin, Kistler (1954)，在从$z = 0.4L(x)$[其中z 是横向坐标]到至少$z = 3.2L(x)$ 的

[15]通常假设间歇性仅在距离流动轴（或对称平面）某个确定距离才发生。然而，有一些迹象，例如，在不太靠近物体的轴对称尾流中，尾流的不规则弯曲在尾流轴上也会产生相当大的间歇性[见Hwang, Baldwin (1966)或Gibson, Chen, Lin (1968)]。

区域它会非常明显。除了自由湍流和湍动边界层靠外部分（在很多方面和自由湍流很类似）的情形，也观察到了湍流间歇性和流动的湍动区域和非湍动区域之间非常确定的不规则运动界面。例如，在管流和边界层流中，在有利于形成湍动“蛞蝓”和“斑点”的“转变”雷诺数，在某些其他情形[见，例如，Coles (1962) 的综述]。我们也可以预期，类似的现象一般来说具有很宽范围湍流运动的特征，对湍流的产生和发展起着相当大的作用。然而，到目前未知，这些现象的理论研究碰到了相当大的困难，在这个方向只迈出了第一步（见，例如Coles (1962)、Liepmann (1962)、Townsend (1966)和Kovdsznay (1967)，那里可以找到其他参考文献）。我们在这里不再赘述这些问题。我们只需注意，小尺度湍流的间歇性这一相关主题对于本书第二卷的一些讨论具有重要意义。

5.9 湍流的半经验理论

我们已经在5.1节中展示了，在湍流中力学定律由雷诺方程表达，其中未知量的数量超过方程的数量。所以雷诺方程只允许我们得到各种湍流特征量之间的某些联系，它们不能在通常意义下“求解”。所以，在选择具有物理意义的雷诺方程的解是，某些描述湍流的函数必须独立于这些方程给出。在某些情形，这些函数的形式可以基于量纲分析得到（精确到少数经验确定的常量）。然而，更为经常的是，量纲分析只能得到含有未知函数的关系式，这些未知函数必须从实验得到。一般来说，这些描述各种自然和工程应用中碰到的湍流所需的未知函数的数量非常巨大。所以可以理解为什么很多研究者试图将这些函数的确定简化为寻找湍流的少量统计性质，这些性质可以同时应用于很多不同的流动。这些除了使用严格的流体力学方程，还使用了一些从实验得到或借助定性物理考虑并被实验验证的额外经验关系的湍流理论被称为*半经验理论*。当然，从“纯”理论物理的观点看，所有这些理论都应该看作不严格的，但它们在湍流研究中是非常典型的。在我们对湍流的理解的发展过程中，半经验理论占据了相当大的一部分，它们中的很多现在仍然广泛在工业技术中使用。于是，似乎有用的是在这里至少简述Boussinesq (1877, 1899)、Prandtl (1925)、G. I. Taylor (1915, 1932) 和von Kármán (1930)提出的最重要的半经验理论的基本思想。这种湍流理论方法的进一步发展和使用半经验理论的一些实例将在下面的章节考虑。

由于存在额外的含有湍流（雷诺）应力的项，流动变量平均值的雷诺方程是不闭合的。因此，很明显，方程组最简单的闭合方法是建立平均流动变量和雷诺应力之间的联系。这使得后者的值可以用前者给出。下面，我们将列举不同科学家在不同时期提出的几个这种关系式。我们只考虑最简单的平面平行流动，其中平均速度的x分量$u_x = u$不等于零，而这只依赖于z坐标，这和圆管中的流动几乎相同，其中平均速度u在每个地方都沿Ox轴，只依赖于距离管壁的距离$z = R - r$。在此情形，雷诺方程取方程（5.16）[或方程（5.16’）]形式。所以在此情形，速度分布由一个含有一个额外未知量$\tau^{(1)} = -\rho\overline{u'w'}$的方程确定[方程（5.16）或方程（5.17’）的第一个方程]。于是，要确定函数$u(z)$，只需要用$\overline{u}(z)$表示$\tau^{(1)}$。

湍流应力$\tau^{(1)} = -\rho\overline{u'w'}$和速度分布$\overline{u}(z)$之间的关系所可能的最简单的假设是Boussinesq (1877, 1897)假设，存在一个含有某个涡黏滞系数K的（5.5）形式的关系式。严格来说，方程（5.5）不是一个假设，没有写出新的关系式，它只是用新的未知量$K = \frac{\tau^{(1)}}{\rho(d\overline{u}/dz)}$代替了位质量$\tau^{(1)}$。然而，如果假设$K$以某种确定的方式依赖于坐标，那么我们马上得到一个基于假设的可以实验验证的半经验理论。

关于K值最简单的假设是它是常量。这个假设已经被很多作者应用于自由湍流，并且被证明是对这种流动合理的一阶近似。然而，容易看到，当应用于平面渠或圆管中的流动，它得到完全错误的结果。实际上，以$K =$ 常量，这个湍流平均速度的方程和相应的层流的方程的不同仅在于黏滞系数的数值。于是，可以得到在此情形的管或渠的速度分布是抛物线型的。然而，我们知道这种分布不对应于实验（见5.5节，图32）。

当然，这个矛盾没有什么特别之处。众所周知，当我们接近壁面，系数K一定趋于零（但比壁面距离的三次方慢得多，见5.3 节）。所以K为常量的假设对于存在刚性壁面的流动是非常不适用的。然而，在某些问题中（例如和无限空间中传播的湍动射流或尾流有关的问题，或者和自由大气中湍流有关的问题），$K =$ 常量的假设不是完全不正确的。在这些情形，在雷诺方程中带入恒定K的方程（5.5）得到一个含有未知参数K的半经验方程，K必须从观测确定（在很多情形得到极端不同的值）。

对于壁面限定的流动，不可能假设$K =$ 常量，但这在很多情形，我们可以引入其他合理的关于湍流黏滞系数K的假设，使得我们可以确定雷诺方程。所以，例如，在靠近平面壁（但不是太靠近，在黏滞亚层极限之外）的平面平行流的情形，K正比于与壁面的距离的假设给出很好的结果。由此我们得到对数方程（5.22），它和由量纲考虑得到的推论一致。对于管、渠和边界层中的流动，已经提出了很多K对与壁面距离z的依赖关系的假设。作为两个最简单的例子，我们提到Gosse (1961)（其中使用K正比于函数$1-(1-\eta)^2$的假设在管和边界层中得到了和实验相当好的符合，其中$\eta = z/H_1$，H_1是管的半径或边界层的厚度）和Szablewski (1968) 的工作，使用对于$0 \leq \eta \leq m$，$K = \kappa u_* z\sqrt{1-\eta}e^{-\eta/m}$，对于$m \leq \eta \leq 1$，$K = K(mH_1)$（$m \approx 0.8$）的假设，在管和平面渠中的流动中得到了很好的符合。在紧邻壁面处，分子和湍流摩擦过程的相互作用导致$K = \kappa u_* z\varphi(zu_*/\nu)$形式的依赖关系。Deissler (1955)、Rannie (1956)、Levich (1962)和其他人提出了关于函数φ的一些半经验假设（见上面的5.3节和5.7节）。在大气的表面层中，在稳定热分层的情形，根据所有已有数据，随着高度z增大，这个系数首先几乎线性增大，然后其增长速率变慢，而对于足够大的z，涡黏滞系数实际上可以假设为常量。在此基础上，已经提出了一些$K(z)$ 的公式，和我们已经提到的一般规则符合[见，例如Yudin and Shvets (1940)、Dorodnit syn (1941)、Berlyand (1947)]。这些方程中的每一个都对应于半经验理论的一个变体。所以，在确定了从观测数据选择的$K(z)$公式中的所有参数后，我们可以以某种经度计算风速随高度的变化，求解气象学感兴趣的某些其他问题。

在湍流中质量和热流输运的研究中，湍动质量流$j^{(1)} = \rho\overline{\vartheta' w'}$和热流$q^{(1)} = c_p\rho\overline{\vartheta' w'}$起到了湍流应力的作用，由方程（5.9）定义的涡扩散系数K_ϑ起到了涡黏滞系数K的作用。对于这个系数，我们可以重复上面关于K的一切（特别参见下面的第10节，其中我们将讨论大气扩散并考虑了某些使用确定的K_ϑ对z依赖形式的半经验理论）。

然而，通常，涡黏滞（或扩散）系数的概念无助于简化湍流问题，因为选择关于这个量的合适假设非常困难，不清楚哪个选择可行。为了帮助进行选择，已经提出了一些其他半经验理论。在很多这种理论中，一个基本的部分是Prandtl (1925)引入的“混合长”（mixing length）[这个想法以略微不同于早先G. I. Taylor (1915)的形式提出]。

混合长概念的使用可以用保守的被动外加物ϑ的湍流输运的例子最好地说明。零平均浓度ϑ仅依赖于z 坐标。因此我们主要关心这种外加物沿Oz轴的输运。让我们假设这种输运仅受湍流速度涨落的影响。显然，这种情况可能以这种方式发生：在介质中出现小的随机射流，将外加物从一个未知$z =$ 常量输运到另一个位置。让我们假设每个这种射流沿Oz轴运动一个距离l'，在此之后它和周围介质混合，在此情形，l'为混合长。因此，根据我们的假设，只有在$z-l'$产生的向上运动的射流或在$z+l'$产生的向下运动的射流才会撞击z。如果我们现在假设，射流的混合不是逐渐发生的，而是突然发生的，那么在$z-l'$产生的射

流会向z输运其初始浓度[平均等于$\vartheta(z-l')$]而在$z+l'$产生的射流会输运平均等于$\vartheta(z+l')$的浓度。所以，在z处，射流所含外加物浓度不同于那里的平均浓度，即这会导致浓度涨落$\overline{\vartheta}(z\mp l')-\overline{\vartheta}(z)\approx \mp l'\frac{d\overline{\vartheta}(z)}{dz}$。很明显这个向上运动的射流对应于正的垂向涨落速度$w'$，向下运动的射流对应于负的$w'$值。所以，如果我们对于向上运动的射流取$l'$为正，取向下运动的射流为负，那么

$$j^{(1)}=\rho\overline{w'\vartheta'}=-\rho\overline{l'w'}\frac{d\overline{\vartheta}}{dz}. \tag{5.108}$$

所以，容易看到，湍流扩散系数K_ϑ可以用混合长（一般来说是一个随机量）非常简单地表示

$$K_\vartheta=\overline{l'w'}. \tag{5.109}$$

我们不仅可以尝试使用方程（5.108）计算热流或外加物质的流量，也可以用它描述动量流。这是普朗特“*动量输运理论*”的基础，这个理论提出，对于动量的纵向分量ρu，也存在一个确定的混合长l'，于是

$$\tau^{(1)}=-\rho\overline{u'w'}=\rho l'w'\frac{d\overline{u}}{dz},K=\overline{l'w'}. \tag{5.110}$$

这里，长度l'在某种意义上和气体动理学理论中分子的平均自由程类似，它定义了某个小流体元（一团流体）在和气体流体粒子混合并将动量交给它们之前走过的路径。在这个意义下，K的方程（5.110）类似于分子黏滞系数（从气体动理学理论导出）的表达式$\nu\sim l_m u_m$，其中l_m是平均自由程，u_m是分子热运动速度。当然，l'比l_m大很多个量级，所以尽管u_m一般比w'大，但方程（5.110）给出了比ν大很多的K值。

我们现在注意到一团从$z-l'$和$z+l'$到达z的流体团分布具有平均纵向速度$\overline{u}(z-l')$和$\overline{u}(z+l')$。所以在两种情形，它们都产生纵向速度涨落u'，绝对值接近$\left|l'\frac{d\overline{u}}{dz}\right|$。然后，假设垂向速度涨落$w'$绝对值接近纵向速度涨落$u'$，

$$w'\sim u'\sim l'\frac{d\overline{u}}{dz}.$$

普朗特把湍流应力$\tau^{(1)}$表示为这种形式

$$\tau^{(1)}=\rho l^2\left|\frac{d\overline{u}}{dz}\right|\frac{du}{dz}, \tag{5.111}$$

其中l是一个新的长度，量级和随机长度l'的均方根相同（当然，l不是简单地等于$(\overline{l'}^2)^{1/2}$，因为w' 和$l'\frac{du}{dz}$同量级，不一定对每团流体严格等于$l'\frac{d\overline{u}}{dz}$）。方程（5.111）中的符号选为使得应力$\tau^{(1)}$总是和$\frac{d\overline{u}}{dz}$同号。所以动量总是从运动得快的流体层传递到较慢的流体层。方程（5.111）中的长度l不再是一个随机量，通常被称为混合长。

方程（5.111）使得窝黏滞系数可以写为这种形式

$$K=l^2\left|\frac{d\overline{u}}{dz}\right|, \tag{5.112}$$

其中l一般来说依赖于一个给定点的坐标和湍流的特征标度（湍流涨落的平均尺度）。所以确定平均速度分布只需要确定l 对坐标的明显依赖关系。对于接近无穷大平面壁（由恒定的τ值表征）的流动，在黏滞亚层之外的区域，没有长度标度。所以，每个长度量纲的量一定正比于与壁面的距离。令$l=\kappa z$和$\tau^{(1)}=\tau=\rho u_*^2=$ 常量，由方程（5.111），我们得到$\frac{d\overline{u}}{dz}=\frac{u_*}{\kappa z}$，即$\overline{u}=u_*/\kappa\ln z+$ 常量[见Prangdtl (1932b)]。所以，我们再次得到一个对数的速度分布，如我们已经看到的，这已经很好地被实验证实。对于平面渠或圆管中

的流动，作为一阶近似，我们甚至可以假设$l = \kappa z$在渠的中间或管的轴上仍然成立。把这个关系式带入方程（5.111）并将左边替换为方程（5.17）或（5.17'）[即再次将$\tau^{(1)}$认同为$\tau = \tau^{(1)} + \nu\frac{d\overline{u}}{dz}$]，我们得到一个$\overline{u}(z)$的微分方程，选择合适的常数$\kappa$可以得到一个速度分布，在渠或管截面的相当大部分和实验数据符合得很好[见Goldstein (1938)]。然而，在渠或管中心附近，这个近似显然不适用，这里取混合长为近似常量要好得多。例如，对于半径为R的管取$l = \beta R$，于是根据方程（5.17'）和（5.111），我们有

$$\rho\left(\beta R\frac{d\overline{u}}{dz}\right)^2 = \rho u_*^2\left(1-\frac{z}{R}\right).$$

以边界条件$\overline{u}(R) = U_0$对这个方程积分，我们得到

$$\frac{U_0-\overline{u}(z)}{u_*} = \frac{2}{3\beta}\left(1-\frac{z}{R}\right)^{3/2}.$$

这个结果，正如Darcy (1858)早已证明的，$\beta \approx 0.13$在$0.25 < \frac{z}{R} < 1$区间可以很好地和数据符合[见5.5节方程（5.46）]。最后，为了在黏滞层外的所有$\frac{z}{R}$值和圆管中实验符合，我们必须令

$$l = R\left[0.14 - 0.08\left(1-\frac{z}{R}\right)^2 - 0.06\left(1-\frac{z}{R}\right)^4\right] \tag{5.113}$$

[Nikuradse (1932)]。这个方程，对于$z/R \ll 1$，具有这种形式：$l = 0.4z - 0.44\frac{z^2}{R} + ... \approx 0.4z$，而当$z/R \to 1$，它变为$l \approx 0.14R$，即它可以看作靠近壁面和中心处的$l$值的插值公式。Szablewski (1968)对于管（或渠）中的流动提出了另一个$l = l(z)$的方程。Obukhov (1942)也提出了l在管截面上的类似分布，他同时给出了关于长度l的一个假设，使得可以得到管中任何截面上l对坐标的依赖关系。紧邻壁面（在黏滞亚层中）l一定随z的减小而比线性更快地显著减小。Rotta (1950)、Hama (1953)、van Driest (1956)和其他人提出了关于流动的这个区域中l行为的假设。Spalding (1967)强烈建议平面湍流边界层中l 的三层分布对于大部分实用目的是惊人地令人满意的。这个分布是靠近壁面的Driest分布、低于$z = 0.09\delta/\kappa$的对数层中的线性分布$l = \kappa z$（$\kappa = 0.435$）和$z \gg 0.09\delta/\kappa$的均匀分布$l = 0.09\delta$的组合。

后来，普朗特对动量输运理论进行了一些推广，可以适用于例如三维流动[参见Goldstein (1938)第81节]或考虑了这种可能性的流动：对于$\frac{d\overline{u}}{dz} = 0$，湍流黏滞系数不为零，和方程（5.112）矛盾[Prandtl (1942)]。然而，我们不详细讨论这些推广，而是立即转向泰勒的*涡度输运理论*（vorticity transfer theory），第二个基本的半经验理论。

这一理论的形成源于试图考虑压强涨落对运动流体粒子的影响，这导致动量的变化，从而防止在流体元移动时动量被视为保守的外加物。在此基础上，G. I. Taylor (1915)第一次引入了“混合长”的概念。然而，和普朗特不同，他假设“混合长”对涡度一定存在，而对动量不存在。后来，泰勒更详细地发展了这个想法[见G. I. Taylor (1932)]。

泰勒的想法对于二维流动是最合适的，众所周知，在没有黏滞的情况下，涡度在流体粒子运动时会不变地输运。所以速度场为$\boldsymbol{u} = \{u, w\}$的二维流动涡度的一个分量$\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$在黏滞亚层之外任何地方都是一个守恒量。平均速度$\overline{\boldsymbol{u}} = \{\overline{u}, 0\}$每个地方都平行于$Ox$轴的二维流动的湍流剪切应力$\tau = -\rho\overline{u'w'}$满足方程

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\overline{u'w'} &= -\left(\overline{u'\frac{\partial w'}{\partial z}} + \overline{w'\frac{\partial u'}{\partial z}}\right)\\ &= -\overline{w'\left(\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x}\right)} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\overline{u'^2} - \overline{w'^2}),\end{aligned}$$

这里使用了速度涨落的连续性方程$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0$。在沿$Ox$轴的均匀流动中，平均量对$x$的导数等于零，于是

$$\frac{\partial \tau}{\partial z}=-\rho\overline{w'\omega'_y}. \tag{5.114}$$

引入涡度的混合长l'_1，使得$\omega'_y=l'_1\frac{\partial\overline{\omega}_y}{\partial z}$，$\rho\overline{w'\omega'_y}=\rho\overline{w'l'_1}\frac{\partial\overline{\omega}_y}{\partial z}$。和普朗特的理论中一样，我们取$w'$为$w'=l'\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}$，其中$l'$时速度的随机混合长。在此情形，我们看到$\overline{\omega}_y=\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}-\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}=\frac{d\overline{u}}{dz}$，所以$\frac{d\overline{\omega}_y}{dz}=\frac{d^2\overline{u}}{dz^2}$。最后，我们得到

$$\frac{d\tau}{dz}=\rho l_1^2\frac{d\overline{u}}{dz}\frac{d^2\overline{u}}{dz^2}, \tag{5.115}$$

其中$l_1=(-\overline{l'l'_1})^{1/2}$是特征长度，它在泰勒理论中的作用和普朗特理论中的长度l一样。当然，如果我们考虑到平面平行流动中的速度扰动实际上也可能是三维的，那么对方程（5.115）的推导就失去了力量，在此情形，方程（5.115）必须被视作一个经验关系，只能实验验证。方程（5.115）也容易进一步推广[见，例如G. I. Taylor (1935c)或Goldstein (1938)84-85 节]，但我们不详细讨论这一点。

对于$l_1=$ 常量的情形，方程（5.115）严格等价于普朗特方程（5.111）。实际上，如果$l_1=$ 常量，那么方程（5.115）对z积分得到$\tau=\frac{1}{2}\rho l_1^2\left(\frac{d\overline{u}}{dz}\right)^2$。而且，如果我们假设$l_1=l\sqrt{2}$，那么这个方程和普朗特方程一致。然而，一般来说，泰勒理论的结果和普朗特理论略微不同。当应用于平面渠和圆管中的压强流时，$l_1=\kappa_1 z$的泰勒理论（方便的是对渠流取$\kappa_1\approx 0.23$，对管流取$\kappa_1\approx 0.19$）使得我们可以得到一个平均速度分布的形式，和已有的数据到几何渠的中心或管的轴都符合得很好[见，例如Goldstein (1938)156-157节]。

使用和方程（5.111）推导类似的论证，把$w'=l'\frac{d\overline{u}}{dz}$带入方程（5.108）我们可以得到方程

$$j^{(1)}=-\rho l_2^2\frac{d\overline{u}}{dz}\frac{d\overline{\vartheta}}{dz}, K_\vartheta=l_2^2\frac{d\overline{u}}{dz}, \tag{5.116}$$

其中l_2是另一个混合长，表征被动的守恒外加物ϑ的输运。长度l_2和l（或l_1）之间的关系决定了湍流普朗特数$\mathrm{Pr}_t=\frac{K}{K_\vartheta}$（或$\alpha=\frac{K_\vartheta}{K}$）。所以，例如，在我们可以取$l=$ 常量的流体区域，$l_2=l$对应于$\mathrm{Pr}_t=\alpha=1$，而对于$l_2=l_1$我们得到$\mathrm{Pr}_t=1/2,\alpha=2$。当然，理论上，长度$l_2$不一定和$l$或$l_1$类似，所以不可能假设（如有时那样）从动量输运理论得到$\mathrm{Pr}_t=1$，从涡度输运理论得到$\mathrm{Pr}_t=1/2$，实际上，长度l_2、l和l_1之间的关系只能基于实验得到。

普朗特的动量输运理论和泰勒的涡度输运理论都没有完全解决雷诺应力和平均速度场之间关系的问题。这是因为在这些理论中引入了一个新的物理量，混合长，在流动的每一点确定这个量需要额外的假设。von Kármán (1930)提出了一个极端一般的假设——湍流速度涨落场的*局域运动相似假设*，特别地，使得我们可以建立长度l和平均速度场之间的一般联系。根据这个假设，充分发展的湍流中的每一点的邻域中的湍流速度涨落场（只是除了靠近刚性壁面的薄黏滞亚层中的点，在这层中黏滞的作用直接显现出来）彼此相似，只是长度和时标不同，或者长度和速度标度不同。为了在数学上写出这个假设，我们在流动中的每一点x_0的邻域引入一个运动坐标系，这个坐标系运动速度在给定点等于平均速度$\overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0)$。这个系统的坐标显然符合矢量$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0-\overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0)t$的分量。同样根据这个假设，在每一点$\boldsymbol{x}_0$可以定义过一个长度标度$l(\boldsymbol{x}_0)$和一个速度标度$U(\boldsymbol{x}_0)$，使得在这点的邻域，湍流速度涨落场的形式为

$$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})=U(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi}=\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0-\overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}_0)t}{l(\boldsymbol{x}_0)} \tag{5.117}$$

其中函数$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi})$是普适的，即不依赖于点$\boldsymbol{x}_0$[以及平均速度场$\overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$]。所以，在冯·卡门理论中，湍流涨落特性和平均速度场之间的联系仅仅是因为标度l和U对场$\overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$的依赖。

为了确定（平均速度$\overline{u}(z)$在每个地方都沿Ox轴并且仅依赖于z的）平面平行稳态流中标度l和U对平均速度的依赖关系，我们可以使用方程（1.7）给出涡度，忽略黏滞，其y分量具有这种形式

$$\frac{\partial \omega_y}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \omega_y}{\partial x_\alpha} - \Omega_\alpha \frac{\partial u_y}{\partial x_\alpha} = 0. \tag{5.118}$$

把这个方程带入总速度$\boldsymbol{u} = u(z_0)\boldsymbol{i} + U(z_0)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi})$，其中$\boldsymbol{i}$是$Ox$轴的单位矢量，而

$$\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} = \left\{ \frac{x - \overline{u}(z_0)t}{l(z_0)}, \frac{y}{l(z_0)}, \frac{z - z_0}{l(z_0)} \right\}$$

是无量纲相对坐标的矢量（假设$x_0 = y_0 = 0$），我们可以从方程（5.118）得到一个未知量$v_\alpha(\boldsymbol{\xi}), \alpha = 1, 2, 3$的方程，系数含有物理量$U(z_0), l(z_0), \overline{z_0}$和它们对$z_0$的导数。因为根据$v_\alpha(\boldsymbol{\xi})$是普适函数的假设，它不依赖于$z$。所以我们可以得到关系式

$$\frac{l(z_0)}{U(z_0)} \frac{d\overline{u}(z_0)}{dz_0} = 常量, \frac{l^2(z_0)}{U(z_0)} \frac{d^2\overline{(u)}(z_0)}{dz_0^2} = 常量$$

[见例如，Goldstein (1938)第158节或Schlichting (1960)第19章第5节，其中详细给出了特殊的二维速度场$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})$ 情形相应的推导]。所以

$$l = -\kappa \frac{d\overline{u}}{dz} / \frac{d^2\overline{u}}{dz^2}, U = Bl\frac{d\overline{u}}{dz}, \tag{5.119}$$

其中κ和B是普适常数，一般来说可以为任何值，因为标度l和U只确定到差一个任意乘数因子。

如果过规定长度l只依赖于$\frac{d\overline{u}}{dz}$和$\frac{d^2\overline{u}}{dz^2}$[16]，方程（5.119）的第一个关系式也可以直接从量纲考虑得到。方程（5.119）的第二式是由U 也只依赖于$\frac{d\overline{u}}{dz}$ 和$\frac{d^2\overline{u}}{dz^2}$ （或l 和$\frac{d\overline{u}}{dz}$）的假设以同样的方式得到的。

长度l显然和普朗特理论和泰勒理论中的混合长l和l_1类似。实际上，由方程（5.117）和（5.119），

$$\tau^{(1)} = -\rho\overline{u'w'} = \rho U^2 \overline{v_1(0)v_3(0)} = 常量 \cdot \rho l^2 \left(\frac{d\overline{u}}{dz}\right)^2, \tag{5.120}$$

其中常量 $= B^2\overline{v_1(0)v_3(0)}$。类似地

$$\frac{\partial \tau^{(1)}}{\partial z} = -\rho \frac{\partial}{\partial z}\overline{u'w'} = 常量 \cdot \rho l^2 \frac{d\overline{u}}{dz}\frac{d^2\overline{u}}{dz^2}, \tag{5.121}$$

其中常量有不同的值。当然，如果我们把方程（5.120）或方程（5.121）中的常量替换为1，即如果我们把长度认同为动量或涡度的混合长，那么方程（5.119）中第一个方程中的常数κ不能任意选择，必须基于实验确定。

方程（5.117）给出的冯·卡门假设从表面上看，对湍流速度涨落施加了过度严格的限制，与速度的时空涨落变化的不规则性这一自然的观念不符。容易从下面的讨论看出，局域自守性假设被证明不适用于涨落速度场的单个实现，而只适用于这种场的统计性质（见第2卷第8章，专门介绍了A. N. Kolmogorov的相似性假设）。然而，重要的是，冯·卡门理论的基本结果（5.119）甚至可以基于更弱的假设得到。如我们已经看到的，在某种意

[16]因为运动方程有伽利略不变性，所以涨落长度标度l显然不依赖于平均速度的绝对值$\overline{u}(z)$，而只依赖于$\overline{u}$在给定点邻域的变化，即依赖于$\overline{u}(z)$的导数。l仅依赖于前两阶导数$\frac{d\overline{u}}{dz}$和$\frac{d^2\overline{u}}{dz^2}$ 的假设在此情形是和这个量有关的最简单的假设。

义上，它们是量纲概念的自然结果。此外，我们要注意到，如Loitsyanskiy (1935)所示，对于方程（5.119）的推导，将局域自守性假设应用于平均速度场就足够了，要求在每一点$\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$定义一个标度$l(z_0)$使得对于$z_0 \le z \le z_0 + l$，精确到$l$的三阶小量，下面的条件成立：

$$\frac{\overline{u}(z) - \overline{u}(z_0)}{\overline{u}(z_0 + l) - \overline{u}(z_0)} = f(\zeta), \zeta = \frac{z - z_0}{l}. \tag{5.122}$$

实际上，在这个精度，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\overline{u}(z) - \overline{u}(z_0)}{\overline{u}(z_0 + l) - \overline{u}(z_0)} &= \frac{(z - z_0)\left(\frac{d\overline{u}}{dz}\right)_0 + \frac{1}{2}(z - z_0)^2\left(\frac{d^2\overline{u}}{dz^2}\right)_0}{l\left(\frac{d\overline{u}}{dz}\right)_0 + \frac{1}{2}l^2\left(\frac{d^2\overline{u}}{dz^2}\right)_0} \\ &= \frac{\zeta + \frac{1}{2}\zeta^2\left[l\left(\frac{d^2\overline{u}}{dz^2}\right)_0 / \left(\frac{d\overline{u}}{dz}\right)_0\right]}{1 + \frac{1}{2}\left[l\left(\frac{d^2\overline{u}}{dz^2}\right)_0 / \left(\frac{d\overline{u}}{dz}\right)_0\right]}.\end{aligned}$$

因为，根据这个假设，上面方程右边一定不依赖于z_0和l，方程（5.119）第一个方程也一定满足，于是，由比例

$$\frac{\tau(z_0)}{\rho[\overline{u}(z_0 + l) - \overline{u}(z_0)]^2} \approx \frac{\tau(z_0)}{\rho l^2\left(\frac{d\overline{u}}{dz}\right)_0^2}$$

不依赖于z_0的条件，也得出了方程（5.120）。

对于沿无穷大平面$z = 0$的压强梯度为零、剪切应力$\tau = \rho u_*^2$恒定的平面平行流动，l的冯·卡门关系（5.119）加上普朗特方程$\tau = \rho l^2\left(\frac{du}{dz}\right)^2$[见方程（5.120）]给出

$$u_* = \kappa\left(\frac{d\overline{u}}{dz}\right)^2 / \frac{d^2\overline{u}}{dz^2}. \tag{5.123}$$

所以，我们在此得到平均速度的对数方程

$$\overline{u}(z) = \frac{u_*}{\kappa}\ln(z - z_0) + B. \tag{5.124}$$

历史上，这个推导第一次得到了对数方程。对于平面渠或圆管中的压强流，除了方程$\tau = -\kappa\frac{\overline{u}'}{\overline{u}''}$和$\tau = \rho l^2\left(\frac{d\overline{u}}{dz}\right)^2$，还必须使用关系式（5.17）或（5.17'）。于是我们可以得到$\overline{u}(z)$分布的方程，通过合适地选择常数κ（对于渠和管不同），可以和已有的数据得到令人满意的符合[见，例如Goldstein (1938)]。

普朗特、泰勒和冯·卡门的半经验理论式基于局域雷诺应力和局域平均速度场之间存在一个关系的假设研究湍流问题的方法的经典例子。试图寻找这个关系的改进形式的努力仍然在继续，见，例如，Lettau (1967)，那里也可以找到这个作者的其他参考文献[Lumley, Stewart (1965)给出了对Lettau的方法的批判性讨论]。经典理论在早期看起来令人满意主要是因为它们几乎只和平均速度分布的测量进行比较，这个分布对所采取的假设非常不敏感（特别是如果理论中有一些必须从观测确定的未定常数）。在进行更详细的实验时，很明显任何这类理论原则上都是错误的，只能用于描述非常有限的湍流现象。例如，Schwarz, Cosart (1961)、Béguier (1965)和其他人的测量明确地表明，在具有非对称速度分布的流动中，剪切应力为零的点通常和速度梯度为零的点不重合。显然，这个事实与所有混合长和涡黏滞理论矛盾。由这个事实也可以得到，在非对称流动中，涡黏滞在某些点必须取负值。这使得涡黏滞的整个概念在应用于此类流动时显得有点奇怪。实际上，如果我们以纯形式的方式定义涡黏滞系数K为$K = \frac{\tau}{\rho(d\overline{u}/dz)}$，那么$K$非常多的时候是负的，特别是考虑大尺度自然湍流时（见，例如Starr (1968) 关于这个主题的特殊专著）。目前，几乎所有研究者

都同意，雷诺应力不是运动的局域性质，而是依赖于整个流场（包括起时间历史）。有很多推论和这个想法有关，表明湍动流体必须考虑为特殊的具有非牛肚粘弹性行为的连续介质[Rivlin (1957)、Moffatt (1967)、Crow (1968)和其他人]。湍流的这种描述非常清晰地展示了经典半经验理论的局限和不足。不幸的是，它没有给出剪切湍流的一个唯一的精确数学模型。Lumley (1967a)、Phillips (1967)和其他人[也参见Kovásznay (1967)]也进行了一些非常不同的尝试，试图改进雷诺应力的非牛顿半经验理论（即，根据这个理论，应力和速度场应变率之间具有非线性关系）。然而，这些作者得到的结果只是初步的，在这里不进一步讨论。

6. 能量平衡方程及其结果

6.1 雷诺应力张量的方程

早先，我们看到作为平均运动的雷诺方程中含有雷诺应力$\tau_{ij}^{(1)} = -\rho\overline{u_i' u_j'}$额外项的结果，这些方程的系统是不闭合的。自然的做法是尝试通过为雷诺方程添加描述应力$\tau_{ij}^{(1)}$时间变化的辅助方程使这个系统闭合。这些$\tau_{ij}^{(1)}$将在本小节推导。我们将看到，它们也含有一些额外的未知量，所以还是不能形成一个闭合系统。然而这些$\tau_{ij}^{(1)}$的方程确实施加了新的动力学限制，这对于了解湍流特性是非常有意义的，因为它们允许我们对湍流的性质作一些定性推论。特别有用的是湍流能力平衡方程，描述了涨落运动动能密度（或者简单地说，湍流能量）的时间变化$E_t = \frac{1}{2}\rho\overline{u_\alpha' u_\alpha'}$。本节接下来的几个小节将仔细考虑这个方程中所有具有明确物理意义的项。

对于雷诺应力方程的推导，我们可以使用Keller, Friedmann (1924)提出的写出矩量方程的一般方法[也参见Keller (1925)]。令$u_1, u_2, ..., u_N$为不可压缩流体湍流的N个不同或相同的流体动力学变量，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_N$是流动区域中$N$个不同或相同的点。在此情形，$N$阶矩量对时间的导数

$$B_{u_1 u_2 ... u_N}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_N, t) = \overline{u_1(\boldsymbol{x}_1, t) u_2(\boldsymbol{x}_2, t) ... u_N(\boldsymbol{x}_N, t)} \tag{6.1}$$

（因为平均和微分的顺序可以反过来）可以写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} B_{u_1 u_2 ... u_N}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_N, t) = & \overline{\frac{\partial u_1(\boldsymbol{x}_1, t)}{\partial t} u_2(\boldsymbol{x}_2, t) ... u_N(\boldsymbol{x}_N, t)} \\ & \overline{+ u_1(\boldsymbol{x}_1, t) \frac{\partial u_2(\boldsymbol{x}_2, t)}{\partial t} ... u_N(\boldsymbol{x}_N, t)} + ... \\ & \overline{u_1(\boldsymbol{x}_1, t) u_2(\boldsymbol{x}_2, t) ... \frac{\partial u_N(\boldsymbol{x}_N, t)}{\partial t}} \end{aligned} \tag{6.2}$$

现在足以借助相应的流体动力学方程消去方程（6.2）右边的所有时间导数。我们得到矩量$B_{u_1 u_2 \ldots u_N}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_N, t)$的平衡方程，把$\frac{\partial}{\partial t} B_{u_1 u_2 \ldots u_N}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ..., \boldsymbol{x}_N, t)$表示为流动变量及其空间导数的矩量的组合。

当然，这个方法也可以应用于非平均量。所以，例如，把纳维-斯托克斯方程（1.6）带入方程$\frac{\partial}{\partial t}\rho u_i u_j = \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial t}$我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}[\rho u_i u_j u_\alpha + (p u_i \delta_{j\alpha} + p u_j \sigma_{i\alpha})] = \\
&= (\rho u_i X_j + \rho u_j X_i) + p\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \left(\sigma_{i\alpha}\frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + \sigma_{j\alpha}\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}\right),
\end{aligned} \tag{6.3}$$

其中$\sigma_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$是不可压缩流体黏滞应力张量。所以，特别地，对于动能密度我们得到

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(E u_\alpha + p u_\alpha - u_\beta \sigma_{\alpha\beta}) = \rho u_\alpha X_\alpha - \rho\varepsilon, \tag{6.4}$$

其中

$$\rho\varepsilon = \sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{\mu}{2}\sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\right)^2$$

表示（单位时间单位体积流体）动能的比耗散率。方程（6.4）左边括号中的表达式给出了能流密度，这是由流体粒子位移导致的直接能量输运和压力和分子内摩擦力作用产生的。然而，方程（6.4）右边表明，任意体积流体的总动能变化不仅因为能量通过边界流入或流出和压力和作用于边界的黏滞摩擦的作用，还因为体作用力和能量耗散效应的作用，这导致部分动能转化为热量。

现在，我们不使用纳维-斯托克斯方程，而是使用雷诺方程（5.1），

$$\frac{\partial \rho \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho \overline{u}_i \overline{u}_\alpha + \rho\overline{u'_i u'_\alpha} + \overline{p}\delta_{i\alpha} - \sigma_{i\alpha}) = \rho \overline{X}_i \tag{6.5}$$

并考虑$\rho=$常量和$\frac{\partial \overline{u}_\alpha}{\partial x_\alpha}=0$。我们以类似的方式得到下面的张量$\rho\overline{u}_i\overline{u}_j$的方程

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \rho\overline{u}_i\overline{u}_j}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}[\rho\overline{u}_i\overline{u}_j\overline{u}_\alpha+\rho\overline{u_i'u_\alpha'}\overline{u}_j+\rho\overline{u_j'u_\alpha'}\overline{u}_i+\\&(\overline{pu}_i\delta_{j\alpha}+\overline{pu}_j\delta_{i\alpha})-(\overline{u}_i\overline{\sigma}_{j\alpha}+\overline{u}_j\overline{\sigma}_{i\alpha})]=\\&(\rho\overline{u}_i\overline{X}_j+\rho\overline{u}_j\overline{X}_i)+\overline{p}\left(\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_i}\right)-\left(\overline{\sigma}_{i\alpha}\frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_\alpha}+\overline{\sigma}_{j\alpha}\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_\alpha}\right)+\\&\left(\rho\overline{u_i'u_\alpha'}\frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_\alpha}+\rho\overline{u_j'u_\alpha'}\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_\alpha}\right).\end{aligned}\tag{6.6}$$

特别地，对于平均运动的动能密度$E_s=\frac{1}{2}\rho\overline{u}_\beta\overline{u}_\beta$我们得到

$$\frac{\partial E_s}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(E_s\overline{u}_\alpha+\rho\overline{u_\alpha'u_\beta'}\overline{u}_\beta+\overline{pu}_\alpha-\overline{u}_\beta\overline{\sigma}_{\alpha\beta})=\rho\overline{u}_\alpha\overline{X}_\alpha-\rho\varepsilon_s+\rho\overline{u_\alpha'u_\beta'}\frac{\partial\overline{u}_\beta}{\partial x_\alpha},\tag{6.7}$$

其中

$$\rho\varepsilon=\overline{\sigma}_{\alpha\beta}\frac{\partial\overline{u}_\beta}{\partial x_\alpha}=\frac{\rho\nu}{2}\sum_{\alpha,\beta}\left(\frac{\partial\overline{u}_\alpha}{\partial x_\beta}+\frac{\partial\overline{u}_\beta}{\partial x_\alpha}\right)^2$$

表示分子黏滞作用下平均运动能量的耗散率。在略去右边最后一项（我们后面详细考虑）后，这个方程所有项的物理意义类似于方程（6.4）对应的项。我们注意到平均运动的能流密度，除了描述能量输运的分子黏滞力的$\overline{u}_\beta\overline{\sigma}_{\alpha\beta}$项，还含有$\rho\overline{u_\alpha'u_\beta'}\overline{u}_\beta$，描述了“涡黏滞”作用导致的相关能量输运过程。

对方程（6.3）平均然后逐项减去方程（6.6），我们得到所需的雷诺应力张量的方程：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \rho\overline{u_i'u_j'}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}[\rho\overline{u_i'u_j'}\overline{u}_\alpha+\rho\overline{u_i'u_j'u_\alpha'}+(\overline{p'u_i'}\delta_{j\alpha}+\overline{p'u_j'}\delta_{i\alpha})-(\overline{u_i'\sigma_{j\alpha}'}+\overline{u_j'\sigma_{i\alpha}'})]=\\&\rho\overline{u_i'X_j'}+\rho\overline{u_j'X_i'}+\overline{p'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}-\\&\left(\overline{\sigma_{i\alpha}'\frac{\partial u_j'}{\partial x_\alpha}}+\overline{\sigma_{j\alpha}'\frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha}}\right)-\left(\rho\overline{u_i'u_\alpha'}\frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_\alpha}+\rho\overline{u_j'u_\alpha'}\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_\alpha}\right).\end{aligned}\tag{6.8}$$

这个方程也可以通过首先写出速度张量$u_i'=u_i-\overline{u}_i$的动力学方程（等于

第i个纳维-斯托克斯方程和雷诺方程的差）

$$\rho\frac{\partial u_i'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho\overline{u}_i u_\alpha'+\rho\overline{u}_\alpha u_i'+\rho u_i'u_\alpha'-\rho\overline{u_i'u_\alpha'}+p'\delta_{i\alpha}-\sigma_{i\alpha}')=\rho X_i' \quad (6.9)$$

然后应用方程（6.2）于中心矩$\overline{u_i'u_j'}=-\frac{1}{\rho}\tau_{ij}^{(1)}$而得到。然而，我们马上看到，除了平均速度$\overline{u}_i$和雷诺应力$\rho\overline{u_i'u_j'}$，方程（6.8）还含有一些新的未知量。这些新的未知量首先是三阶中心矩$\rho\overline{u_i'u_j'u_\alpha'}$，其次是速度涨落以及它们的空间导数的二阶矩乘以$\nu$，出现在$\overline{u_i'\sigma_{j\alpha}}$和$\overline{\sigma_{j\alpha}'\frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha}}$中，不直接用雷诺应力表示，第三是形式为$\overline{p'u_i'}$和$\overline{p'\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}$的压强和速度场的联合二阶矩[借助方程（1.9'）可以写为两点三阶矩$\overline{u_i'(\boldsymbol{x},t)u_j'(\boldsymbol{x}',t)u_k'(\boldsymbol{x}',t)}$ 的积分]。所以，雷诺方程（6.5）和雷诺应力的方程（6.8）还是没有形成闭合系统。现在，如果我们尝试借助方程（6.8）中出现的新的未知量的方程闭合这个系统，以三阶矩$\rho\overline{u_i'u_j'u_k'}$开始，那么这些方程会引入很多其他新的未知量[例如四阶矩$\rho\overline{u_i'u_j'u_k'u_l'}$和$\overline{p'u_j'u_k'}$或$\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_m}\frac{\partial u_j'}{\partial x_n}u_k'}$类型的三阶矩，见Chou (1945a)]并且未知量的数量和方程数量的差变得更大。所以写出更高阶矩的方程不能使得我们得到描述湍流运动的闭合方程组。

同样容易的是推导出现在方程（5.7）中$\overline{\vartheta}$的湍流流量$q_i=\rho\overline{\vartheta u_i}$的方程。只需要使用$\vartheta'=\vartheta-\overline{\vartheta}$的方程加上方程（6.9）。这些流量矢量$q_i$的方程非常类似于方程（6.8）。它们也含有一些新的未知量，使得我们无法得到一个闭合系统。

当然，我们可以借助某种额外假设将方程（6.8）中的“新未知量”用一阶矩和二阶矩$\overline{u}_i$和$\overline{u_i'u_j'}$表示，从而尝试使方程（6.5）和（6.8）的系统闭合。这些尝试实际上包含了“湍流的半经验理论”的新变量，和5.9节中考虑的理论的不同仅在于这里假设的关系结构更复杂。这些更复杂的半经验理论已经被很多作者在不同的时候提出，这里我们仅考虑一小部分。致力于方程（6.5）和（6.8）系统闭合的问题的第一个工作使Zagustin (1938)。然后是Kolmogorov (1942)的短文，其中湍流由两个基本参数，强度和尺度参数表征，能量平衡方程的所有项都由它们表示。后一个方程是从方程（6.8）推得的。[Prandtl (1945)后来提出了一个类似的想法。]沿着Kolmogorov的工作，Nevzglyadov (1945a, 1945b, etc.)提出了一些关于方程（6.5）和（6.8）系统闭合的不同假设。特别地，Chou（周培源）是第一个尝试除了方程（6.5）和（6.8），使用三阶矩$\overline{u_i'u_j'u_k'}$方程的人，随后出现的四阶矩$\overline{u_i'u_j'u_k'u_l'}$借助四阶速度积累量为零或相关的假设消去。最后，在20世纪50年代和60 年代，Rotta (1951b, 1951c)和Davidov (1958, 1959a, 1959b, 1961)的工作出现了，我们将更详细地讨论，以便通过具体的例子展示这些研究的一般特征。

Rotta对于平均速度$\overline{u}_1(x_3)$在每个地方都沿Ox_1轴并且没有外力的稳态湍流考虑了方程（6.5）和（6.8）。为了简单，他假设方程（6.8）左边括号中描述“雷诺应力输运扩散”的项在一阶近似可以忽略，仅考虑湍流或多或少均匀的流动区域。于是临近区域中湍流量的输运起的作用很小。此外，和Kolmogorov (1942)和Prandtl (1945)的工作一样，假设湍流可以由其强度（比能量）$b=\frac{1}{2}\overline{u_\beta'u_\beta'}=\frac{E_t}{\rho}$和尺度$l$（描述湍流扰动平均尺度的长度量纲的

量，和普朗特的“混合长”类似）描述。为了计算物理量$\overline{p'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_j}\right)}$，Rotta沿着Chou (1945a, 1945b)，使用了压强涨落满足泊松方程（1.9）（于是可以写成和方程（1.9'）有关的形式，被积函数是两个被加数的和，其中一个依赖于平均速度$\overline{u}_1(x_3)$，另一个只含有速度涨落）的事实。$\overline{p'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}$第一个被加数的贡献可以写为平均速度分布$\overline{u}_1(x_3)$各阶导数的序列，系数是两点二阶速度矩的积分。这些系数满足从连续性方程推导出来的代数关系，可以近似用雷诺应力和长度l近似表示。Rotta确定了第二个被加数的贡献，它依赖于两点三阶矩，在均匀湍流中为$\overline{p'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}$，平均速度恒定。他也提出借助假设的关系式（被某些定性考虑证实，见下面6.2节的脚注）

$$\overline{p'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}=-c_1\frac{b^{1/2}}{l}\left(\rho\overline{u_i'u_j'}-\frac{2}{3}\rho b\delta_{ij}\right) \tag{6.10}$$

计算它，其中c_1是一个数值系数，从数据确定。Rotta提出使用类似的假设关系式

$$\overline{\sigma_{i\alpha}'\frac{\partial u_j'}{\partial x_\alpha}}+\overline{\sigma_{j\alpha}'\frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha}}=c_2\nu\frac{\rho\overline{u_i'u_j'}}{l^2}+c_3\frac{\rho\overline{b^2}}{l}\delta_{ij}, \tag{6.11}$$

其中c_2和c_3是新的数值常数，用于计算方程（6.8）右边含有黏滞的“耗散项”。使用这些公式，方程（6.5）和（6.8）使得我们可以确定各个雷诺应力和平均速度梯度的比值，并且得到某些其他可以用实验验证的结果。合适地选择参数c_1, c_2, c_3，这些结果被证明和Reichardt (1938)和Laufer (1951)在渠中测量的湍流特性符合得很好。在他的第二篇文章中，Rotta (1951c)除了方程（6.10）和（6.11），还提出了尺度l的时间和空间变化的微分方程，从而得到了对实验事实更复杂的解释。

Davidov发展了一种更详细的半经验地闭合方程（6.5）和（6.8）的方法。在他的工作中，和Rotta的工作不一样，只忽略了方程（6.8）左边描述压强涨落导致的雷诺应力输运的项$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\overline{p'u_i'}\delta_{j\alpha}+\overline{p'u_j'}\delta_{i\alpha}\right)$。方程（6.8）含有黏滞系数$\mu$的项可以转换为$\mu\Delta\overline{u_i'u_j'}+2\mu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u_j'}{\partial x_\alpha}}$的形式。第一项用雷诺应力的项表示，而Davidov提出取第二项等于$\frac{2}{3}\rho\varepsilon_1\delta ij$（由于小尺度运动各向同性，我们将在本书第2卷详细讨论），其中$\epsilon=\nu\overline{\frac{\partial u_\beta'}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u_\beta'}{\partial x_\alpha}}$是湍流的一个新的基本特征量，收到定义的限制。为了确定方程（6.8）右边含有压强的项，Davidov使用了方程

$$\overline{p'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}=-c_1\frac{\epsilon_1}{b}\left(\rho\overline{u_i'u_j'}-\frac{2}{3}\rho b\delta_{ij}\right)-\left(B_{ij}-\frac{1}{3}B_{\alpha\alpha}\delta_{ij}\right), \tag{6.12}$$

其中c_1是经验常数[和方程（6.10）中的常数c_1有关]，B_{ij}是一个非常复杂的额外的张量，用平均速度、平均速度的导数和雷诺应力表达。这个张量描述了刚性壁面附近边界层中速度张量的各向异性。[17] 此外，对于三阶矩$\rho\overline{u_i'u_j'u_k'}$，类似方程（6.8）的方程的推导进行了更激

[17]例如，在平面刚性壁面$x_3=0$上方的流动的情形，合理的是假设$B_{ij}=d\rho\varepsilon\delta_{i3}\delta_{j3}$，其中$\varepsilon=\overline{\varepsilon}_t$ 是湍流能量平均耗散率（通常方便的是使用ε_1），d是一个无量纲常量。这个假设被Monin (1965)特别用于热分层流体的边界层流动中。Monin考虑了所有七个非零二阶矩$\overline{u_1'^2}, \overline{u_2'^2}, \overline{u_3'^2}, \overline{u_1'u_3'}, \overline{u_1'T'}, \overline{u_3'T'}$和$\overline{T'^2}$的所有方程（基于布西涅斯克方程）。在这些方程中，忽略所有描述湍流输运（“扩散”）的项，借助下面的假设公式（和方程（6.12）有关）

$$\overline{p'\frac{\partial T'}{\partial x_i}}=-d_1\frac{\varepsilon}{b}\rho\overline{u_i'T'}-d_2\frac{\varepsilon}{b^{1/2}}\rho(\overline{T'^2})^{1/2}\delta_{i3}.$$

消去矩量$\overline{u_i'T'}$的方程中$p'\overline{(\partial T'/\partial x_i)}$ 形式的项。

烈的简化，所有含黏滞系数的项以及速度的四阶积累量都被忽略了。此外，具有$\overline{u_i'u_j'\frac{\partial p'}{\partial x_k}}$形式的被加函数的对称组合替换为表达式$c_2\frac{\varepsilon_1}{b}\overline{u_i'u_j'u_k'}$，其中$c_2$是另一个经验系数。最后，为了确定$\varepsilon_1$，Davidov首先提出一个特殊的“输运方程”，除了ε_1，只含有速度场的一、二、三阶矩。然而，后来他驳斥了这一点[见Davidov (1961)]并把它替换为这种形式的方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{u}_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)\varepsilon_1+\frac{\partial\gamma_k}{\partial x_k}+c_3\frac{\varepsilon_1}{b}\overline{u_\alpha'u_\beta'}\frac{\partial\overline{u}_\alpha}{\partial x_\beta}+4\frac{\epsilon_1^2}{b}=\nu\frac{\partial^2\varepsilon_1}{\partial x_\alpha\partial x_\alpha},\tag{6.13}$$

其中c_3是第三个经验系数，$\gamma_k=\nu\overline{u_k'\frac{\partial u_\beta'}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u_\beta'}{\partial x_\alpha}}, k=1,2,3$是三个额外的未知量。现在，为了使系统闭合，必须写出γ_k的方程。这可以基于u_i'的方程（6.9）借助一般规则（6.2）进行。在大量简化后，再次使用某个假设的关系，上面这些方程简化为下面的形式：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\overline{u}_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)\gamma_k+\gamma_\alpha\frac{\partial\overline{u}_k}{\partial x_\alpha}+\overline{u_k'u_\alpha'}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x_\alpha}+\frac{2}{9}\varepsilon_1\frac{\partial\overline{u_k'u_\alpha'}}{\partial x_\alpha}+c_4\frac{\varepsilon_1}{b}\gamma_k=0.\tag{6.14}$$

所以，我们最终得到一个非常复杂但闭合的23个未知量$\overline{u}_i,\overline{u_i'u_j'},\varepsilon_1$和$\gamma_k$的23 个准线性微分方程系统，含有四个经验系数，它们的值可以基于例如Laufer的测量来估计。这个系统更严格的验证需要特殊的实验，其中所有涉及的未知量都要仔细测量。到目前未知，这些实验显然从未做过。

6.2 湍流能量平衡方程

就像总动能E的方程（6.4）从方程（6.3）得到一样，我们可以从方程（6.8）对$i=j$求和后得到下面的涨落运动动能的平均密度$E_t=\frac{1}{2}\rho\overline{u_\alpha'u_\alpha'}$的方程：

$$\frac{\partial E_t}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(E_t\overline{u}_\alpha+\frac{1}{2}\rho\overline{u_\beta'u_\beta'u_\alpha'}+\overline{p'u_\alpha'}-\overline{u_\beta'\sigma_{\alpha\beta}'}\right)=\rho\overline{u_\alpha'X_\alpha'}-\rho\overline{\varepsilon}_t-\rho\overline{u_\alpha'u_\beta'}\frac{\partial\overline{u}_\beta}{\partial x_\alpha},\tag{6.15}$$

其中

$$\rho\overline{\varepsilon}_t=\overline{\sigma_{\alpha\beta}'\frac{\partial u_\beta'}{\partial x_\alpha}}=\frac{\rho\nu}{2}\sum_{i,j}\overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)^2}$$

是涨落运动黏滞能量耗散的平均速率。这个方程左边括号中的表达式给出了平均运动、压强涨落、内摩擦（分子黏滞）力以及“湍流黏滞”（即速度的涨落成分，$\frac{1}{2}\rho\overline{u_\beta'u_\beta'u_\alpha'}$）输运湍流能量的湍流能流密度。$E_s$和$E_t$的方程右边出现的

$$A=-\rho\overline{u_\alpha'u_\beta'}\frac{\partial\overline{u}_\beta}{\partial x_\alpha}\tag{6.16}$$

项相反的符号描述了平均运动和涨落运动互相的能量交换。后面我们将仔细讨论这一项的值。

方程（6.15）是湍流的一般能量平衡方程。它表明，流动中一个给定点除的湍流能量密度可能随流体中不同部分的湍流能量输运（即，湍流能量

扩散）、外力涨落的作用、黏滞能量耗散以及部分平均运动能量转换为湍流能量或者反过来，部分湍流能量转换为平均运动能量而变化。当然，这个方程中的湍流能量也可以替换为湍流强度（即，替换为单位质量流体的湍流平均动能）$b = \frac{E_t}{\rho} = \frac{1}{2}\overline{u'_\beta u'_\beta}$。如果现在我们用符号$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \overline{u}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$表示对平均运动的一阶导数，那么因为$\frac{\partial \overline{u}_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0$，所以方程（6.15）可以简化为这种形式

$$\frac{Db}{Dt} = -\overline{u'_\alpha u'_\beta}\frac{\partial \overline{u}_\beta}{\partial x_\alpha} - \overline{\varepsilon}_t + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[-\frac{1}{2}\overline{u'_\beta u'_\beta u'_\alpha} - \frac{1}{\rho}\overline{p' u'_\alpha} + \nu \overline{u'_\beta\left(\frac{\partial u'_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u'_\beta}{\partial x_\alpha}\right)}\right] + \overline{u'_\alpha X'_\alpha}. \tag{6.17}$$

能量平衡方程（6.15）或（6.17）在这个意义上使雷诺方程完备：它对湍流的统计特征施加了另一个重要限制。的确，它限制了不出现在雷诺方程中的新未知量$\overline{u'_\beta u'_\beta u'_\alpha}$、$\overline{p' u'_\alpha}$和$\overline{\varepsilon}_t$，从而得到了对湍流更完备的描述。然而，方程（6.17）中含有这些新的未知量的项的物理意义相当清晰。这对于把它们近似用更简单的特征量表示有很大的帮助。此外，在很多情形，例如，如果湍流几乎是空间均匀的，那么在一阶近似下可以忽略描述湍流能量扩散的项，因为这里能量的空间输运只起很小的作用。Kolmogorov (1942)首先提出使用能量平衡方程使雷诺方程完备。

让我们从包含压强涨落的项开始，更详细地考虑湍流能量平衡方程中的各项。在E_t的一般能量平衡中，这些项不重要。如方程（6.15）和（6.17）所示，对于不可压缩流体，压强涨落只会导致额外的湍流能量从流体中某些部分输运到其他部分。所以，如果我们考虑一团流体，通过其边界没有向内或向外的湍流能量流量，压强涨落一般对这团流体的总湍流能量的变化没有影响。此外，假设压强涨落对湍流能量流量密度的贡献在很多情形相对较小似乎是合理的。然而，这些涨落在湍流中起到了非常重要的作用。特别地，考虑物理量$E_i = \frac{1}{2}\rho\overline{u_i'^2}$（不对$i$求和），它是沿坐标轴的平均动能涨落密度。对于这些物理量，假设$X'_i = 0$，方程（6.8）可以简化为这种形式

$$\frac{\partial E_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(E_i \overline{u}_\alpha + \frac{1}{2}\rho\overline{u_i'^2 u'_\alpha} + \overline{p' u'_i}\delta_{i\alpha} - \nu\frac{\partial E_i}{\partial x_\alpha}\right) = \overline{p'\frac{\partial u'_i}{\partial x_l}} - \rho\overline{\varepsilon}_i - \rho\overline{u'_i u'_\alpha}\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_\alpha}, \tag{6.18}$$

其中

$$\rho\overline{\varepsilon}_i = \mu\sum_\alpha \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}\right)^2} > 0.$$

物理量$\rho\overline{\varepsilon}_i$可以定义为能量$E_i$的“耗散”。（如果雷诺数足够大，由于小尺度运动的各向同性，这些“部分耗散”都等于$\rho\overline{\varepsilon}_t/3$，见本书第2卷

第8章。）

为了明确，现在让我们假设，平均运动平行于Ox_1方程（故而$\overline{u}_2 = \overline{u}_3 = 0$），并且湍流在$Ox_1$ 和Ox_2方向是均匀的（即，湍流的所有平均特性仅依赖于x_3）。使用连续性方程$\frac{\partial u'_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0$，我们可以把方程（6.18）重写为这种形式

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{2}\rho\overline{u_1'^2 u_3'} - \nu\frac{\partial E_1}{\partial x_3}\right) = -\overline{p'\frac{\partial u_2'}{\partial x_2}} - \overline{p'\frac{\partial u_3'}{\partial x_3}} - \rho\bar{\epsilon}_1 - \rho\overline{u_1'u_3'}\frac{\partial \overline{u}_1}{\partial x_3},\\
&\frac{\partial E_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{2}\rho\overline{u_2'^2 u_3'} - \nu\frac{\partial E_2}{\partial x_3}\right) = \overline{p'\frac{\partial u_2'}{\partial x_2}} - \rho\bar{\varepsilon}_2,\\
&\frac{\partial E_3}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{2}\rho\overline{u_3'^3} + \overline{p'u_3'} - \nu\frac{\partial E_3}{\partial x_3}\right) = \overline{p'\frac{\partial u_3'}{\partial x_3}} - \rho\bar{\varepsilon}_3.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

方程（6.19）表明$\overline{p'\frac{\partial u_2'}{\partial x_2}}$和$\overline{p'\frac{\partial u_3'}{\partial x_3}}$ 描述了纵向涨落能量E_1和横向能量E_2和E_3的互相交换。此外，从这些方程可以明显看到，纵向涨落的能量可以由平均流动的能量维持[这个过程由方程（6.19）的第一个方程的$-\rho\overline{u_1'u_3'}\frac{\partial \overline{u}_1}{\partial x_3}$描述]，但横向涨落的能量仅能通过纵向涨落能量来增加。实际上，如果我们考虑一个稳态情形，即我们假设$\frac{\partial E_i}{\partial t} = 0$并对方程（6.19）的所有方程在空间区域$V$（没有湍流能量流穿过其边界）积分，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_V \overline{p'\frac{\partial u_2'}{\partial x_2}}dV = \rho\int_V \bar{\varepsilon}_2 dV > 0, \int_V \overline{p'\frac{\partial u_3'}{\partial x_3}}dV = \rho\int_V \bar{\varepsilon}_3 dV > 0,\\
&-\rho\int_V \overline{u_1'u_3'}\frac{\partial \overline{u}_1}{\partial x_3}dV = \int_V \overline{p'\frac{\partial u_2'}{\partial x_2}}dV + \int_V \overline{p'\frac{\partial u_3'}{\partial x_3}} + \rho\int_V \bar{\varepsilon}_1 dV = \rho\int_V \bar{\varepsilon}_t dV > 0.
\end{aligned} \tag{6.20}$$

所以平均运动的能量实际上只是直接传输到纵向涨落u_1'，而横向涨落u_2'和u_3'是通过压强涨落的作用从纵向速度涨落获得能量。于是，后者导致了能量在不同方向涨落运动之间的再分配，使得涨落运动趋于各向同性。

为了得到从纵向速度涨落输运能量到横向涨落机制的清晰图像，我们注意到

$$\overline{p'\frac{\partial u_1'}{\partial x_1}} = -\left(\overline{p'\frac{\partial u_2'}{\partial x_2}} + \overline{p'\frac{\partial u_3'}{\partial x_3}}\right)$$

的负号表示正（负）压强涨落和纵向速度涨落的收敛（发散）之间有正

相关。换句话说，u_1'的收敛导致正的压强涨落主导，而u_1'的发射导致负的压强涨落主导。同时，正的压强涨落主要导致横向涨落u_2'和u_3'发散，而负的涨落导致收敛。如果两个相邻的流体元沿平均运动方向相对运动，那么一定是这种情况。于是在它们之间的区域会通过消耗它们的能量形成正的压强涨落，并且这个压强增大会导致流体沿横向流出，和不可压缩性条件$\frac{\partial u_\alpha'}{\partial x_\alpha}=0$一致。一般来说，如果有$\overline{u_1'^2}>\overline{u_2'^2}$和$\overline{u_1'^2}>\overline{u_3'^2}$，也就是沿$Ox_1$轴的速度涨落主导，那么即使平均速度为零，压强涨落的符号也基本上由邻近流体元沿Ox_1方向收敛还是发散决定。于是这里$\overline{p'\frac{\partial u_1'}{\partial x_1}}$是负的，压强涨落会倾向于使速度的各个成分均等[见，例如Batchelor (1949a)，那里使用均匀湍流的例子计算了压强涨落]。[18]

现在让我们考虑$A=-\rho\overline{u_\alpha' u_\beta'}\frac{\partial \overline{u}_\alpha}{\partial x_\beta}$项，它在能量平衡方程中描述了平均运动和涨落运动之间的能量交换。在$A>0$空间的一个给定点，这点的湍流能量会消耗平均运动能量而增加。如果反过来，$A<0$，那么平均运动的能量密度会消耗涨落能量而增加。后一种可能性第一眼看来是自相矛盾的，这需要更多仔细的分析。

方程（6.15）表明，对于不可压缩流体在非涨落体积力场中的流动，在一个没有穿过其边界湍流能量内流的空间内唯一可能的湍流能量源是平均运动能量的转换。在这些条件下，湍流的起源和发展或者给定空间中稳态的维持仅在A对整个体积积分为正的条件下是可能的[见，例如方程（6.20）]。特别地，我们在管、渠和边界层中不可压缩流体的流动（入流具有低的“初始湍流”）中碰到这些条件，其中$\rho\overline{u_i' u_j'}$和$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}$的直接测量表明，通常来说，$A$在湍流中所有点都是正的（这和5.8节中的精度半经验理论符合得很好）。

然而，如果湍流有某些“外”能量源，例如，如果它是流体人为混合导致的，或者在可压缩流体的情形，如果它由于热量流入导致存在密度分层而出现，那么就不能排除湍流能量转换为平均运动能量的可能性，即$A<0$的可能性。这正是地球大气环流尺度大气湍流的情形。在此情形我们必须通过湍流理解所谓*宏观湍流*（macroturbulence），即叠加在规则的大气环流上的气旋和反气旋的不规则大尺度运动的总和。统计描述这种宏

---

[18]这些论证证实了这个假设，$\overline{p'\frac{\partial u_1'}{\partial x_1}}$一定包含正比于方程（6.10）和（6.12）中$-(\overline{u_1'^2}-\overline{u_2'^2})\sim(\overline{u_1'^2}-\overline{u_3'^2})$的项。我们进一步注意到，由于$\overline{p'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}$的张量特性，自动得到

$$-\overline{p'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}\sim 3\overline{u_i' u_j'}-2b\delta_{ij},$$

如方程（6.10）和（6.12）所述。所以自然的是认为压强涨落引入了对$\frac{\partial}{\partial t}\rho\overline{u_i' u_j'}$（其中$i\neq j$）的贡献，正比于$-\rho\overline{u_i' u_j'}$，即它们导致所有雷诺应力$\tau_{ij}^{(1)}, i\neq j$的绝对值减小。

观湍流的想法是Defant (1921)首先提出的。在大气环流的条件下，个别的“湍流扰动”（气气旋和反气旋）完全可以由局部热量流入所引入的能量产生，而之后，它们的一部分能量也可能转移到大气环流的平均流动中。很久以前，地球物理学家通过研究整个大气的能量、动量和角动量平衡的数据得出结论，如果不假设在某些大气区域，扰动能量转换为平均流能量，就无法解释观测结果[见，例如Rossby (1948)的综述文章]。人们随后对这种能量转换的可能性进行了理论分析[见，例如Lorenz (1953)，其中给出了确定A符号的条件]。最后，我们注意到，对于构成大气环流的流动，很多作者基于方程（6.16），根据气象观测数据直接计算了A值。而且，在很多情形，实际上发现$A<0$。关于这一点，见，例如Monin (1956c)、Gruza (1961)以及特别是Starr (1968)的专著，所有这些文献都含有大量额外书目。

和方程（6.15）的推导类似，我们可以得出被动外加物（或温度）的浓度的平均平方涨落（即方差$\sigma_\vartheta^2=\overline{(\vartheta-\overline{\vartheta})^2}=\overline{\vartheta'^2}$）的平衡方程。这个方程具有如下形式：

$$\frac{\partial\overline{\vartheta'^2}}{\partial t}+\overline{u}_\alpha\frac{\partial\overline{\vartheta'^2}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\overline{u'_\alpha\vartheta'^2}-\chi\frac{\partial\overline{\vartheta'^2}}{\partial x_\alpha}\right)=2\overline{\vartheta' R'}-2\overline{u'_\alpha\vartheta'}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial x_\alpha}-2\overline{N}\qquad(6.15')$$

其中

$$2\overline{N}=2\chi\sum_i\overline{\left(\frac{\partial\vartheta'}{\partial x_i}\right)^2}$$

是由于分子扩散作用导致的平均平方涨落$\overline{\vartheta'^2}$的平均减小速率（这个量通常被称为*浓度或温度耗散*）而R'是在给定点ϑ的外源的强度涨落（例如，辐射内流以及当ϑ为大气温度时，由于水的相变导致的温度升高）。这个方程中的$A=-2\overline{u'_\alpha\vartheta'}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial x_\alpha}$描述了浓度（或温度）的湍动流量和平均浓度（温度）梯度的相互作用导致的平均平方涨落$\overline{\vartheta'^2}$的产生。$\overline{u}_\alpha\frac{\partial\overline{\vartheta'^2}}{\partial x_\alpha}$描述了平均运动导致的$\overline{\vartheta'^2}$的平移。括号中的表达式给出了分子扩散和湍流扩散导致的$\overline{\vartheta'^2}$的流量密度。

6.3 黏滞和热扩散的一般概念

在5.1节对平面平行流的情形引入了涡黏滞。这在第5节后面多次用于描述简单的实验室湍流（特别参见5.9节）。现在我们将展示类似的系数如何可以对任意三维流动定义。

让我们假设湍流仅由于部分平均流动能量转移到小尺度扰动能量中而产生，即由于A是正的。合理的是考虑在此情形，湍流的所有统计特征

（特别是雷诺应力）一定依赖于平均速度场。然而，对于平均运动，雷诺应力类似于流体层流中的黏滞应力。所以，如果平均运动具有流体作为刚体的整体运动特征，即如果它没有应变，那么自然的是假设作用于流体中任意选定面元的雷诺应力沿这个面元的法线方向。但是在那种情形，张量$\rho\overline{u_i'u_j'}$是各向同性的：$\rho\overline{u_i'u_j'} = c\delta_{ij}$，其中$c = \frac{1}{3}\rho\overline{u_\alpha' u_\alpha'} = \frac{2}{3}\rho b$。于是，湍流能量$E_t = \rho b$在明确的意义上类似于压强。然而，如果平均运动导致流体粒子的相对位移，那么应力$\tau_{ij}^{(1)} = -\rho\overline{u_i'u_j'}$显然一定依赖于平均速度导数。我们限制于平均速度梯度相当小的情形，有可能在一阶近似下仅考虑一阶导数$\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j}$并假设$\tau_{ij}^{(1)}$对这些导数的依赖是线性的。这个想法是尝试引入涡系数的一般概念的基础。

因为应力$\rho\overline{u_i'u_j'}$形成了一个对称张量，所以它们对导数$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$的依赖一定具有张量的性质。物理量$\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j}$不形成一个对称张量，但由它们可以写出一个对称的应变率张量$\Phi_{ij} = \frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_i}$，它表征了平均流体运动对刚体运动的偏离。于是，自然的是考虑$\rho\overline{u_i'u_j'}$是张量Φ_{ij}的线性函数，在$\Phi_{ij} = 0$时变为$\frac{2}{3}\rho b\delta_{ij}$。这个线性函数的系数是“涡黏滞”系数。

我们知道分子黏滞系数ν和μ是通过关系式$\nu \sim u_m l_m$、$\nu \sim \rho u_m l_m$与分子平均速度u_m和平均自由程l_m相联系的。我们可以假设对于涡黏滞系数存在类似的关系式，其中相应的无序湍流运动的特征量起到了u_m和l_m的作用。很明显，速度涨落的均方根，即$\sqrt{b}$就是类似于u_m的特征量。然而，我们必须使用湍流长度标度l（描述了湍流元保持其完整性所可以位移的平均距离[即普朗特的“混合长”，和“关联长度”同量级，借助（4.75）形式的方程从空间关联函数得到]）替代l_m。湍流在不同方向可能有不同的长度标度，因为它当然有可能是非各向同性的。所以，严格来说，在流动的每一点必须定义一个长度标度椭球，即必须给出一个2秩的长度量纲的对称张量（标度张量）。于是$M_{ij} = \rho K_{ij} = \rho\sqrt{b}l_{ij}$是涡黏滞系数。使用张量$l_{ij}$并考虑应力张量的对称性，我们可以假设

$$\rho\overline{u_i'u_j'} = \frac{2}{3}\rho b\delta_{ij} - \frac{1}{2}\rho\sqrt{b}(l_{i\alpha}\Phi_{\alpha j} + l_{j\alpha}\Phi_{\alpha i}). \qquad (6.21)$$

这个方程是Monin (1950b)提出的。可以认为它是一个更半经验的假设，类似于在5.9节中引入的那些假设。当然，张量$\rho\overline{u_i'u_j'}$和Φ_{ij}之间的最一般的线性依赖关系具有这种形式

$$\rho\overline{u_i'u_j'} = \frac{2}{3}\rho b\delta_{ij} - \rho K_{ij\alpha\beta}\Phi_{\alpha\beta},$$

其中$K_{ij\alpha\beta}$是4秩张量，对于i, j和α, β对称，满足条件$K_{jj\alpha\beta}\Phi_{\alpha\beta} = 0$。使用

方程（6.21）意味着假设张量$K_{ij\alpha\beta}$具有特定形式：

$$K_{ij\alpha\beta} = \frac{1}{2}(K_{i\alpha}\delta_{j\beta} + K_{j\alpha}\delta_{i\beta}).$$

然而，如果我们不对标度张量l_{ij}作进一步假设，那么方程（6.21）[类似于定义标量涡黏滞系数K的布西涅斯克方程（5.5）]并应看作假设的关系，而应简单视为引入替代雷诺应力$\tau_{ij}^{(1)}$的新湍流特征量l_{ij}的定义。实际上，方程（6.21）给出了六个未知量$l_{11}, l_{12}, l_{13}, l_{22}, l_{23}, l_{33}$的六个方程的方程组。转换到$\Phi_{ij}$为对角张量的坐标系中并考虑$\Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33} = 0$，容易证明这个方程组的行列式正比于$(\det||\Phi_{ij}||)^2$。所以，只要$||\Phi_{ij}|| \neq 0$，即如果$\Phi_{ij}$不是个简并张量，那么物理量$l_{ij}$唯一地由$\overline{\rho u_i' u_j'}$确定，反过来，方程（6.21）总是满足。在此情形，上面使用的论述只是l_{ij}和$K_{ij} = \sqrt{b} l_{ij}$物理解释的一种辅助，这使得如有必要，可以对其性质提出某些假设。然而，如果$\det||\Phi_{ij}|| = 0$，那么方程（6.21）对雷诺应力张量的形式施加额外的限制，这些限制有时只是现实的相当粗略的近似。例如，如果平均运动是平面平行的，故而$\overline{u}_1 = \overline{u}_1(x_3), \overline{u}_2 = \overline{u}_3 = 0$，那么相应地，只有张量$\Phi_{ij}$的分量$\Phi_{13}$和$\Phi_{31}$不为零，于是由方程（6.21），当$i \neq j$，$l_{ij} = 0$，$\overline{u_1'^2} = \overline{u_2'^2} = \overline{u_3'^2} = 2b/3$。然而，在实际的平面平行湍流中，最后一个方程$\overline{u_1'^2} = \overline{u_2'^2} = \overline{u_3'^2} = 0$一般来说不成立（见上面5.3节图26）。

然而，在某些情形使用b和l_{ij}代替张量$\overline{\rho u_i' u_j'}$仍然是有用的，因为张量$l_{ij}$具有更明显的几何意义，其主轴有时可以从几何的考虑提前给出。在很多情形，甚至由可能作为粗略的近似，简单地假设$l_{ij} = l\delta_{ij}$是一个各向同性张量，即使用假设的方程

$$\rho\overline{u_i' u_j'} = \frac{2}{3}\rho b\delta_{ij} - \rho l\sqrt{b}\Phi_{ij}. \tag{6.22}$$

（我们注意到这里张量$\overline{u_i' u_j'}$不是各向同性的，但其主轴和应变率张量Φ_{ij}相同，这在真实流动中不太对。）假设（6.22）接近布西涅斯克所用的假设。其中出现的物理量$l\sqrt{b} = K$是标量涡黏滞系数。这个假设在很多工作中讨论和使用，例如Harlow, Nakayama (1967)和Lumley (1967b)[在他的文章中，Lumley使用了时标$t^* = l/\sqrt{b}$代替了长度标度l]的文章。

根据假设（6.22），A具有这种形式

$$A = \rho K\Phi_{\alpha\beta}\frac{\partial\overline{u}_\beta}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{2}\rho K\sum_{\alpha,\beta}\Phi_{\alpha\beta}^2, \tag{6.23}$$

和平均运动的能量耗散率的表达式

$$\rho\varepsilon_s = \frac{\mu}{2}\sum_{\alpha,\beta}\Phi^2_{\alpha\beta}$$

类似，但是分子黏滞μ换成了涡黏滞K。条件$A > 0$等价于$K > 0$。因此对$A < 0$正式使用涡黏滞的概念表明引入了“负的黏滞”（参见5.9节末）。

也可以写出类似方程（6.21）或方程（6.22）的湍流热输运和质量输运方程。如果ϑ是外加物浓度，那么这种外加物沿Ox_i轴的湍流流量密度等于$\rho\overline{\vartheta' u'_i}$。在各向异性湍流的一般情形，我们可以写出

$$\rho\overline{\vartheta' u'_i} = -\rho K_{\vartheta i\alpha}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial x_\alpha}, \tag{6.24}$$

其中张量$K_{\vartheta i\alpha}$的分量是外加物的涡扩散系数。当ϑ是温度，必须在方程（6.24）两边插入系数c_p[参见5.1节的方程（5.9）和（5.9’）]。在使用标度张量l_{ij}时，可以假设涡扩散的各向异性和长度标度的各向异性有关，即$K_{\vartheta ij} = \alpha_\vartheta\rho\sqrt{b}l_{ij}$，其中$\alpha_\vartheta$是一个无量纲参量。如果我们忽略标度张量的各向异性，即令$l_{ij} \approx l\delta_{ij}$，那么方程（6.24）变为

$$\rho\overline{\vartheta' u'_i} = -\alpha_\vartheta\rho l\sqrt{b}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial x_i} = -\alpha_\vartheta\rho K\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial x_i}. \tag{6.25}$$

我们注意到即使对于平面平行湍流（对于它们，方程（6.25）只应看作新物理量$K_\vartheta = \alpha_\vartheta K$的定义），这个关系也变成了假设（需要观测验证），只要我们假设$\alpha_\vartheta =$ 常量（即空间和时间不变量）。以纯形式的方式，我们也可以写出$\vartheta = b' = \frac{1}{2}u'_\alpha u'_\alpha$，即我们可以使用方程（6.25）计算方程（6.15）和（6.17）中的三阶速度矩

$$\frac{1}{2}\rho\overline{u'_\beta u'_\beta u'_i} = \rho\overline{b' u'_i} = -\alpha_b\rho l\sqrt{b}\frac{\partial b}{\partial x_i} = -\alpha_b\rho K\frac{\partial b}{\partial x_i}, \tag{6.26}$$

其中α_b是数值系数，不一定和α_ϑ相同[当然，方程（6.26）自己是另一个半经验假设]。类似地，我们可以用$\overline{\vartheta'^2}$替代ϑ并计算方程（6.15’）中的三阶矩如下：

$$\overline{u'_i\vartheta'^2} = -\alpha_c K\frac{\partial\overline{\vartheta'^2}}{\partial x_i}$$

其中α_c是一个新的无量纲系数[见，例如Csanady (1967a, 1967b)的工作]。

采用假设关系式（6.22）和（6.26），我们在能量平衡方程中替代变量$\rho\overline{u'_i u'_j}$和$\rho\overline{u'_\beta u'_\beta u'_i}$引入了特征量$l$（也可以替换为$t^* = l/\sqrt{b}$）和$b$（或

者$K=l\sqrt{b}$），即我们极大地减少了未知量的数量。下一步式建立能量耗散率ε_t（也作为未知量出现在方程（6.17）中）与l和b（或l 和K，或t^* 和b）之间的联系。如果我们假设存在这个联系，那么其形式可以唯一地由量纲考虑得到

$$\overline{\varepsilon}_t=\frac{b^{3/2}}{c^4 l}=\frac{b}{c^4 t^*}=\frac{K^3}{c^4 l^4}, \tag{6.27}$$

其中c^4是另一个非负无量纲参量（我们把它写为另一个数的四次方的原因将在6.6节看到）。还是可以简单认为关系式（6.27）式新物理量c的定义，替代$\overline{\varepsilon}_t$（例如，假设K和l借助$\tau_{13}^{(1)}=\rho K\frac{\partial \overline{u}_1}{\partial x_3}$和$K=l\sqrt{b}$给出）。然而，如果我们假设$c=$常量，那么方程（6.27）马上变为额外的半经验假设。

类似地，如果我们把方程（6.15'）中的表达式$\overline{u_i'\vartheta'}$和$\overline{u_i'\vartheta'^2}$替换为半经验关系（6.25）和（6.26'）并同时使用下面关于$\overline{N}$的假设

$$2\overline{N}=\frac{\overline{\vartheta'^2}b^{1/2}}{c_\vartheta l}=\frac{\overline{\vartheta'^2}}{c_\vartheta t^*}=\frac{\overline{\vartheta'^2}K}{c_\vartheta l^2} \tag{6.28}$$

（其中c_ϑ是一个新的无量纲常量[参见Csanady (1961a, 1967b)]），我们可以得到平方平均浓度（或温度）涨落的半经验平衡方程。

6.4 不可压缩流体中的能量平衡

考虑流体的可压缩性，特别是存在密度涨落ρ'，上面的计算中就引入了相当大的复杂性。平均动量密度现在等于$\overline{\rho u_i}=\overline{\rho}\overline{u}_i+\overline{\rho u_i'}$，其中$\overline{\rho u_i'}=\overline{\rho' u_i'}$是涨落运动的平均动量密度，在密度涨落为零的时候变为零。类似地，平均动量密度具有这种形式

$$\overline{E}=\frac{1}{2}\overline{\rho u_\alpha u_\alpha}=\frac{1}{2}\overline{\rho}\overline{u}_\alpha\overline{u}_\alpha+\overline{\rho u_\alpha'}\,\overline{u}_\alpha+\frac{1}{2}\overline{\rho u_\alpha' u_\alpha'}=E_s+E_{st}+E_t, \tag{6.29}$$

其中E_s是平均运动的能量密度，

$$E_t=\frac{1}{2}\overline{\rho u_\alpha' u_\alpha'}=\frac{1}{2}(\overline{\rho}\,\overline{u_\alpha' u_\alpha'}+\overline{\rho' u_\alpha' u_\alpha'})$$

是涨落运动的能量密度，$E_{st}=\overline{\rho u_\alpha'}\cdot\overline{u}_\alpha=\overline{\rho' u_\alpha'}\cdot\overline{u}_\alpha$是涨落能量的额外部分，和平均运动对动量$\overline{\rho u_i'}$的输运有关。

在写出可压缩流体的矩量方程时，我们必须把连续性的一般方程（1.1）和运动方程（1.3）作为我们的起点，我们这里可以重写运动方程为

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho u_i u_\alpha+p\delta_{i\alpha}-\sigma_{i\alpha})=\rho X_i,\quad i=1,2,3. \tag{6.30}$$

在方程（6.29）中，$\delta_{i\alpha}$和往常一样表示单位张量，$\sigma_{i\alpha}$是一般黏滞应力张量，由这个方程给出

$$\sigma_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}\delta_{ij}\right) + \zeta\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}\delta_{ij}.$$

其他符号和方程（1.3）使用的没有差异。平均方程（1.1）和（6.29）我们得到

$$\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\overline{\rho}\overline{u}_\alpha + \overline{\rho u'_\alpha}) = 0, \tag{6.31}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho u_i} + \overline{\rho u'_i}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\overline{\rho u_i u_\alpha} + \overline{\rho u'_i u_\alpha} + \overline{\rho u'_\alpha u_i} + \overline{\rho u'_i u'_\alpha} + \overline{p}\delta_{i\alpha} - \sigma_{i\alpha}) = \overline{\rho X_i} + \overline{\rho' X'_i}, \tag{6.32}$$

它们在此情形起到了不可压缩流体湍流雷诺方程（5.1）的作用。借助方程（6.30）和方程

$$\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial t} + \overline{u}_\alpha\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_\alpha} + \overline{u'_\alpha\frac{\partial u'_i}{\partial x_\alpha}} = \overline{X}_i - \overline{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_{i\alpha}}{\partial x_\alpha}}$$

（方程（1.4）的推论[所以仅在忽略黏滞涨落时适用]），我们也可以得到导数$\frac{\partial\overline{\rho u_i}}{\partial t}$的表达式。于是我们得到

$$\frac{\partial\overline{\rho u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\overline{\rho u_i u_\alpha} + \overline{\rho u'_i u'_\alpha} + \overline{p}\delta_{i\alpha} - \overline{\sigma}_{i\alpha}) = \overline{\rho X_i} + \varphi_i, \tag{6.33}$$

其中

$$\varphi_i = \overline{u'_i\frac{\partial\overline{\rho u'_\alpha}}{\partial x_\alpha}} - \overline{u}_i\frac{\partial\overline{\rho u'_\alpha}}{\partial x_\alpha} + \left(\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i} - \overline{\rho}\overline{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}}\right) - \left(\frac{\partial\overline{\sigma}_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} - \overline{\rho}\overline{\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_{i\alpha}}{\partial x_\alpha}}\right) \tag{6.34}$$

对于不可压缩流体变为零。方程（6.32）和（6.31）的比较表明

$$\frac{\partial\overline{\rho u'_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\overline{\rho u'_i u_\alpha} + \overline{\rho u'_\alpha u_i} + \overline{\rho' u'_i u'_\alpha}) = \overline{\rho' X'_i} - \varphi_i. \tag{6.35}$$

所以φ_i具有清晰而重要的物理意义：它们描述了平均运动和涨落运动之间的动量交换。

由动力学方程（6.29）和连续性方程（1.1）也容易得到张量$\rho u_i u_j$的方程，和相应不可压缩流体的方程[6.1节方程（6.3）]的差别仅在于现在σ_{ij}表示可压缩流体中的黏滞应力。特别地，可压缩流体中的动能密

度$E = \frac{1}{2}\rho u_\alpha u_\alpha$满足方程

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(Eu_\alpha + pu_\alpha - u_\beta \sigma_{\alpha\beta}) = \rho u_\alpha X_\alpha + p\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} - \rho\varepsilon, \tag{6.36}$$

它表面上和方程（6.4）的差异仅在于右边多了一项$p\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}$，描述流体元的压缩和稀疏导致的动能涨落（伴随内能的变化）。取这个方程中所有项的平均值，我们得到一个平均动能密度$\overline{E}$的方程。然而，我们不在这里写出这个方程，而是写出密度$\overline{E}$三个部分E_s、E_{st}和E_t的三个方程：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(E_s\overline{u}_\alpha + \overline{\rho}\overline{u'_\alpha u'_\beta}\overline{u}_\beta + \overline{p}\overline{u}_\alpha - \overline{u}_\beta\sigma_{\alpha\beta}) = \overline{p}\overline{u}_\alpha\overline{X}_\alpha - \\
&\qquad \overline{\rho}\varepsilon_s + \overline{p}\frac{\partial \overline{u}_\alpha}{\partial x_\alpha} + \left[\overline{u}_\alpha\overline{\varphi}_\alpha + \frac{1}{2}\overline{u}_\beta\overline{u}_\beta\frac{\partial\overline{\rho u'_\alpha}}{\partial x_\alpha}\right] + \left\{\overline{\rho}\overline{u'_\alpha u'_\beta}\frac{\partial\overline{u}_\beta}{\partial x_\alpha}\right\}, \\
&\frac{\partial E_{st}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(E_{st}\overline{u}_\alpha + \overline{\rho' u'_\alpha u'_\beta}\cdot\overline{u}_\beta + \frac{1}{2}\overline{\rho u'_\alpha}\overline{u}_\beta\overline{u}_\beta\right) = \overline{u}_\alpha\overline{\rho' X'_\alpha} - \\
&\qquad \left[\overline{u}_\alpha\overline{\varphi}_\alpha + \frac{1}{2}\overline{u}_\beta\overline{u}_\beta\frac{\partial\overline{\rho u'_\alpha}}{\partial x_\alpha}\right] + \left\{\overline{\rho' u'_\alpha u'_\beta}\frac{\partial\overline{u}_\beta}{\partial x_\alpha} + \overline{\rho u'_\alpha}\frac{D\overline{u}_\alpha}{Dt}\right\}, \\
&\frac{\partial E_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(E_t\overline{u}_\alpha + \frac{1}{2}\overline{\rho u'_\alpha u'_\beta u'_\beta} + \overline{p' u'_\alpha} - \overline{u'_\beta\sigma'_{\alpha\beta}}\right) = \overline{\rho u'_\alpha}\overline{X}_\alpha + \overline{\rho u'_\alpha X'_\alpha} - \\
&\qquad \overline{\rho\varepsilon_t} + \overline{p'\frac{\partial u'_\alpha}{\partial x_\alpha}} - \left\{\overline{\rho u'_\alpha u'_\beta}\frac{\partial\overline{u}_\beta}{\partial x_\alpha} + \overline{\rho u'_\alpha}\frac{D\overline{u}_\alpha}{Dt}\right\},
\end{aligned} \tag{6.37}$$

其中

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \overline{u}_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \overline{\rho\varepsilon_s} = \overline{\sigma}_{\alpha\beta}\frac{\partial\overline{u}_\beta}{\partial x_\alpha}, \overline{\rho\varepsilon_t} = \overline{\sigma'_{\alpha\beta}\frac{\partial u'_\beta}{\partial x_\alpha}}.$$

在这些方程中，括号中的表达式描述了能量E_s和E_{st}的相互转化，大括号里的表达式描述了E_s和E_t或E_{st}和E_t的相互转化。

方程（6.30）-（6.34）和（6.36）含有相应不可压方程中没有的一些新变量。这些新变量中最重要的时$\overline{\rho u'_i}$，涨落运动的平均动量密度的分量，或者也就是说湍流质量流量的平均密度。如果平均运动方向没有平均湍流质量流，那么$E_{st} = \overline{\rho u'_\alpha}\overline{u}_\alpha = 0$，涨落能量只由$E_t$描述。$E_t$的一般方程和不可压缩方程（6.15）之间最重要的不同是存在这一项

$$B = \overline{\rho u'_\alpha}\left(\overline{X}_\alpha - \frac{D\overline{u}_\alpha}{Dt}\right), \tag{6.38}$$

我们现在将更仔细地考虑这一项。

在实际中（自然中以及技术中）碰到的大部分湍流中，作用于流体做功的主要体作用力是引力。取Ox_3轴垂直向上，我们可以写出$X_i = Y_i - g\delta_{i3}$，其中g是引力加速度，Y_i是其他体作用力加速度的分量。然而因为引力加速度一般碧平均运动中单个粒子的加速度$\frac{D\overline{u}_i}{Dt}$以及所有其他体积力的加速度$Y_i$大得多，所以在大部分问题中我们可以写出

$$B \approx -\overline{\rho u_3'}g. \tag{6.39}$$

这个物理量的意义可以通过这个观察解释，在存在密度涨落ρ'时，浮力$-\rho' g$作用于湍流元上，故而B时浮力在流体元湍流位移上作的平均功。所以，B描述了湍流动能和引力长中变化密度的一个竖直圆柱中流体的势能之间的相互转化。这些相互转化一般在垂向密度分层的流体中起到了相当重要的作用，例如，在非中性热分层的大气中或在盐度分层的大海中。如果流体的垂向分层是稳定的，那么流体元的垂向位移伴随逆浮力做功的能量消耗，所以$B < 0$。我们注意到对于稳定分层，密度随高度减小，密度和垂向速度涨落是正相关的。另一方面，对于湍流元垂向位移期间不稳定的分层，由于分层的势能，浮力会做功，导致湍流能量增加。在此情形，$B > 0$（u_3'和ρ'负相关）。

对于大气湍流和其他一些重要情形，为了计算$\overline{\rho u_i'}$我们可以适用布西涅斯克方程并且和方程（1.73）一样假设$\rho' = -\beta\overline{\rho}T'$，其中$\beta$是介质的热膨胀系数。为了确定，我们将考虑气体的情形，根据理想气体状态方程，我们假设$\beta = 1/\overline{T}$，其中$\overline{T}$是平均温度。在此情形$\overline{\rho u_i'} \approx -\frac{\rho}{T}\overline{T' u_i'}$，即湍动质量流正比于湍动热流。所以，我们得到下面关于B的表达式：

$$B = \frac{g\overline{\rho}}{\overline{T}}\overline{T' u_3'} = \frac{gq}{c_p\overline{T}}, \text{其中} q = c_p\overline{\rho}\overline{T' u_3'}. \tag{6.40}$$

为了近似计算B，我们通常可以适用半经验方程

$$q = -c_p\overline{\rho}K_\vartheta\frac{\partial\overline{T}}{\partial x_3} = -c_p\overline{\rho}\alpha K\frac{\partial\overline{T}}{\partial x_3}$$

加上方程（6.39）给出

$$B = -\alpha\frac{g}{\overline{T}}\overline{\rho}K\frac{\partial\overline{T}}{\partial x_3}. \tag{6.41}$$

然而，有时我们必须考虑这个事实，当一个流体元垂向运动，其温度T一般来说会变化，即它不是一个严格守恒的量。但是因为流体元之间的辐射和

分子热交换几乎总是非常小，所以熵或与之有关的势温度

$$\theta = T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

（见2.4节最后）可以假设为守恒的。由于压强涨落和温度涨落相比较小（这是布西涅斯克近似的基础），$\frac{T'}{T}\approx\frac{\theta'}{\theta}$，所以$B\approx\frac{g\overline{\rho}}{\theta}\overline{\theta' u_3'}$。以此作为我们的起点，当方程（6.40）不正确时，由于温度不守恒，半经验关系（6.25）通常可以应用于势温度θ，写出

$$B = -\alpha\frac{g}{\overline{\theta}}\overline{\rho}K\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x_3}.$$

（所以再一次，α温度和动量的势涡扩散系数之比。）

6.5 热分层介质中的理查德森数和涡黏滞

在前一小节中，我们考虑了任意可压缩介质的能量平衡方程。然而，从这往后，在所有和可压缩性有关的效应中，我们仅考虑动能和密度分层势能的相互转化，而结合布西涅斯克近似，假设密度仅依赖于温度涨落（而不依赖于压强涨落）。于是可以再次假设流体是不可压缩的，即可以使用方程$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0$。然而，在垂向速度方程中，必须考虑浮力，在气态介质的情形可以写为右边额外的项$-g\beta T' = -\frac{g}{T}T'$（参见1.5节方程（1.75））。对于变化密度$\rho$的不可压缩流体可以得到完全类似的结果。这里只需要在所有接下来的方程中把$-\frac{\overline{\rho}}{T}T'$替换为$\rho'$。

所以我们假设引力是唯一的外部体作用力，我们可以以布西涅斯克近似下的动力学方程组为基础，即我们可以假设u_3满足$\beta = 1/\overline{T}$的方程（1.75）。在此情形，再次重复能量平衡方程的推导，我们得到

$$\frac{\partial E_t}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(E_t\overline{u}_\alpha+\frac{1}{2}\overline{\rho}\overline{u_\beta' u_\beta' u_\alpha'}+\overline{p' u_\alpha'}-\overline{u_\beta'\sigma_{\alpha\beta}'}\right) = -\overline{\rho}\overline{u_\alpha' u_\beta'}+\frac{g\overline{\rho}}{\overline{T}}\overline{T' u_3'}-\overline{\rho\varepsilon_t}, \tag{6.42}$$

其中$E_t=\frac{1}{2}\overline{\rho}\overline{u_\beta' u_\beta'}$。这个方程和它的不可压缩形式（6.15）的差别仅在于把右边的$\rho\overline{u_\alpha' X_\alpha'}$替换为$B=\frac{g\overline{\rho}}{T}\overline{T' u_3'}$，其意义已经在前一小节末解释。[如果我们考虑（6.19）相应的"部分能量"E_1、E_2和E_3的方程，那么B出现在第三个方程中。]特别地，方程（6.41）适用于大气湍流，因为大气中的空气运动通常可以用布西涅斯克方程以很高精度描述。

我们现在注意到在充分发展的湍流中，黏滞应力和湍流雷诺应力相比小的可以忽略（除了在壁面紧附近的黏滞亚层，我们这里不考虑这个

亚层）。所以自然的是假设黏滞力（即无序分子运动）导致的能量输运和湍流速度涨落导致的能量输运相比非常小，即方程（6.41）左边括号中的最后一项和第二项相比小得可以忽略。让我们假设湍流在Ox_1和Ox_2轴方向是均匀的。在此情形，湍流的所有统计特征只依赖于x_3，而由连续性方程$\frac{\partial \overline{u}_3}{\partial x_3}=0$，$\overline{u}_3=0$。除了用符号$x_i, u_i$表示坐标和速度，我们也使用符号$x, y, z$和$u, v, w$。忽略小的项$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\overline{u'_\beta \sigma'_{\alpha\beta}}$，我们可以把方程（6.41）写成这种形式：

$$\frac{\partial b}{\partial t}=-\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{u'_\alpha u'_\alpha w'}}{\partial z}-\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial \overline{p'w'}}{\partial z}-\overline{u'w'}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}-\overline{v'w'}\frac{\partial \overline{v}}{\partial z}+\frac{g}{\overline{T}}\overline{T'w'}-\overline{\varepsilon}_t, \quad (6.43)$$

其中$u'_\alpha u'_\alpha=u'^2+v'^2+w'^2$，而$b=\frac{E_t}{\overline{\rho}}=\frac{1}{2}\overline{u'_\alpha u'_\alpha}$是湍流强度（即单位流体质量的涨落平均动能）。

如果流动的平均速度在每个地方方向相同（即，沿Ox轴），那么方程（6.42）变得更为简化，这里

$$\frac{\partial b}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial z}\overline{\left(\frac{1}{2}u'_\alpha u'_\alpha+\frac{p'}{\rho}\right)w'}-\overline{u'w'}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}+\frac{g}{\overline{T}}\overline{T'w'}-\overline{\varepsilon}_t. \quad (6.44)$$

后一个方程也可以写为

$$\frac{\partial b}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial z}\overline{\left(\frac{1}{2}u'_\alpha u'_\alpha+\frac{p'}{\rho}\right)w'}-\overline{u'w'}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}(1-\mathrm{Rf})-\overline{\varepsilon}_t, \quad (6.45)$$

其中

$$\mathrm{Rf}=\frac{g}{\overline{T}}\frac{\overline{T'w'}}{\overline{u'w'}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}}=-\frac{g}{c_p\overline{T}}\frac{q}{\tau\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}}. \quad (6.46)$$

无量纲量Rf通过与动力学因素（来自平均运动的能量输运）的比较明显地确定了浮力在湍流能量产生中的相对作用，它被称为*流量理查德森数*（flux Richardson number）。很明显对于$q>0$（即不稳定热分层），$\mathrm{Rf}<0$；对于$q<0$（稳定分层），$\mathrm{Rf}>0$；对于中性分层$\mathrm{Rf}=0$。

在方程（6.43）中，我们已经忽略了黏滞能流。同样，经常假设压强导致的热输运和速度涨落的热输运相比较小，所以在能流平衡方程中通常忽略含有压强涨落的项。这个假设看起来非常合理，但没有严格证明。在平面壁面附近没有任何热输运的稳态流的情形（即中性热分层），会形成一个对数层，其中湍流强度b为常量（等于cu_*^2，其中$c\approx 5$，和5.3节图26的数据一致），根据量纲论证，扩散项$\overline{u'_\alpha u'_\alpha w'}$和$\overline{p'w'/\rho}$和$u_*^3$都只相差一个常数的乘数因子。所以这一层中的能流输运严格等于零，而在方程（6.44）中只有$-\overline{u'w'}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}$和$-\overline{\epsilon}_t$（它们一定互相抵消）不为零。然而，在对数层外，存在

湍动热流时，扩散项在某些情形可能和其他项相当（见下面8.5节末）。然而，它们经常被忽略，因为通常假设这些项不是很大，主要是因为它们几乎总是未知的。于是能流平衡方程具有相对简单的形式

$$\frac{\partial b}{\partial t}=-\frac{1}{2}\frac{\partial\overline{u'_\alpha u'_\alpha w'}}{\partial z}-\overline{u'w'}\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}(1-\mathrm{Rf})-\overline{\varepsilon}_t. \tag{6.47}$$

有时不丢掉扩散项，而是假设这一项正比于$\frac{g}{T}\overline{T'w'}$[因为这两项同时变为零，见例如Klug (1963)、Takeuchi, Yokoyama (1963)]。在此情形，我们不是得到方程（6.46），而是得到

$$\frac{\partial b}{\partial t}=-\overline{u'w'}\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}(1-\sigma\mathrm{Rf})-\overline{\varepsilon}_t,$$

它具有同样简单的形式，但含有额外的无量纲参量σ，这使得可以更好地符合数据。

让我们从考虑方程（6.46）开始。因为总有$\overline{\varepsilon}_t>0$，以及实际上总有$-\overline{u'w'}\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}>0$，于是由方程（6.46），稳态（无衰减）湍流仅当

$$\mathrm{Rf}<1 \tag{6.48}$$

时是可能的。方程（6.47）实际上是分层介质中湍流转捩的判据，使用扰动的能量平衡得到（见2.9节）。和能量方法得到的其他判据一样，它显然是相当粗糙的，即它给出了较大的临界理查德森数。所以，基于此，我们只能说稳态湍流对于$\mathrm{Rf}<R$是可能的，其中$R=\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}$有可能小于1（有可能小很多）。纯形式地，$1/R=1/\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}$可以认同为方程（6.46'）中的参量$\sigma$。对于这样的$\sigma$，从后一个方程得到的能量判据会给出真正的$\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}$值。

现在应用半经验关系（5.5）、（6.26）、（6.27）和（6.40）并忽略含有压强涨落的项，我们可以把方程（6.44）转换为下面的“半经验能量平衡方程”：

$$\frac{\partial b}{\partial t}=K\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}\right)^2-\frac{g}{T}\alpha K\frac{\partial\overline{T}}{\partial z}-\frac{K^3}{c^4l^4}+\frac{\partial}{\partial z}\alpha_bK\frac{\partial b}{\partial z}. \tag{6.49}$$

其中K是涡黏滞系数，即动量的涡扩散系数，以及$\alpha K=K_T$和$\alpha_bK=K_b$分别为热和能量的涡扩散系数。忽略能量扩散（即右边最后一项），我们得到下面的可能存在无衰减湍流的判据[等价于方程（6.47）]：

$$\mathrm{Ri}<\frac{1}{\alpha},\alpha=\frac{K_T}{K}. \tag{6.50}$$

这里

$$\mathrm{Ri} = \frac{g}{T} \frac{\partial \overline{T}/\partial z}{(\partial \overline{u}/\partial z)^2} = \frac{\mathrm{Rf}}{\alpha} \tag{6.51}$$

是通常的理查德森数[见2.5节最后的方程（2.3'），其中替代$\frac{\partial \overline{T}}{\partial z}$使用了$\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} = \frac{\partial \overline{T}}{\partial z} - G_\alpha$，和方程（6.40'）一致，比方程（6.40）更精确]。判据（6.49）由Richardson (1920)首先得到[假设$\alpha = 1$]。这表明$\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}} < \frac{1}{\alpha}$但没有更精确地定义$\mathrm{Ri}_{\mathrm{cr}}$值。在2.8节中我们已经看到，根据线性稳定性理论，如果在所有点$\mathrm{Ri} > \frac{1}{4}$，分层流体流动对无穷小扰动稳定。于是$\mathrm{Ri}_{\mathrm{cr\ min}} \leq \frac{1}{4}$。当然，这里$\mathrm{Ri}_{\mathrm{cr\ min}}$起到了通常流体动力学稳定性理论中$\mathrm{Re}_{\mathrm{cr\ max}}$的作用，因为大的Ri值对应于流动的稳定性。然而，另一方面，有理由假设或许当$\mathrm{Rf} \to \mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}$时，$\alpha \to 0$，对于所期望的那么大的Ri值可能存在湍流（故而$\mathrm{Ri}_{\mathrm{cr}} = \infty$，见下面的7.3节和8.2节）。

引文按照定义，$K\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = \frac{\tau}{\rho} = u_*^2$，对于稳态条件并忽略湍流能量扩散，方程（6.48）可以写为这种形式

$$\frac{u_*^4}{K}(1 - \alpha \mathrm{Ri}) = \frac{u_*^4}{K}(1 - \mathrm{Rf}) = \frac{K^3}{c^4 l^4}.$$

于是，对于涡黏滞系数K我们得到方程

$$K = u_* cl(1 - \mathrm{Rf})^{1/4}. \tag{6.52}$$

根据方程（6.51），似乎对于$\mathrm{Rf} = 1$，K会变为零（即湍流交换会停止），也就是$\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}} = 1$，$\mathrm{Ri}_{\mathrm{cr}} = 1/\alpha$，和上面说的矛盾。然而，使用$c =$ 常数的半经验关系（6.27）对于接近$\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}$的Rf 变得没有意义，所以方程（6.51）也不再适用。我们现在注意到对数层内没有热分层时$cl = \kappa z$（因为根据方程（6.48）这里$cl = K^{1/2}\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)^{-1/2}$，而$K = \kappa u_* z, \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa z}$）。所以对于任意分层，方便的是写出

$$cl = \kappa z \lambda_1(\mathrm{Rf}), \qquad K = u_* \kappa z \lambda_1(\mathrm{Rf})(1 - \mathrm{Rf})^{1/4}. \tag{6.53}$$

函数$\lambda_1(\mathrm{Rf})$必须满足条件$\lambda_1(0) = 1$和$\lambda_1(R) = 0$，其中$R = \mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}$。为零强调$\lambda_1(R) = 0$的事实，替代$\lambda_1(\mathrm{Rf})$我们可以在讨论中引入函数$\lambda(\mathrm{Rf})$使得

$$\lambda_1(\mathrm{Rf}) = \lambda(\mathrm{Rf}) \frac{(1 - \sigma \mathrm{Rf})^{1/4}}{(1 - \mathrm{Rf})^{1/4}}, \sigma = \frac{1}{R}, \tag{6.54}$$

借助这个新的函数，K的表达式写为这种形式

$$K = u_* \kappa z \lambda(\mathrm{Rf})(1-\sigma \mathrm{Rf})^{1/4}, \tag{6.55}$$

这和方程（6.52）类似，但在随后的括号里把Rf换为了$\sigma\mathrm{Rf}, \sigma = 1/R$。如果我们假设$cl = \kappa z \lambda(\mathrm{Rf})$，可以得到同样的结果（6.54）。然而，我们没有忽略湍流能量扩散，而是认为这种扩散正比于$\frac{g}{T}\overline{T'w'}$，即我们用$\sigma = 1/R$的方程（6.46'）替代方程（6.46）。在方程（6.54）中我们必须假设$\lambda(0) = 1$，但现在我们自动有$K(R) = 0$，所以我们可以假设$\lambda(\mathrm{Rf})$没有零点。特别地，在7.4节中我们将看到，如果我们简单地令$\lambda(\mathrm{Rf}) \equiv 1$，那么可以得到在很多方面合理的结果。然而需要强调，函数$\lambda(\mathrm{Rf})$的选择没有任何理论依据，完全可以改变它以更好地符合实验。我们将在下面一节更详细地讨论这一点。

平面平行热分层流动中平方平均温度涨落的平衡方程没有额外的项，可以写为

$$\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{T'^2 w'}\right) - 2\overline{w'T'}\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} - 2\overline{N} \tag{6.56}$$

[方程（6.55）中忽略了方程（6.15'）的$\chi\frac{\partial^2 \overline{T'^2}}{\partial z^2}$和$2\overline{T'R'}$项]。借助关系式（6.25）、（6.26'）和（6.27'）我们可以把后一个方程转换为这种形式的“平均平方温度涨落平衡的半经验方程”

$$\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial t} = 2\alpha K\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial z}\alpha_c K \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial z} - \frac{K\overline{T'^2}}{c_\vartheta l^2}.$$

6.6 星系大气边界层中的湍流

这里和下面的小节我们将讨论湍流能量平衡半经验方程用于实际问题的量纲例子，它们展示了研究湍流的半经验方法的典型特征。

作为第一个例子，让我们考虑地球附近大气中由于空气在下垫面的摩擦和地球转动产生的科里奥利力共同作用形成边界层的问题。摩擦力显得重要的层称为*行星边界层*（或*摩擦层*，或*埃克曼层*（Ekman layer））。我们只考虑均匀平面下垫面上方的行星边界层，我们取这个平面为$z = 0$，考虑稳态外部条件并照例假设热分层为中性的。此外，我们使用这个事实，在行星边界层中我们可以令$\overline{\rho} \approx$ 常量。所以这个问题中空气的可压缩性可以忽略。因为这层中湍流的所有统计特征量都只依赖于z，所以我们可以使用（6.42）形式的能量平衡方程。在这个方程中，我们可以忽略坐标的项（由于稳态）和右边的$\frac{g}{T}\overline{T'w'}$，因为我们已经假设分层是中性的。此外，和往常一样我们也忽略$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p'w'}}{\partial z}$，这描述了压强涨落导致的湍流能量输运。我们也可以假设这一项包含在下面方程（6.57）的右边，借助改变系数α_b。于是我们得到

$$-\overline{u'w'}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - \overline{v'w'}\frac{\partial \overline{v}}{\partial z} - \overline{\varepsilon}_t = \frac{1}{2}\frac{\partial \overline{u'_\alpha u'_\alpha w'}}{\partial z}, \tag{6.57}$$

它在应用半经验假设（6.22）、（6.26）和（6.27）[$\alpha =$ 常量]并将所有的项除以$\overline{\rho}$后有这个

形式

$$K\left[\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\overline{v}}{\partial z}\right)^2\right]-\frac{K^3}{c^4l^4}=-\alpha_b\frac{\partial}{\partial z}K\frac{\partial b}{\partial z},K=l\sqrt{b}. \tag{6.58}$$

这个方程必须和雷诺方程（6.5）一起考虑，雷诺方程在此情形可以写为

$$\frac{\partial\overline{\rho u_i'w'}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i}=\overline{\rho}\overline{X}_i,\qquad i=1,2,3. \tag{6.59}$$

（和湍流动量流$\overline{\rho u_i'w'}$相比，我们忽略了黏滞垂向动量流。）作用于边界层中的外力X_i首先是重力（竖直向下），其次是科里奥利力$\boldsymbol{Y}=2\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\omega}$（垂直于速度$\boldsymbol{u}$，所以不做功），其中$\boldsymbol{\omega}$是地球转动的加速度矢量，$\times$符号表示矢量叉乘。我们现在选择轴$Ox_1=Ox$和$Ox_2=Oy$使得$Ox$平行于表面的风。于是$\overline{X}_1$和$\overline{X}_2$等于科里奥利加速度相应的分量，即$\overline{X}_1=Y_1=2\omega_z\overline{v}$，$\overline{X}_2=Y_2=-2\omega_z\overline{u}$，其中$\omega_z=\omega\sin\varphi$是矢量$\boldsymbol{\omega}$的垂向分量，$\varphi$是观测点的纬度。使用半经验方程（6.22）计算$\overline{\rho u_i'w'}$并用雷诺方程除以$\overline{\rho}$，我们可以把这些方程（所有都是必须的）的前两个写为这种形式

$$\frac{\partial}{\partial z}K\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}+2\omega_z\overline{v}=\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x},\quad\frac{\partial}{\partial z}K\frac{\partial\overline{v}}{\partial z}-2\omega_z\overline{u}=\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial\overline{p}}{\partial y}. \tag{6.60}$$

这个问题中会给出水平压强梯度$\left(\frac{\partial\overline{p}}{\partial x},\frac{\partial\overline{p}}{\partial y}\right)$，我们假设它不依赖于坐标$x,y,z$，压强梯度不依赖于$z$是边界层理论通常的假设。在摩擦层之外，方程（6.59）中第一项[描述摩擦力]可以忽略，运动由“地转风方程”决定：

$$\overline{u}=-\frac{1}{2\overline{\rho}\omega_z}\frac{\partial\overline{p}}{\partial y}=G\cos\alpha,\overline{v}=\frac{1}{2\overline{\rho}\omega_z}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}=-G\sin\alpha, \tag{6.61}$$

其中

$$G=\frac{1}{2\overline{\rho}\omega_z}\left[\left(\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\overline{p}}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}$$

是地转风速度，α是分量为$\left(-\frac{\partial p}{\partial y},\frac{\partial p}{\partial x}\right)$的矢量和表面风之间的夹角（行星边界层中总的风转动角），还有待确定。

方程（6.57）和（6.59）使得我们可以确定摩擦层中风的分布$\overline{u}(z)$、$\overline{v}(z)$，如果涡黏滞系数$K(z)$作为z的函数给出，或者假设函数$l(z)$以某种方式给出[这最后一个假设在某些方向比$K(z)$形式的假设更优]。很多工作中使用了这两种不同的假设。例如基于$l(z)$的不同假设的Monin (1950a)、Blackadar (1962)、Lettau (1962)和Appleby, Ohmstede (1965)，以及含有广泛参考文献的Zilitinkevich, Laykhtman, Monin (1967)和Zilitinkevich (1970)详细的综述。让我们首先估计大气表面层中湍流剪切应力x分量$\tau_x=\overline{\rho}K\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}=\overline{\rho}u_*^2$随高度的变化。将（6.59）第一个方程对高度积分，我们有

$$u_*^2(0)-u_*^2(H_0)=\int_0^{H_0}\left(2\omega_z\overline{v}-\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}\right)dz<\int_0^{H_0}\left(-\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}\right)dz<2\omega_zH_0G.$$

这里我们使用了这个事实，省略$2\omega_z\overline{v}$加强了不等式，因为科里奥利力部分补偿了压强梯度的作用。我们可以选择H_0使得u_*^2在厚度H_0的层中的相对变化不超过容限a，即满足条件

$$\frac{u_*^2(0)-u_*^2(H_0)}{u_*^2(0)}\le a.$$

为此，要求满足下面的不等式就足够了：

$$H_0 < \frac{a u_*^2(0)}{2\omega_z G}. \tag{6.62}$$

根据数据，u_*/G的量级为0.05。此外，对于适中的纬度，$2\omega_z \sim 10^{-4}\ \mathrm{sec}^{-1}$，所以对于$G \sim 10\ \mathrm{m/sec}$，我们得到$\frac{u_*^2(0)}{2\omega_z G} \sim 250\ \mathrm{m}$。对于容限$a = 20\%$，我们得到表面层厚度的一个估计$H_0 \sim 50\ \mathrm{m}$。在这一层中我们可以忽略科里奥利力的作用，以及这个力造成的风的旋转，并假设u_*为常量，即对于风速我们可以使用通常的对数方程。于是在这一层中

$$K = \kappa u_* z, \quad \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa z}, \quad \frac{\partial \overline{v}}{\partial z} = 0, \quad b = c_1 u_*^2 = 常量,$$

其中c_1是一个常系数，可以从例如图26的数据估计，最终，由方程（6.57）

$$cl = \kappa z, \quad l = \frac{\kappa}{c} z. \tag{6.63}$$

我们现在转向方程（6.59）。将这些方程对z求导，我们可以把结果写成这种形式的方程：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2 l \omega_z \frac{f}{K}, \tag{6.64}$$

其中$f = K\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} + i \frac{\partial \overline{v}}{\partial z}\right)$是表征剪切应力（除以密度$\overline{\rho}$）的两个分量的复物理量。在表面层中$f$取值$u_*^2$。此外，借助$f$，湍流能量平衡方程（6.57）可以写为

$$\frac{|f|^2}{K} - \frac{K^3}{c^4 l^4} = -\alpha_b \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial}{\partial z} \frac{K^2}{l^2}. \tag{6.65}$$

除了决定大气表面层中湍流状态的参数u_*，方程（6.63）和（6.64）也含有科里奥利参数$2\omega_z$。由这两个参量，我们可以写出长度标度

$$H = \frac{\kappa u_*}{2\omega_z} \tag{6.66}$$

（这里为了方便加入了冯·卡门常量κ。）

使用量纲考虑，我们现在可以写出

$$f = u_*^2 F\left(\frac{z}{H}\right); \quad K = \kappa u_* z \Phi\left(\frac{z}{H}\right); \quad cl = \kappa z \Psi\left(\frac{z}{H}\right), \tag{6.67}$$

其中无量纲函数$F(\zeta)$、$\Phi(\zeta)$、$\Psi(\zeta)$需要进一步定义，而对于$\zeta = 0$它们都等于1。在把关系式（6.66）带入方程（6.63）-（6.64）后，我们得到有三个未知量的两个方程。所以使系统闭合还需要一个方程。在缺少长度标度l对高度的依赖的可靠数据的情况下，为了简单，Monin (1950a)假设，$\Psi(\zeta) \equiv 1$。在这个假设下，方程（6.63）-（6.64）[带入方程（6.66）后]取这种形式

$$\zeta \Phi \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} = iF, \quad |F|^2 - \Phi^4 = -\delta \zeta \Phi \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\zeta \Phi \frac{\partial}{\partial \zeta} \Phi^2\right), \tag{6.68}$$

其中$\delta = \alpha_b \kappa^2 c^2$使量级为1的数。这个方程中出现的函数$F$和$\Phi$由于其物理意义，当$\zeta = \frac{z}{H} \to \infty$时趋向于零。

可以证明，如果$\delta > 0$，方程组（6.67）有唯一的衰减解。然而，对于$\delta = 0$，没有$\zeta \to \infty$时的衰减解，但确实存在一个当ζ趋向于某个有限值时趋向于零的解。换句话说，这个情形的湍流边界层具有有限厚度。Monin将方程（6.67）从$\delta = 0$到$\delta = \kappa^2 \approx 0.16$数值

积分。对于$\delta = 0$，湍流层的厚度接近$10H$，即它非常大。对于$z < 2H$，$\delta = 0$和$\delta = \kappa^2$的函数$F(\zeta)$和$\Phi(\zeta)$彼此非常接近。

$F(\zeta)$确定后，不同高度的风速矢量$(\overline{u}, \overline{v})$可以从方程（6.59）得到，它可以方便地写为这种形式

$$\overline{u} + \mathrm{i}\overline{v} = Ge^{-\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{i}\frac{u_*}{\kappa}F'\left(\frac{z}{H}\right). \tag{6.69}$$

参数u_*和α是未知的。我们回想一下u_*也出现在H的方程中。为了确定它们，我们使用这个事实，风速在某个高度z_0（“粗糙高度”，可以假设为已知）变为零。于是，对于$z = z_0$，零方程（6.68）等于零，我们得到

$$\varphi(\zeta_0) = \frac{F'(\zeta_0)}{\zeta_0} = \eta e^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}, \tag{6.70}$$

其中$\zeta_0 = \frac{z_0}{H}$，$\eta = \frac{\kappa^2 G}{2\omega_z z_0}$是已知的。可以假设函数$\varphi(\zeta_0)$为已知，因为$F(\zeta)$已经确定了。于是

$$\alpha = frac3\pi2 - \mathrm{arg}F'(\zeta_0). \tag{6.71}$$

此外，因为$\eta = |\varphi(\zeta_0)|$，$\zeta_0 = \psi(\eta)$，其中$\psi$是$|\varphi|$的反函数。后一个关系式可以重写为

$$\frac{u_*}{G} = \frac{\kappa}{\eta\psi(\eta)}, \tag{6.72}$$

这就完全确定了未知参数。由于粗糙高度z_0通常足够小使得可以令$K(z_0) = \kappa u_* z_0$，即$\Phi(\zeta_0) = 1$，所以这个确定过程可以极大简化。所以对于ζ_0量级的ζ，函数$F(\zeta)$可以从$\phi = 1$的方程（6.67）得到，结合边界条件$F(0) = 1$，有$F = 1 + \alpha\zeta + i\zeta\log\zeta + ...$，即$F'(\zeta_0) \approx i\log\kappa\zeta_0 + b$，其中$b = A + iB$是一个复常数[参见Kazanskiy, Monin (1961)]。因为$\eta\zeta_0 = \kappa H/u_* = \kappa/\xi$，其中$\xi = u_*/G$，方程（6.69）现在可以重写为这种形式

$$\log\frac{\eta}{\kappa^2} = B - \log\xi + \left(\frac{\kappa^2}{\xi^2} - A^2\right)^{1/2}, \quad \sin\alpha = -\frac{A\xi}{\kappa} \tag{6.73}$$

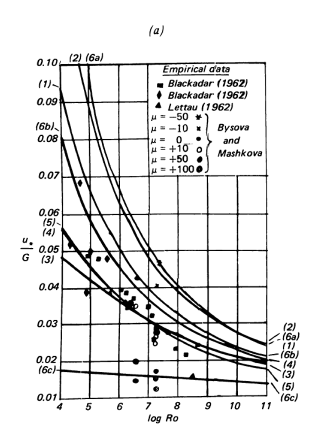
其中$\xi = u_*/G$。常数b通过求解整个边界层中完整的方程组（6.67）得到。对于$\delta = 0$，我们得到$b = -1.69 + 2.49i$，对于$\delta = 0.16$，我们得到$b = -1.81 + 1.71i$。

我们必须进一步注意到，当我们对整个摩擦层中风的分布进行近似时，必须取“粗糙参数”z_0的值比表面层中风的分布的近似所使用的值大很多。这是自然的，因为当所考虑的这个现象的垂向标度增大，必须同时增大水平标度，于是必须引入表征下方表面大范围“粗糙度”的特征量。

考虑到这一点，将使用方程（6.72）的计算和Lettau (1962)、Blackadar (1962, 1967)、Bysova, Mashkova (1966)和Kurpakova, Orlenko (1967)的数据比较表明对$\delta = 0$计算的ξ和α值显然和实验数据不符。然而，对于$\delta = 0.16$它们和实验定性符合（见图46曲线2，其中用罗斯贝数$\mathrm{Ro} = \eta/\kappa^2 = G/2\omega_z z_0$替代参数$\eta$）。

很多其他人也用稍微不同的半经验假设得到了非常类似的结果。例如，Blinova, Kibel (1937)假设对于所有z，$K(z) = \kappa u_* z$（即$\Phi(\zeta) \equiv 1$）。他们的结果用图46中曲线1表示。Blackadar (1962)使用了和Monin (1950a)同样的方法，但忽略了湍流能量的垂向扩散（即，他假设$\alpha_b = \delta = 0$）。然而，和Monin不同，根据Lettau (1950)相当粗略的数据，Balckadar 假设尺度l仅在大气最低层随高度线性增长，但其增长率随后下降，当$z \to \infty$，l渐近趋向于某个不变长度λ/c，他旋转了$\lambda = \beta G/2\omega_z$。所以函数$cl(z)$选为这种形式

$$cl(z) = \frac{\kappa z}{1 + \kappa z/\lambda} = \frac{\kappa z}{1 + \kappa 2\omega_z z/\beta G}.$$



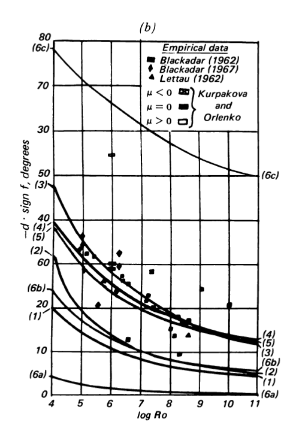


图 46 在不同分层参数μ值，行星边界层中u_*/U（图a）和风的旋转角度α对罗斯贝数Ro（图b）的依赖。1)Blinova, Kibel (1937) 理论，$\mu = 0$；2)Monin (1950a)理论，$\mu = 0$；3) Blackadar, Laykhtman (1967)理论，a)$\mu = -100$，b) $\mu = 0$，c) $\mu = +100$。

数值参数β选为使得得到的转动角和在布鲁克海文（Brookhaven，位于纽约附近）得到的观测数据相符。可以发现这个条件在$\beta = 0.00027$时满足。同时，Lettau (1962)考虑了另一种半经验理论。他也忽略了垂向能量扩散（即假设$\alpha_b = 0$），但是借助这个方程

$$K = l^2 \left[\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{v}}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2}$$

[类似普朗特公式（5.112）]定义涡黏滞系数K，并且取长度标度l为这种形式

$$l = \frac{\kappa z}{1 + 33.63(2\omega_z z/\kappa u_*)^{5/4}}.$$

让我们也参考一下Appleby, Ohmstede (1965)的工作，这个工作使用了这种形式的方程

$$l = \lambda \left[1 - \exp\left(-\frac{\kappa z}{\lambda} \right) \right]$$

以及涡黏滞K的Prandtl-Lettau方程，并把$2\omega_z\lambda/G$考虑为罗斯贝数Ro的定义函数。最后，Bobyleva, Zilitinkevich, Laykhtman (1967)考虑了大气热分层的影响，故而在方程（6.57）坐标添加了$-\frac{g}{T}\alpha K\frac{\partial \overline{T}}{\partial z}$项。他们借助冯·卡门假设（5.119）的一种特殊修正形式[这种修正将在7.4 节结合Zilitinkevich, Laykhtman (1965)讨论]定义长度标度l。所得到的这些结果除了罗斯贝数Ro，还依赖于无量纲分层参数$\mu = -\kappa^2 \frac{gq}{2\omega_z c_p \rho \overline{T} u_*^2}$。（这个新的参数时方程（6.65）的长度标度$H$和另一个长度$L = -c_p\rho\overline{T}u_*^3/\kappa gq$的比，这会在下面一节起到非常重要的作用。）

如我们已经看到的，如果知道尺度l随高度变化的规律，那么从雷诺方程和能量平衡方程我们可以得到一个三个未知函数三个方程的闭合系统。这些函数中的两个被组合为一个复函数F，这当然没有任何不同。相应的方程在不同工作中写为不同无量纲形式，上面引用的所有作者进行了数值求解。一些结果以及相应的数据收集在图46中。实验点的弥散非常强，但可以认为理论预言和数据符合得令人满意。

前面分析的主要推论是一般方程（6.72）。只有确定未知常数A和B需要特定的半经

验理论。（在考虑热分层时，这些常数变为稳定性参数μ的函数，见，例如Zilitinkevich (1970)，那里详细讨论了对μ的依赖。）接着Csanady (1967c)，现在让我们证明这些方程容易从非常简单的量纲论证得到。让我们把湍动行星边界层分为“壁面层”（其中科里奥利力和压强梯度对流动没有影响）和“外层”（其中分子黏滞和表明参数不重要）。在壁面层中，通常的壁面规律是正确的，对于动力学粗糙的壁面，这个规律可以写为这种形式

$$\overline{u}(z) = u_* f\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

其中z_0是粗糙度参数。在外层中合理的是假设速度缺定律一定正确，这个规律显然具有这种形式

$$\frac{Ge^{-\mathrm{i}\alpha} - \overline{u}(z)}{u_*} = f_1\left(\frac{2\omega_z z}{u_*}\right).$$

这里$Ge^{-\mathrm{i}\alpha}$是地转（或“自由流动”）风速度的复数值，复函数f_1右边的宗量实际上是高度z和方程（6.65）特征长度标度H（决定了湍流边界层的厚度）的比。支持这个定律的论证和支持5.5节和5.6节通常的速度缺定律的那些论证有关。现在如果我们假设存在两层之间的重叠层，其中两个定律都适用，那么容易证明在这一层中函数f和f_1都一定是对数的，即

$$\overline{u}(z) = \frac{u_*}{\kappa}\log\frac{z}{z_0}, Ge^{-\mathrm{i}\alpha} - \overline{u}(z) = -\frac{u_*}{\kappa}\left[\log\frac{2\omega_z z}{u_*} + C\right]$$

其中$C = B - iA$是一个复常量，κ和z_0在本节前面的小节中有相同的意义。量$\overline{u}(z)$的两个表达式在重叠层中相等，我们得到下面的方程：

$$\frac{1}{\kappa}\left[\log\frac{u_*}{2\omega_z z_0} - C\right] = \frac{Ge^{-\mathrm{i}\alpha}}{u_*}.$$

把最后一个方程分为实部和虚部，我们得到（6.72）的两个方程。

6.7 湍流中悬浮粒子的分布

现在让我们考虑不可压缩流体湍流中悬浮粒子运动的问题。这个现象的理论是Barenblatt (1953, 1955)发展的[也参见Kolmogorov (1954)]。这个理论的基本假设是悬浮粒子的大小和湍流的长度标度相比较小。这使得我们可以假设它们在基本的流体介质中形成了一个外加物的连续分布。这种外加物的总密度可以写为这种形式

$$\rho = \rho_0(1-s) + \rho_1 s = \rho_0 + (\rho_1 - \rho_0)s, \tag{6.74}$$

其中ρ_0和ρ_1是流体和粒子的密度，s是粒子的相对体积。在关于淤塞（silts）的工作中，s被称为“浑浊度”（turbidity）。ρ_0和ρ_1是物理常量，但“浑浊度”s由于湍流混合而涨落，所以

$$\rho' = (\rho_1 - \rho_0)s'.$$

给定点处混合物运动速度u_i（即围绕这个给定点的混合物的无穷小体积的重力中心的速度）定义为基本流体速度u_{0i}和外加物速度u_{1i} 的质量平均

$$u_i = \frac{\rho_0(1-s)}{\rho}u_{0i} + \frac{\rho_1 s}{\rho}u_{1i}. \tag{6.75}$$

混合物的运动方程可以写为

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}[\rho_0(1-s)u_{0i}u_{0\alpha}+\rho_1 s u_{1i}u_{1\alpha}+p\delta_{i\alpha}-\sigma_{i\alpha}]=-\rho g\delta_{i3}, \tag{6.76}$$

其中p是混合物中给定点的总压强，σ_{ij}是存在外加物的基本流体中的黏滞应力张量，与表示悬浮粒子相互作用的额外的张量之和。对于体作用力，我们仅考虑重力，它沿Ox_3轴x_3减小的方向。

基本流体和外加物的质量平衡方程具有这种形式

$$\frac{\partial \rho_0(1-s)}{\partial t}+\frac{\partial \rho_0(1-s)u_{0\alpha}}{\partial x_\alpha}=0, \frac{\partial \rho_1 s}{\partial t}+\frac{\partial \rho_1 s u_{1\alpha}}{\partial x_\alpha}=0.$$

将这两个方程相加，我们得到混合物的质量平衡方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha}=0. \tag{6.77}$$

另一方面，这两个方程除以ρ_0和ρ_1然后加起来，我们得到混合物的连续性方程

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}[(1-s)u_{0\alpha}+su_{1\alpha}]=0. \tag{6.78}$$

考虑这个事实，粒子很小，进一步假设湍流中流体粒子加速度和引力加速度g相比较小，哦我们可以假设基本流体和外加物的水平速度相同，而垂向速度相差某个量a，粒子的重力沉降速率。从此之后，我们限制于讨论低“浑浊度”的情形，即我们假设$s \ll 1$。于是可以假设a不依赖于s，也就是说，是常量（等于无限流体中一个粒子的重力沉降速率，我们假设这个量对所有粒子都相同）。于是我们有

$$\begin{aligned}
&u_i=u_{0i}-\frac{\rho_1 s}{\rho}a\delta_{i3}\\
&\rho_0(1-s)u_{0i}u_{0\alpha}+\rho_1 s u_{1i}u_{1\alpha}=\rho u_i u_\alpha+\frac{\rho_0\rho_1}{\rho}s(1-s)a^2\delta_{i3}\delta_{\alpha 3}.
\end{aligned} \tag{6.79}$$

运动方程（6.75）现在具有这种形式

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho u_i u_\alpha+p\delta_{i\alpha}-\sigma_{i\alpha})=-\rho\left[g+\frac{\rho_0\rho_1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{s(1-s)a^2}{\rho}\right]\delta_{i3}, \tag{6.80}$$

连续性方程（6.77）可以写为

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}=-(\rho_1-\rho_0)\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{s(1-s)a}{\rho}. \tag{6.81}$$

从现在开始，我们仅使用方程（6.73）、（6.76）、（6.79）和（6.80），考虑充满半空间$x_3 \geq 0$（也就是说，沿Ox_1、Ox_2轴均匀）的稳态流体流动中悬浮粒子分布的问题。在此情形，可以假设所有平均特征量仅依赖于坐标$z=x_3$，并且$\overline{u}_2=0$。

令$u_3=w$并对连续性方程平均，我们得到$\frac{\partial \overline{\rho w}}{\partial z}=0$或者$\overline{\rho w}=$ 常量。因为对于稳态情形没有总体的垂向质量输运，我们必须令$\overline{\rho w}=\overline{\rho}\overline{w}+\overline{\rho' w'}=0$。回想方程（6.73），我们可以把后一个关系式重写为

$$\overline{w}=-\sigma\overline{w's'}, \tag{6.82}$$

其中$\sigma=\frac{\rho_1-\rho_0}{\rho}$。由悬浮粒子存在稳态分布这一点可以得到，$w'$和$s'$之间一定是正相关

的，因为在稳态情形，粒子规则的重力沉降一定和向上的湍动输运平衡，而湍动质量流等于$\overline{\rho' w'} = (\rho_1 - \rho_0)\overline{w's'}$。于是$\overline{w} < 0$，即混合物的平均运动有向下的分量。我们回想一下，混合物速度定义为基本流体和粒子速度的质量加权平均，而不是体积加权平均。

对方程（6.80）平均我们得到

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = -(\rho_1 - \rho_0)\frac{\partial}{\partial z}\left[\overline{\frac{s(1-s)a}{\rho}}\right] \approx -\sigma\frac{\partial}{\partial z}\overline{s(1-s)a},$$

于是，对z积分后我们得到

$$\overline{w} = -\sigma\overline{s(1-s)a} + 常量.$$

这个方程中的常数项可以取为等于零，因为对于大的z，$\overline{s}$、$\overline{w's'}$以及$\overline{w}$趋向于零。所以，将这个方程和（6.81）比较我们有

$$\overline{w's'} = \overline{s(1-s)a} \approx a\overline{s}. \tag{6.83}$$

如果我们使用（6.25）类型的半经验方程

$$\overline{w's'} = -\alpha_s K\frac{\partial \overline{s}}{\partial z}, \tag{6.84}$$

那么后一个关系式具有这种形式

$$\alpha_s K\frac{\partial \ln \overline{s}}{\partial z} = -a. \tag{6.85}$$

作为混合物的平均运动方程，我们使用沿Ox_1轴方向的雷诺方程，对于不太大的z值，它具有下面的形式：

$$K\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = u_*^2 = 常量. \tag{6.86}$$

从方程（6.84）和（6.85）消去K我们得到

$$\frac{\partial \ln \overline{s}}{\partial z} = -\omega\frac{\kappa}{u_*}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z},$$

其中$\omega = \frac{a}{\alpha_s \kappa u_*}$是无量纲参量。对这个方程积分，我们得到

$$\overline{s} = \overline{s}_0 e^{-\omega\frac{\kappa\overline{u}}{u_*}}, \tag{6.87}$$

其中$\overline{s}_0$是$\overline{s}$在某个虚拟“粗糙高度”z_0的值，在这个高度$\overline{u}(z)$变为零。

去方程（6.79）右边$-\rho g\delta_{i3}$的近似值，我们看到，这个方程加上质量平衡方程（6.76）和相应的可压缩流体的方程相符。所以能量平衡方程具有和重力场中可压缩流体相同的形式。忽略湍流能量扩散效应和其他小的项，我们把这个方程写为这个形式

$$\overline{\rho}l\sqrt{b}\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)^2 - \frac{\overline{\rho}b^{3/2}}{c^4 l} - \overline{\rho w'}g = 0, \tag{6.88}$$

其中$l\sqrt{b} = K$，$B = -\overline{\rho w'}g$是单位体积混合物中湍流对悬浮粒子做的功。使用方程（6.73）和（6.82）我们得到

$$B = -\sigma\overline{\rho}g\overline{s'w'} = -\sigma\overline{\rho}g\overline{s(1-s)a}. \tag{6.89}$$

这个表达式是Velikanov (1946)首先得到的。用方程（6.83）的方法表示$\overline{s'w'}$我们得到

$$B = \alpha_s\sigma\overline{\rho}gl\sqrt{b}\frac{\partial \overline{s}}{\partial z}.$$

方程（6.87）可以简化为这种形式

$$b = c^4 l^2 \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)^2 (1 - \alpha_s \mathrm{Ri}), \tag{6.90}$$

其中

$$\mathrm{Ri} = -\sigma g \frac{\partial \overline{s} \partial z}{(\partial \overline{u}/\partial z)^2} > 0$$

是一个类似理查德森数的无量纲数。使用$K = l\sqrt{b}$的方程（6.85）消去速度梯度$\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}$我们得到

$$b = c^2 u_*^2 \sqrt{1 - \alpha_s \mathrm{Ri}}. \tag{6.91}$$

在不存在悬浮粒子时，$\mathrm{Ri} = 0$，$b = c^2 u_*^2$。方程（6.90）表明，流动中存在悬浮粒子导致湍流能量减小，即它影响了流动的动力学。这个结果被直接的实验证实。所以泥沙运动的计算（假设悬浮粒子对流动的动力学没有影响，这在沉积理论中被称为“扩散近似”）仅在足够小的Ri 是可能的。

携带悬浮粒子的流动中的平均速度$\overline{u}(z)$的分布可以借助方程（6.84）、（6.85）和（6.90）得到。如果我们引入无量纲量，写出

$$\overline{u} = \frac{u_*}{\kappa} F(\zeta), K = \kappa u_* z \Phi(\zeta), cl = \kappa z \Psi(\zeta), \overline{s} = S(\zeta), \zeta = \frac{z}{L}, \tag{6.92}$$

其中$L = \frac{u_*^2}{\alpha_s \kappa^2 \sigma g}$，于是这些方程具有这种形式

$$\zeta \Phi S' = -\omega S, \zeta \Phi F' = 1, \Phi = \Psi \left(1 + \frac{S'}{F'^2}\right)^{1/4}. \tag{6.93}$$

函数$S(\zeta)$特别尤其，它描述了悬浮粒子的垂向分布。从$T(\zeta) = \frac{1}{S(\zeta)}$的方程（6.92）消去$F$和$\Phi$我们得到

$$\frac{\omega T}{\zeta} = \Psi T' \left(1 - \frac{\omega^2}{T'}\right)^{1/4}.$$

Barenblatt研究了这个方程的一般解，没有给出函数Ψ的具体形式。他仅假设这个函数满足明显的条件$\Psi(0) = 1$，是理查德森数的非增函数，因为由于存在悬浮粒子长度标度l一定减小。这些分析的结果表明对于$\omega < 1$和$\omega > 1$，解的性质非常不同。当$\omega > 1$（低流动速度或大的粒子）粒子输运主要发生在流动底部。然而在河床区域，我们讨论的这个理论（基于s 小的假设）不适用，必须替换为更严格的理论。在河床区域外$\mathrm{Ri} \to 0$，故而悬浮粒子的分布渐近趋向于根据扩散近似得到的分布。由$\omega < 1$（大流速或小粒子），输运发生在流动主要部分。较大高度处的粒子分布渐近趋向于某个极限自守分布（Ri $\to$常量），其中$\overline{s}$反比于z，$\overline{u}(z) = \frac{u_*}{\kappa \omega} \log z +$ 常量。所以流动存在某个极限饱和度，在更大的饱和度下，这个理论在河床区域不适用。

第4章 热分层介质中的湍流

7. 推广对数层理论到热分层流动

7.1 大气表面层的热分层湍流边界层模型

在第3章中我们详细考虑了无限大平面上方的边界层中的湍流。我们的推论和实验室流动数据以及大气表面层中的空气运动的观测进行了比较。然而，我们注意到它只能用于和中性分层有关的那些观测，也就是说，用于空气温度在较低层随高度不变的情形。[1]

然而，中性分层在自然中相当罕见。实际上，在白天，地面上方的温度通常随温度剧烈下降，但是在夜间，它通常随温度升高（即产生所谓逆温）。所以中性分层仅在日落前和日出后相当短暂的时间内出现。[2]于是，表面层中的运动在大多数情形不能归类为第3章中讨论的湍流边界层的简单情形。

所以，在实践中，研究大气表面层湍流时，我们必须考虑大气中存在温度分层，这产生了密度随高度的系统性变化。我们知道在引力场中存在密度不均匀性导致出现浮力，使密度较小的流体粒子产生向上的位移，密度较大的粒子产生向下的位移。[3]于是，由于浮力做功，密度比周围介质较小（较大）的粒子在向上（向下）运动中获得额外的能量，而在向下（向上）运动中，他们花费部分能量可否浮力。于是引力场中密度分层介质的势能可以直接转换为湍流能量，并且反过来，湍流能量可以转换为介质的

[1]一般来说，中性分层意味着一个垂向梯度dT/dz等于绝热梯度G_a（在2.4节定义）的温度分布。实际上，只有在这些条件下，流体元的垂向运动蔡不会伴随示能的损失或获得。然而，因为地球大气几十米中的垂向温度梯度的典型值比G_a大几百倍，所以在大多数情形我们可以取G_a为零。所以通常有可能不区别通常的温度T和方程（2.4）的势温度θ。所以，为了简单，我们在后面总是说普通的温度，尽管严格来说，在大部分情形，我们使用的方程仅对势温度是严格的。同样，在第8节中，我们不特别提到这个事实，在某些情形，观测在几十米的相对厚的空气层中进行，使用的数据指的是普通温度，而不是势温度。

[2]在海上，情况不同，更经常观测到接近中性的分层。然而，我们在本书中不仔细考虑海上大气。

[3]这里和后面，浮力的意思使阿基米德力（由阿基米德定律描述）和重力的差。在均匀（不分层）介质中，这两个力严格互相平衡，故而重力可以简单忽略，见1.2节开头的一段。

势能。本章将致力于定量研究湍流中这种能量转换的效应。

在6.4节中我们计算了浮力做功在湍流能量平衡中的贡献。这个（单位体积的）贡献由这个方程给出：

$$B = -\overline{\rho' w'} g, \tag{7.1}$$

其中w'是垂向速度涨落[见6.4节方程（6.38）]。由方程（7.1）可以明显看到，仅当密度涨落ρ'和涨落w'相关时，密度分层会影响湍流。考虑气象的应用，我们会发现方便的是从研究密度涨落（在大气中非常难以测量）转变为研究温度涨落（容易直接测量）。这里，和6.5节中一样，我们仅考虑和温度涨落有关的密度涨落，忽略大气压强产生的小得多的密度涨落。在温度涨落不太大的情形，我们可以写出$\rho' \approx -(\overline{\rho}/\overline{T})T'$，其中$T$是绝对温度，所以在这个近似中

$$B = \frac{g}{\overline{T}} \overline{\rho} \overline{w'T'} = \frac{g}{c_p \overline{T}} q, \tag{7.2}$$

其中$q = c_p \overline{\rho} \overline{w'T'}$是垂向湍动热流（见6.4节）。所以很明显浮力对大气湍流的影响直接和从下垫面向大气（以及反过来）的湍动传热有关。这再次得出结论，当垂向温度梯度等于零时，这个效应一定消失。实际上，根据半经验理论的基本方程

$$q = -c_p \overline{\rho} K_T \frac{\partial \overline{T}}{\partial z}, \tag{7.3}$$

其中K_T是涡热扩散系数，于是

$$B = -\frac{g}{\overline{T}} \overline{\rho} K_T \frac{\partial \overline{T}}{\partial z}, \tag{7.4}$$

故而当$\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} = 0$时，$B = 0$。

在大气表面层湍流现象的理论分析中，我们必须考虑存在垂向温度分层和相关的垂向湍动热流。另一方面，在某种程度上在真实大气中总是存在的下垫面水平方向的不均匀性首先可以自然地忽略。实际上，对于相对平坦的下垫面（其一般特征在相对大的区域保持不变），这个不均匀性不起非常重要的作用，而考虑它使得理论分析变得复杂得多。所以我们仅考虑具有恒定粗糙度z_0（为了简单，也忽略位移高度h_0，它可以通过简单改变z的原点进行考虑）的无限大均匀平面$z = 0$ 上方充满半空间的流体中的简化湍流模型。于是，我们在本章中将总是假设流体变量的所有一点平均特征量仅依赖于垂向坐标z。

如果我们假设所有一点矩量仅依赖于z，我们就隐含假设了这些矩量可以确定，即大气表面层中的所有流动变量的值具有确定的统计稳定性。一

般来说，这个假设会引起怀疑，因为大气条件相当依赖于一天和一年中的时间，而除了规则的周日和周年变化，大气给定点的任意气象学变量的值也经历时标非常不同的不规则涨落。这些不规则涨落可以被认为时由于出现了不同三维尺度的湍流，从非常小尺度（量级为厘米到几分之一厘米）到非常大尺度（量级为气旋和反气旋的尺度，甚至是一般大气环流不均匀性的尺度）。所以，例如，大气给定点温度或风速的时间平均首先被证明相当依赖于平均间隔的大小，其次，对于给定的平均尺度，在周期和平均间隔大小相当或更大的情况下，不同的样本不同。这个现象被称为气象学变量“平均的漂移”，这使得确定他们的统计特征变得相当复杂。然而，实验表明如果我们限制于和一年中某个特定季节、一天中特定时间以及特定天气条件（即特定“天气”）的观测，那么在时间区间τ（比“含能涡旋”（含有湍流能量注意部分的湍流结构）的特征周期大得多）平均，气象学变量的平均值会相当稳定。但是，在此情形，相关的观测可以组成一个“统计系综”，使得我们可以进行概率平均。在大气表面层中，含能涡旋的时标可以估计为和比例L_0/U同量级，其中U是风速的典型值，L_0是含能涡旋特征的水平尺度，从数十米到数百米。所以L_0/U的量级为几十秒，在十到二十分钟时间区间的平均，风速、温度等的平均值被证明是相对稳定的，可以考虑为相应随机场概率平均的近似值。当平均周期延长到几个小时或更长，平均值会发生巨大变化，而且由于首先与中尺度湍流然后与宏观湍流有关的长期“天气波动”的影响，可以再次证明它们具有非常低的稳定性，然而，我们不在这里讨论这种类型的湍流。

除了假设水平方向均匀，我们也采用了一些和描述所研究的湍流的动力学方程有关的简化假设。首先，如已经讲到的，我们忽略压强涨落产生的密度变化，并且限制于已经对相对于“标准值”ρ_0、T_0和p_0（仅依赖于z，并且满足静态方程$\partial p_0/\partial z = -\rho_0 g$和状态方程$p_0 = R\rho_0 T_0$）的密度、稳定和压强变化线性化的方程。从此往后，$\rho_0 = \overline{\rho}$和$T_0$被简单看作常量，因为它们在表面层（数十米厚）中随高度的变化小得可以忽略。在此情形，运动方程简化为著名的“自由对流方程”或这种形式的“布西涅斯克方程”

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x} + \nu\Delta u,\\
&\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial y} + \nu\Delta v,\\
&\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z} + \nu\Delta w - \frac{g}{T_0}T',
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

在这些方程中，$-\frac{g}{T_0}T'$项描述了流体粒子的“浮力加速度”，依赖于重力。然而，忽略了科里奥利力，因为根据6.6节给出的估计，这个力对底部（大约）50 m的平均运动没有显著影响，此外它对涨落运动没有影响，较低层大气中的速度近似比平均速度小一个量级。当然，在地面上方超过几十米的高度，没有科里奥利力的方程（7.5）不再适用。在用这些方程的推论和观测进行比较时必须记住这一点。

布西涅斯克近似的连续性方程可以写为和不可压缩流体情形一样

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{7.6}$$

由此以及水平均匀性得到$\overline{w}=0$。所以平均运动是平面平行的，由平均速度矢量$\overline{\boldsymbol{u}}(z)=\{U(z),V(z),0\}$给出。同样明显的是，在没有科里奥利力，水平压强梯度不随高度变化时，矢量$\overline{\boldsymbol{u}}(z)$的方向一定不依赖于$z$。我们现在取$Ox$轴沿矢量$\overline{\boldsymbol{u}}(z)$。在此情形，方程$\overline{v}=0$成立。所以可以自然地假设流动变量的概率分布在$Oxy$ 平面的平移下不变，在对Oxz平面的反射变换下也不变。于是，特别地，$\tau_{xy}=-\rho_0\overline{u'v'}=0$，$\tau_{yz}=-\rho_0\overline{v'w'}=0$。

如果我们考虑表面层中平均风速在24小时的周期里变换10 m/sec的量级，不难估计在通常条件下（没有特别快的天气变化），方程（7.5）第一个平均方程中含有$\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}$的项被证明远小于含有平均压强梯度$\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}$的项或平均科里奥利力。所以，在我们对方程（7.5）平均时，可以舍去时间导数，我们可以假设在表面层中

$$-\rho_0\overline{u'w'}+\rho_0\nu\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}=\tau=\text{常量} \tag{7.7}$$

[见5.2节方程（5.11）]。所以似乎有可能均匀平地或海洋表面上方的表面层中的平均流动可以假设为平面平行且稳态的，剪切应力$\tau=\rho_0u_*^2$（垂向动量流）随高度恒定。

除了方程（7.5）和（7.6）我们还必须使用热量方程，这决定了温度T的时间变化。根据1.5节的结果，这个方程可以写为：

$$c_p\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right)=c_p\rho\chi\nabla^2T+Q, \tag{7.8}$$

其中Q是辐射和空气中所含水汽相变（其他形式的热量入流，特别是表面层中的动能耗散导致的加热可以完全忽略）导致的热量入流。如果我们也忽

略热量入流Q，那么我们得到通常的热传导方程

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}=\chi\nabla^2 T, \qquad (7.8')$$

其平均得到这个结论，在稳态条件下，

$$q=c_p\rho_0\overline{w'T'}-c_p\rho_0\chi\frac{\partial\overline{T}}{\partial z}=\text{常量}, \qquad (7.9)$$

即，分子和湍动热传导导致的平均垂向热流恒定[参见5.7节方程（5.73'）]。然而，如果我们也考虑Q，其主要部分通常由辐射热流组成，那么我们不是得到方程（7.9），而是得到更复杂的方程

$$q+q_s=\text{常量}, \qquad (7.9')$$

其中$\overline{Q}=-\frac{\partial q_s}{\partial z}$，故而$q_s$通常可以等同于平均垂向辐射热流。根据Robinson (1950)的初步数据[也参见Haltiner, Martin (1957)，第15章]，通常仅在靠近地面的薄空气层中q_s随高度显著变化，这一层的厚度不超过（或只是略微超过）1 m。如果这是真的，那么在我们考虑更高层时，可以令$q_s=$ 常量，即我们可以忽略热量的辐射内流$\overline{Q}$。这被这个事实间接证实，如后面将要看到的，基于方程（7.9）的理论在大多数情形和表面层中的观测数据符合得令人满意。[4]q_s 变化对q 变化的贡献相对较小也被Mordukhovich, Tsvang (1966) 的粗略估计所证实。然而，一般来说，表面空气层中近似方程$q_s=$ 常量 的正确性仍然不能视为已经明确证明，无论是理论上还是实验上。从这个观点来看，特别值得怀疑的是非常稳定的分层（例如，在夜间观测到）的条件，当湍动热流q非常小时，流量q_s 随高度的变化可能相当大[参见Funk (1960)]。因此，由Townsend (1958) 和Yamamoto, Kondo (1959)开始尝试更精确地考虑辐射传热对湍流的影响应该被认为是最合适的。此外，我们也必须注意到，湍动流量τ和q一定存在由于非零的平均风速和温度水平梯度（他们在通常认为非常均匀的地方也可能很大）导致的垂向变化[参见Mordukhovich, Tsvang (1966) 和Dyer (1968)]。然而，因为对于湍动流量的垂向变化只进行了非常粗略的估计，所以我们这里仅限于考虑从假设（7.7）和（7.9）得到的较粗糙的理论，其公式在任何情况下都必须视为澄清表面层中湍流机制的第一步。

最后，我们现在可以给出本章中研究的理想化理论模型的明确描述。我们将考虑均匀平面表面$z=0$（由给定的粗糙度z_0描述）上方的半空

[4]然而，我们必须指出，平均速度的对数分布（仅当$\tau=$ 常量时从理论得到）在管中得到很好的满足，几乎直到管的中心，那里$\tau=0$。所以这个间接证明不能被认为非常可靠。

间$z > 0$ 中的平面平行稳态流动，由布西涅斯克方程（7.5）、（7.6）和（7.8'）描述，满足给定τ和q值的条件（7.7）和（7.9）。这些条件充当了这一层的上边界的边界条件。根据我们之前的论述，我们可以预期这个模型会相对好地对应于相对平坦和均匀下垫面上方（量级为数十米）低层大气中的很多实际流动。我们也可以假设这个模型也可以应用于某些其他类型的流动，例如，海洋底部或表面层（处于等温条件，但有相当明显的盐度分层，故而也有密度分层）中的湍流，以及实验室中产生的人工湍流。（当然，在密度分层的情形，我们简单地在每个地方把$\frac{1}{T}\frac{\partial \overline{T}}{\partial z}$ 替换为$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial z}$，把$T'/\overline{T}$替换为$-\rho'/\overline{\rho}$。）然而，从此往后，为了明确，我们将总是谈论大气表面层中的湍流（因为大部分数据与此有关），令“表面层”在每个地方指我们所描述的密度分层介质的恒定流量层的理想化模型。

7.2 将量纲分析用于分层介质中的湍流

方程（7.5）、（7.6）和（7.8'）以及条件（7.7）和（7.9）描述的热分层介质中湍流的特征量明显只能依赖于相当少数的物理量，即依赖于这些方程中出现的参数$\frac{g}{T_0}$、ρ_0、ν和χ，依赖于给出从无穷远到表面$z = 0$（或反过来）的动量流或热流并且表征了流动和下垫面动力学和热相互作用的τ（或u_*）和q值，依赖于完全描述了下垫面几何性质的粗糙度参数z_0。然而，并非所有这些参数发挥了同等重要的作用。首先，我们知道，在足够充分发展的湍流区域中（即除了紧邻下垫面的非常薄的亚层外的几乎任何地方），分子运动导致的热流和动量流和湍动热流和动量流相比总是非常小的（见，例如5.1节、5.3 节和5.7节）。所以在这些区域中，方程（7.5）和（7.8'）含有分子系数ν和χ的项一般可以简单地忽略。于是方程（7.7）和（7.9）可以重写为这种简单的形式

$$-\rho_0\overline{u'w'} = \tau = \text{常量},\ \ c_p\rho_0\overline{T'w'} = q = \text{常量}, \tag{7.10}$$

这表明湍流的特征量一定不依赖于ν和χ。对于粗糙度参数z_0，这决定了下垫面上的边界条件，并且通过这些边界条件也影响了平均速度$\overline{u}(z)$的绝对值和距离下垫面相当远处的平均温度差$\overline{T}(z) - \overline{T}(0)$。然而，距离$z$处的（下垫面不再有直接影响）平均速度和平均温度的垂向变化不再依赖于z_0，但一定仅由动量流和热流的值τ和q决定。换句话说，粗糙度参数z_0的变化只会导致曲线$\overline{u} = \overline{u}(z)$和$\overline{T} = \overline{T}(z)$平移某个常量，但不会影响分布$\overline{u}(z)$和$\overline{T}(z)$的形式。所以，表面空气层中的充分发展湍流的平均速度梯度和温度梯度以及其他特征量对高度的依赖必须仅由下面的四个参量决定：密度ρ_0、“浮力参量”g/T_0（描述了浮力效应）、湍流剪切应力τ（或$u_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho_0}}$）和湍

动热流q（或$q/c_p\rho_0$）。[5]使用这个简单的假设，我们必须记住，当$q = 0$（即在中性分层情形，当$\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} = 0$），浮力对湍流的影响不明显，也就是说，必须不依赖于参量$\frac{g}{T_0}$。在此情形，我们回到均匀介质的情形，5.3节发展的对数层理论适用。

所以，当$z \gg z_0$，高度z处的湍流特征量仅依赖于五个量：z、ρ_0、$\frac{g}{T_0}$、u_*和$\frac{q}{c_p\rho_0}$。在此情形，因为有四个独立量纲——长度、时间、质量和温度，所以我们只能从这五个量写出一个独立无量纲组合（相差一个数值因子）。接着Obukhov (1946)、Monin (1950c)和Monin, Obukhov (1953, 1954)，我们选择无量纲组合为

$$\zeta = \frac{z}{L}, \tag{7.11}$$

其中

$$L = -\frac{u_*^3}{\kappa \frac{g}{T_0} \frac{q}{c_p\rho_0}} \tag{7.12}$$

是从参量$\frac{g}{T_0}$、u_*和$\frac{q}{c_p\rho_0}$写出的长度标度。（无量纲冯·卡门常量κ首次由Obukhov引入L的方程，通常按传统在接下来的所有工作中保留，L的符号选择为当$q < 0$，对于稳定热分层有$L > 0$。）然后我们可以肯定，表面空气层中的任意平均湍流特征量$\overline{f}$（对于不太小的z不依赖于下垫面的性质）对高度的依赖可以写为这种形式

$$\frac{\overline{f}(z)}{f_0} = F\left(\frac{z}{L}\right), \tag{7.13}$$

其中f_0是f的量纲的组合，从参量$\frac{g}{T_0}$、ρ_0、u_*和$\frac{q}{c_p\rho_0}$写出，而$F(\zeta)$是一个普适函数。我们取$\frac{u_*}{\kappa}$作为速度标度，对于温度标度我们取

$$T_* = -\frac{1}{\kappa u_*} \frac{q}{c_p\rho_0} \tag{7.14}$$

[参见方程（5.75'）]其中常量κ也是按照惯例引入的，T_*的符号选为对于稳定情形有$T_* > 0$。最后，作为涡交换系数K 的自然标度，我们取这个量$\kappa u_*|L|$。

---

[5]然而，我们应该注意到，这个自然的假设（对于下面的理论很基本）有时会引起一些反对意见。所以，有时提出分层大气中的温度和风分布一定依赖于分子常数ν和χ，或者至少依赖于它们的比——普朗特数$\mathrm{Pr} = \nu/\chi$[见，例如Townsend (1962a)]。在一些情形，这个想法的基础是Malkus (1954a)有争议的湍动对流理论，由例如Townsend (1962b)、Spiegel (1962)和Lindzen (1967)讨论。根据这个理论，分子常数对于所有z都起到了相当大的作用。普朗特数Pr对湍动对流的影响也是Kraichnan (1962a)工作的主题，这个工作的结果对于适中的Pr值和本章中得到的结论不矛盾。另一方面，例如Businger (1955)假设粗糙度参数z_0明显地影响风和温度分布的形式，这使得所有这些方程都复杂得多。Laykhtman (1944, 1947a, 1961)的假设更进一步：替代通常的粗糙度参数，他使用了长度参数z_0（这影响了分布的形式，以一种复杂的方式依赖于表面不规则性的尺度和形式以及热分层）。

根据方程（7.13），我们可以用ζ的普适函数的方法描述湍流特征量对高度的依赖。所有，例如，对于平均风速和温度的垂向梯度，我们得到

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa L} g(\zeta), \tag{7.15}$$

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} = \frac{T_*}{\kappa L} g_1(\zeta), \tag{7.16}$$

其中$g(\zeta)$和$g_1(\zeta)$是两个ζ的普适函数。方程（7.15）和（7.16）由Monin, Obukhov (1953, 1954)给出，可以认为它们是热分层介质情形的对数层理论的基本方程（5.21）和（5.76）的直接推广。把这些方程带入定义了动量和热量涡交换系数K和K_T的方程（5.5）和（5.9）我们发现

$$K = \frac{u_*^2}{\partial \overline{u}/\partial z} = \frac{\kappa u_* L}{g(\zeta)}, \quad K_T = \frac{-q/c_p\rho_0}{\partial \overline{T}/\partial z} = \frac{\kappa u_* L}{g_1(\zeta)}. \tag{7.17}$$

交换系数K_T和K的比值等于

$$\frac{K_T}{K} = \frac{\kappa T_*}{u_*} \frac{\partial \overline{u}/\partial z}{\partial \overline{T}/\partial z} = \frac{g(\zeta)}{g_1(\zeta)} = \alpha(\zeta); \tag{7.18}$$

一般来说，它是ζ的某个普适函数。由于方程（7.12）和（7.14）-（7.16），2.4节和6.5节定义的理查德森数Ri[见方程（2.3'）和（6.51）]等于

$$\mathrm{Ri} = \frac{g}{T_0} \frac{\partial \overline{T} \partial z}{(\partial \overline{u}/\partial z)^2} = \frac{g_1(\zeta)}{[g(\zeta)]^2} = \frac{1}{\alpha(\zeta) g(\zeta)}. \tag{7.19}$$

这也是ζ的普适函数。类似地，由热量q、动量τ和速度分布$\overline{u}(z)$定义的方程（6.45）的流量理查德森数Rf等于

$$\mathrm{Rf} = -\frac{g}{c_p T_0} \frac{q}{\tau \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}} = \frac{1}{g(\zeta)}. \tag{7.20}$$

流量理查德森数Rf显然和涡黏滞系数K有简单关系：

$$K = \kappa u_* L \cdot \mathrm{Rf}. \tag{7.21}$$

由函数$g(\zeta)$和$g_1(\zeta)$的一般形式分析（这将在本节后面，即7.3节讨论），可以推断$\mathrm{Ri}(\zeta)$和$\mathrm{Rf}(\zeta)$都是单调函数，故而由一个单值的反函数。所以Ri、Rf和ζ可同样有效地作为参数表征空气的热稳定性。

这个情形和分层介质中被动外加物浓度场的特征量类似，此时存在一个穿过边界$z = 0$的恒定外加物流量$j = \rho_0 \overline{w'\vartheta'}$（在表面空气层中我们

可以取被动外加物为，例如水蒸气，于是j表示单位时间从单位下垫面面积的平均蒸发量）。这里只需要把j加到定义平均湍流特征的参数组中。然而，我们还有物理量ϑ额外的独立量纲。于是，我们由一个无量纲特征量$\zeta = z/L$。特别地，对于平均湿度$\overline{\vartheta}$的垂向梯度$\partial\overline{\vartheta}/\partial z$（之后我们仅考虑这个被动外加物），我们得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial z} &= \frac{\theta_*}{L} g_z(\zeta), \\
\theta_* &= -\frac{j}{\kappa u_* \rho_0},
\end{aligned}
\tag{7.22}
$$

这完全类似于方程（7.15）和（7.16）。于是水汽的交换系数（涡扩散系数）等于

$$
K_\vartheta = -\frac{j/\rho_0}{\partial\overline{\vartheta}/\partial z} = \frac{\kappa u_* L}{g_2(\zeta)}. \tag{7.23}
$$

表面层中风速、温度和湿度的分布可以通过对方程（7.15）、（7.16）和（7.22）积分得到

$$
\begin{aligned}
\overline{u}(z_2) - \overline{u}(z_1) &= \frac{u_*}{\kappa}\left[f\left(\frac{z_2}{L}\right) - f\left(\frac{z_1}{L}\right)\right], \\
\overline{T}(z_2) - \overline{T}(z_1) &= T_*\left[f_1\left(\frac{z_2}{L}\right) - f_1\left(\frac{z_1}{L}\right)\right], \\
\overline{\vartheta}(z_2) - \overline{\vartheta}(z_1) &= \theta_*\left[f_2\left(\frac{z_2}{L}\right) - f_2\left(\frac{z_1}{L}\right)\right],
\end{aligned}
\tag{7.24}
$$

其中

$$
f(\zeta) = \int^{\zeta} g(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad f_1(\zeta) = \int^{\zeta} g_1(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad f_2(\zeta) = \int^{\zeta} g_2(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{7.25}
$$

7.3 描述分层介质中湍流的普适函数的形式

由上面对热分层介质表面层的讨论，可能有两种定性不同的湍流机制。它们对应于稳定分层情形（热量向下，即$q < 0$，相应地$L > 0$且$T_* > 0$）和不稳定分层情形（$q > 0$，$L < 0$，$T_* < 0$）。这两种情形在分层趋向中性（当$q \to 0$）时彼此接近。相应地，所有描述湍流的普适函数分为两个不同分支，$\zeta \geq 0$和$\zeta \leq 0$。

在这一小节中，我们仅讨论最简单的湍流特征量，即平均速度$\overline{u}$、平均温度$\overline{T}$和平均外加物浓度（湿度）$\overline{\vartheta}$的分布。所以我们主要感兴趣于函数$f(\zeta)$、$f_1(\zeta)$和$f_2(\zeta)$以及它们的导数$g(\zeta) = f'(\zeta)$、$g_1(\zeta) = f_1'(\zeta)$和$g_2(\zeta) = f_2'(\zeta)$。

让我们从考虑函数$f(\zeta)$和$g(\zeta)$开始。方便的是把方程（7.15）写为这种形式

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa z}\zeta g(\zeta) = \frac{u_*}{\kappa z}\varphi(\zeta), \quad \varphi(\zeta) = \zeta g(\zeta) = \zeta f'(\zeta). \quad (7.15')$$

我们现在固定z、u_*和g/T_0值，并且令湍动热流q无限制地减小，从而接近中性分层条件。在此情形，L的绝对值会无限增大，从而$\zeta = \frac{z}{L}$趋向于零。在此极限，当$q \to 0$，我们一定会得到通常的“对数”方程$\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa z}$，它既不含有$q$也不含有$g/T_0$。于是

$$\varphi(0) = \lim_{\zeta \to 0} \zeta f'(\zeta) = 1. \quad (7.26)$$

因为自然地假设$\varphi(\zeta)$连续，对于固定的q和u_*但不是足够小的z（即当$z \ll |L|$），$\varphi(\zeta)$值接近于1。这意味着对于$z \ll |L|$湍流交换和温度均匀介质中的交换相差非常小，故而$z \ll |L|$层中的湍流主要是由动力学因素产生的。所以尺度L决定了热力学因素不起重要作用的这一层的厚度，所以它可以被称为*动力学亚层的高度*。[6]因为热力学因素在最低的层中可以忽略，自然可以得到，在分层介质的情形我们必须考虑下垫面的性质，正如均匀介质的情形。换句话说，5.4 节中定义的粗糙度参数z_0在所有情形都是下垫面对流动的动力学影响客观的特征量。因为粗糙度参数z_0 只能在动力学亚层中根据风的分布确定，显然这个参数不能依赖于热分层。在实践中，最方便的是使用下垫面附近对数近似的速度分布确定这个参数。在大气的情形，最好使用中性或接近中性分层的情形，其中$|L|$ 很大，动力学亚层相当厚。考虑到对数速度分布在高度z_0 为零，并且对于$z \ll |L|$ 速度分布总是可以假设为对数的，方程（7.24）的第一个方程可以写为

$$u(z) = \frac{u_*}{\kappa}\left[f\left(\frac{z}{L}\right) - f\left(\frac{z_0}{L}\right)\right]. \quad (7.24')$$

所以很明显，函数$f(z)$加上粗糙度参数z_0唯一地确定了速度分布。

$z \ll |L|$时动力学因素主导自然和理查德森数Ri对于这些z小这个事实有关。实际上，限制于更方便的流量理查德森数$\mathrm{Rf} = \alpha \mathrm{Ri}$，容易从方程

[6]在使用这个名称时，我们当然不能忘记，热力学因素不起重要作用的这一层的厚度实际上等于长度L乘以一个常数因子－－根据下一节引用的数据，量级为几百分之一。

（7.20）和（7.26）推得

$$\lim_{z\to 0}\mathrm{Rf}(z)=0,\text{以及}\left(\frac{\partial \mathrm{Rf}}{\partial z}\right)_{z=0}=\frac{1}{L}, \tag{7.27}$$

所以在动力学亚层中

$$|\mathrm{Rf}|\approx\frac{z}{|L|}\ll 1. \tag{7.28}$$

对于足够小的$\zeta=\frac{z}{L}$值，函数$\varphi(\zeta)=\zeta f'(\zeta)$可以展开为幂级数

$$\varphi(\zeta)=1+\beta_1\zeta+\beta_2\zeta^2+... \tag{7.29}$$

所以，对于接近中性分层的函数$f(\zeta)$，我们得到

$$f(\zeta)=\text{常量}+\ln|\zeta|+\beta_1\zeta+\frac{\beta_2}{2}\zeta^2+... \tag{7.30}$$

类似地，Rf这里用一个幂级数代表：

$$\mathrm{Rf}(\zeta)=\zeta-\beta_1\zeta^2-(\beta_1^2+\beta_2)\zeta^3-... \tag{7.31}$$

因为数据限制还不能可靠地估计一些β_n系数，只有函数$\varphi(\zeta)$的线性近似有实用价值

$$\varphi(\zeta)\approx 1+\beta\zeta, \tag{7.32}$$

$$f(\zeta)\approx \text{常量}+\ln|\zeta|+\beta\zeta,\ \ \overline{u}(z)\approx\frac{u_*}{\kappa}\left(\ln\frac{z}{z_0}+\beta\frac{z-z_0}{L}\right), \tag{7.33}$$

$$\mathrm{Rf}\approx \zeta-\beta\zeta^2=\frac{z}{L}-\beta\left(\frac{z}{L}\right)^2 \tag{7.34}$$

[这里β是方程（7.29）-（7.31）的系数β_1]。

关于方程（7.29）-（7.34）必须记住，因为$\zeta\geq 0$和$\zeta\leq 0$对应于两种定性不同的湍流状态，我们没有理由假设函数$\varphi(\zeta)$在点$\zeta=0$是解析的（尽管它在这一点是连续的，因为当$\zeta\to 0$，这两种湍流状态会合并）。于是，$\zeta\geq 0$和$\zeta\leq 0$可能对应于展开（7.29）-（7.31）的不同系数，特别地对应于不同的常数β值。此外，必须认为系数β_n是和冯·卡门常数κ类型相同的一个普适常数，前提是它们被看作普适函数$\varphi(\zeta)$泰勒级数系数的精确值[限制于ζ的一个确定符号]。然而，现在，我们无法不借助于或多或少任意的假设来确定$\varphi(\zeta)$的严格解析形式。同时，通过$\zeta=0$点处的导数值任意高精度的测量无法足够精确地确定这个函数。所以，在实践中，系数β一般是

通过用方程（7.32）的办法或用某个其他解析表达式在某个范围的ζ对经验函数$\varphi(\zeta)$近似得到的。于是得到的β值相当依赖于近似区间和$\varphi(\zeta)$的方程的选择。所以不奇怪不同的研究者给出了这个系数不同的值（见下面8.2 节末）。然而，所有这些差异对β符号的问题没有影响，其答案直接从基本的物理考虑得到。实际上，对于稳定分层（即，$q < 0$、$L > 0$和$\zeta > 0$），湍流交换受阻，所以平均速度分布一定“陡于”对应中性分层的对数分布。另一方面，对于不稳定分层（$q > 0$、$L < 0$和$\zeta < 0$），非常强烈的湍流混合一定回导致平均速度的均衡，所以这里风速随高度的增长一定比中性分层的情况慢。所以$\beta\left(\frac{z-z_0}{L}\right)$一定对于$L > 0$为正，对于$L < 0$为负，即对于$\zeta > 0$和$\zeta < 0$都有$\beta > 0$。

如我们已经指出的，方程（7.32）-（7.34）仅对相当小的ζ绝对值是显著的。现在转向$\varphi(\zeta)$和$f(\zeta)$对非常大的$|\zeta| = \frac{z}{|L|}$行为的问题，我们从强不稳定性（即大的负ζ值）情形开始。$\varphi(\zeta)$和$f(\zeta)$在$\zeta \to -\infty$的渐近行为可以通过对给定$q > 0$、u_*和g/T_0考虑大的$z \gg |L|$值或者研究对于给定$q > 0$、g/T_0和z的极限过程$u_* \to 0$（即$L < 0$）来研究。后一个极限过程显然对应于“自由对流”（特征是存在$q > 0$的不稳定分层，没有平均水平速度和下垫面上相关的摩擦）条件下的纯热湍流的方法。在此情形，湍流不是从平均运动，而是从温度不稳定性获得能量。此外，它的特征是出现在下垫面上个别点的热射流的聚集，混合型很弱。此外，如果现有的水平混合仍然足以保证流动变量的概率分布对水平面上的平移和转动不变，那么这个湍流是本章考虑的湍流的一个特殊情形。这些流动仅由两个参数表征：g/T_0和$q/c_p\rho_0$（因为在“纯”对流中，$u_* = 0$）。然而，从相似性的观点，对于给定u_*在高度$z \gg |L|$的湍流情形不会和z固定且不是很大但u_*非常小的情形有差异。所以在不稳定情形，很大高度处的湍流总是主要由热力学因素确定，即温度场的统计特征在此情形依赖于g/T_0和$q/c_p\rho_0$但不依赖于u_*。由这个观点，在$\zeta \to -\infty$的极限情形，最简单的是首先考虑函数$f_1(\zeta)$和表征了平均温度分布的$g_1(\zeta) = f_1'(\zeta)$的行为，然后转向函数$g(\zeta)$[或$\varphi(\zeta) = \zeta g(\zeta)$]和$f(\zeta)$[因为在水平速度分布的研究中我们不能诉诸“纯”热对流的极限情形（其中一般来说根本没有平均水平速度）]。

因为不可能从参数g/T_0和$q/c_p\rho_0$写出任何长度标度，自由对流条件下的湍流一定是自守的（见，例如，5.9节中对流射流的研究）。特别地，容易验证，方程（7.16）和方程（7.24）的第二个方程仅当$g_1(\zeta) \sim \zeta^{-4/3}$和$f_1(\zeta) \sim \zeta^{-1/3} +$ 常量时不含u_*。所以

$$g_1(\zeta) = -\frac{C_1\kappa^{4/3}}{3}\zeta^{-4/3}, \quad f_1(\zeta) = \text{常量} + C_1\kappa^{4/3}\zeta^{-1/3}\text{当}\zeta \ll -1 \qquad (7.35)$$

（这里添加$\kappa^{4/3}$是为了方便）。换句话说，

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} &= -\frac{C_1}{3}\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\right)^{2/3}\left(\frac{g}{T_0}\right)^{-1/3} z^{-4/3},\\ \overline{T}(z) &= T_\infty + C_1\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\right)^{2/3}\left(\frac{g}{T_0}\right)^{-1/3}\end{aligned} \tag{7.36}$$

当$z \gg |L|, L < 0$。方程（7.36）是首先由Prandtl (1932a)提出的，后来由Obukhov (1946)独立提出。它们完全类似于Zel'dovich (1937)推导的方程，对流上升射流中心的温度分布的方程（5.103）-（5.104），和它们的差异仅在于我们这里不关心一个被加热的球面或圆柱上方的对流，而是关系一个大的被加热的平面上方的对流。后来在很多工作中详细讨论了这些方程[见，例如Monin, Obukhov (1953, 1954)、Priestley (1954, 1955, 1956)、Kazanskiy, Monin (1958)]。由此得出，特别地，在不稳定分层中，很大高度处的温度分布倾向于是等温的，这是因为存在非常强的混合（它随高度增强，因为出现了越来越大、长度标度和距离下垫面距离相当的涡旋），导致温度的均衡。在方程（7.36）自由对流条件下的涡热扩散系数等于

$$K_T = -\frac{q}{c_p\rho_0\frac{\partial \overline{T}}{\partial z}} = \frac{3}{C_1}\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{q}{T_0}\right)^{1/3} z^{4/3}, \tag{7.37}$$

随距离地面的距离增加而快速增大。

显然有可能论证函数$g(\zeta)$、$\varphi(\zeta) = \zeta g(\zeta)$和$f(\zeta)$在$\zeta \to -\infty$时非常确定的渐近形式。因为极限过程$\zeta \to -\infty$等价于$u_* \to 0$（剩下的参数和$z$固定），$\zeta \ll -1$的湍流状态不依赖于$u_*$。然而，不可能从$q/c_p\rho_0$、$g/T_0$、$\rho_0$和$z$写出任何无量纲组合。所以这些参量定义的所有无量纲特征量都一定有一个恒定（普适）值。特别地，可以自然地假设一个这种无量纲参量是热量的涡扩散系数和动量的涡扩散系数的比$\alpha = K_T/K$。所以在自由对流条件下

$$\frac{K_T}{K} = \alpha_{-\infty} = \text{常量}, K = \frac{K_T}{\alpha_{-\infty}} = \frac{3}{C_1\alpha_{-\infty}}\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{g}{T_0}\right)^{1/3} z^{4/3} \tag{7.38}$$

[其中$\alpha_{-\infty} = \lim_{\zeta\to-\infty}\alpha(\zeta)$]。然而，在此情形，很明显

$$g(\zeta) = -\frac{C_2}{3}\zeta^{-4/3}, \varphi(\zeta) = -\frac{C_2}{3}\zeta^{-1/3}\text{当}\zeta \ll -1, \tag{7.39}$$

$$f(\zeta) = C_2\zeta^{-1/3} + \text{常量} \quad \text{当}\zeta \ll -1,$$

其中$C_2 = C_1\kappa^{4/3}\alpha_{-\infty}$。换句话说，当$q > 0$，$z_1 \gg |L|$，$z_2 \gg |L|$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} &= \frac{C_2}{2\kappa^{4/3}} u_*^2 \left(\frac{q}{c_p\rho_0} \frac{g}{T_0} \right)^{-1/3} z^{-4/3}, \\
\overline{u}(z_2) - \overline{u}(z_1) &= -C_2\kappa^{-4/3} u_*^2 \left(\frac{q}{c_p\rho_0} \frac{g}{T_0} \right)^{-1/3} (z_2^{-1/3} - z_1^{-1/3}).
\end{aligned}
\tag{7.40}
$$

方程（7.40）也首先由Prandtl (1932a)（以稍微不同的形式）给出[也参见Obukhov (1946)、Monin, Obukhov (1954)]。随z增大，平均速度$\overline{u}(z)$接近一个恒定值，这是出于在自由对流中导致$z \to \infty$时趋向于等温条件的同样原因。我们注意到u_*现在出现在方程（7.40）中，因为在$u_* = 0$时$\overline{u}(z) = 0$，所以函数$\overline{u}(z)$不可能不依赖于u_*。[7] 理查德森数Ri 和Rf 总是依赖于u_*，在自由对流条件下，由方程（7.39）、（7.19）和（7.20），这些数等于

$$
\mathrm{Ri} = -\frac{3}{C_2\alpha_{-\infty}} \left(\frac{z}{|L|} \right)^{4/3}, \mathrm{Rf} = \alpha\mathrm{Ri} = -\frac{3}{C_2} \left(\frac{z}{|L|} \right)^{4/3}. \tag{7.41}
$$

所以很明显，随着z的增大，Ri和Rf的绝对值无限增大（总是保持负值）。

现在让我们转向第二个极限情形$\zeta \to +\infty$。对函数$\varphi(\zeta)$和$f(\zeta)$在大的正ζ时的渐近行为的研究对应于对稳定分层情形（固定$L > 0$）对于大的z，平均速度$\overline{u}(z)$分布的研究或者对应于对固定z非常小的正L情形（即非常急剧的温度反转）的研究。然而，在具有小到消失的风的急剧反转中，湍流变得简并，介质的运动呈现出一种非常特殊的特征。实际上，在高度稳定分层的条件下，不可能存在大尺度湍流涨落（因为这些涨落克服重力做功会消耗太多能量），湍流只能以小尺度涡旋的形式存在（这也可以由此解释，在此情形，大尺度波动是稳定的，不会转捩为湍流）。在更稳定的情形，甚至小尺度湍流实际上也不可能，介质的涨落运动可能以随机内波组的形式出现。在任何情形，很明显高度的稳定性阻碍了不同流体层之间的湍流交换，所以湍流呈现局域特征。$\zeta \gg 1$（即对于固定的$L > 0$但很大的高度$z \gg L$或对于固定高度z但很小的$L > 0$）的湍流交换的特征（例如涡黏滞和$\mathrm{Rf} = \frac{K}{\kappa u_* L}$）不能明显依赖于距离下垫面的距离$z$。后一个推论也可以通过下面的论证证实：根据理查德森的推导（见6.5节），流量理查德

[7]这使得方程（7.38）-（7.41）的推导的基础略微弱于方程（7.35）-（7.37）的推导。实际上，在理想对流条件下没有垂向动量输运，所以严格来说，也没有涡黏滞K。于是，理论上由可能，例如，当$u_* \to 0$，$K_T/K \to \infty$。然而，没有物理上的理由支持纯热力学因素产生的速度涨落对涡黏滞的贡献会为零。所以，目前，似乎合理的是考虑$0 < \alpha_{-\infty} < \infty$的方程（7.38）作为一个合理的假设，这需要实验验证。

森数Rf在任意稳态条件下不会超过1，即这个数可能的最大值$\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}} \leq 1$（显然$\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}$小于1很大，但目前这对于我们的目的而言不重要）。另一方面，假设Rf随$\zeta = \frac{z}{L}$增加（即对于固定z，稳定性增强）单调变化是自然的：难以想象可以导致Rf再次随稳定性增强而减小的物理机制。然而，如果$\mathrm{Rf}(\zeta)$随ζ的增大而单调增大，同时在$\zeta \to \infty$不超过某个值$\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}$，那么它一定趋于某个极限值$R$（自然可以认同为$\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}$）。

所以，在稳定分层的情形，一定存在一个普适值R使得

$$\mathrm{Rf} \approx R = \text{常数}, \quad K \approx \kappa u_* L R \text{当} z \gg L. \tag{7.42}$$

但由此得到

$$\begin{aligned} g(\zeta) &= \frac{1}{R} = \text{常量}, \quad \varphi(\zeta) = \frac{\zeta}{R} = C_3\zeta, \\ f(\zeta) &= \text{常量} + \frac{\zeta}{R} = \text{常量} + C_3\zeta \quad \text{当}\zeta \gg 1, \end{aligned} \tag{7.43}$$

其中$C_3 = 1/R = 1/\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}$，并且当然

$$\overline{u}(z) = \frac{u_*}{\kappa R L} z + \text{常量} = C_3 \frac{\kappa T_*}{u_*} \frac{g z}{T_0} + \text{常量}. \tag{7.44}$$

所以在稳定介质中，在很高的高度，平均速度随高度线性增大，而这个速度的恒定梯度由一个“外部”参数唯一确定（这个参数在不同的情形不同），例如参数$\frac{\kappa T_*}{u_*} = -\frac{q}{c_p \tau}$，这实际上和湍动热流和湍流剪切应力的比相同。Obukhov (1946)也指出了这个结果[也参见Monin, Obukhov (1954)]。

根据方程（7.29）、（7.30）、（7.39）、（7.39'）和（7.43），普适函数$\varphi(\zeta)$和$f\zeta) - f\left((\pm\frac{1}{2}\right)$[这里增加$-f\left(\pm\frac{1}{2}\right)$项是避免选择函数$f(\zeta)$参考值的不确定性]一定具有接近图47 和48的一般形式。在下面一节中，这个结论得到了大气表面层中直接测量的很好的支持。

现在我们简要讨论描述了被动外加物温度和浓度（湿度）的垂向分布的函数$g_1(\zeta)$、$f_1(\zeta)$和$g_2(\zeta)$、$f_2(\zeta)$ 的一般形式。根据5.7节

$$f_1(\zeta) \approx \frac{1}{\alpha_0} \ln|\zeta| + \text{常量} \quad \text{当}|\zeta| \ll 1, \tag{7.45}$$

这里$\alpha_0 = \alpha(0)$是一个接近于1的常数（在5.7节中简单记作α）。另一方面，如我们已经看到的，在“自由对流”条件下大的负ζ值，函数$f_1(\zeta)$的行为由方程（7.35）决定。在这个区域中函数$f_1(\zeta)$和$f(\zeta)$仅相差一个常数

因子$1/\alpha_{-\infty}$（其精确值仍然未知，见下面的8.2节）。后面我们将看到，当$\zeta \le 0$，从“受迫对流”条件（特征是对数分布的速度和温度）转变到“自由对流”条件（由方程（7.35）-（7.41）定义）是相对剧烈的，即它发生在非常像范围的ζ值。所以函数$f_1(\zeta)$在整个正半轴的行为由常数κ、C_1和α_0（或者κ、$C_2 = C_1\kappa^{4/3}\alpha_{-\infty}$和$\alpha_{-\infty}$）相对完整地描述。特别地，是否有可能在$\zeta \le 0$时把函数$f_1(\zeta)$考虑为类似函数$f(\zeta)$可能首先由常数$\alpha_0$和$\alpha_{-\infty}$彼此有多接近决定。然而，对于$\zeta \le 0$，一般形式$f_1(\zeta) - f_1\left(-\frac{1}{2}\right)$肯定不会不同于图47和48所示的函数$f(\zeta) - f\left(-\frac{1}{2}\right)$的形式。

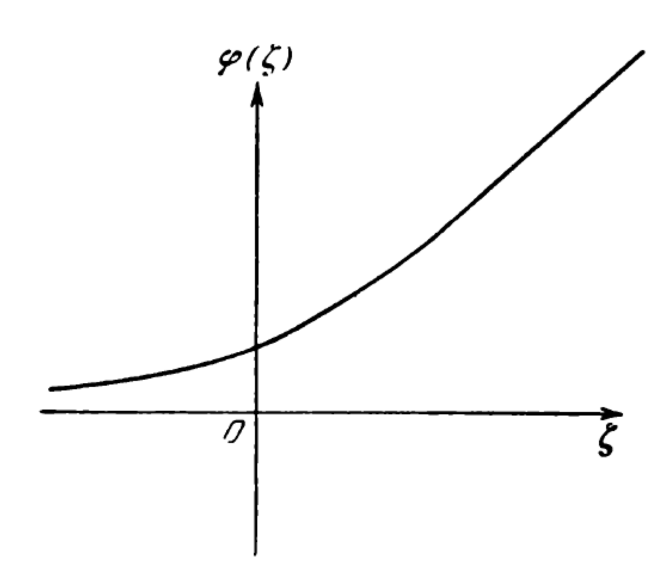


图 47 普适函数$\varphi(\zeta)$的示意图。

$\zeta > 0$时函数$f_1(\zeta)$的行为更复杂。因为

$$f_1(\zeta) = \int^{\zeta} \frac{f'(\xi)}{\alpha(\xi)} \mathrm{d}\xi + \text{常量}, \tag{7.46}$$

$f_1(\zeta)$形式的问题和$\alpha(\zeta)$对稳定性参数$\zeta = \frac{z}{L}$（或Rf和Ri）的依赖紧密相关。如果我们像气象学文献中最常做的那样，假设$\frac{K_T}{K} = \alpha =$ 常量，那么函数$f_1(\zeta)$和$f(\zeta)$符合到相差一个乘数因子。如果$\alpha \equiv 1$（如同样假设的），那么$f_1(\zeta) \equiv f(\zeta)$，相差一个不起作用的相加常数。对于小的正$\zeta$，函数$f_1(\zeta)$由对数公式（7.45）给出。随意较大的$\zeta$，由“对数+线性”方程

$$f_1(\zeta) = \text{常量} + \frac{1}{\alpha_0}(\ln\zeta + \beta_1\zeta) \tag{7.47}$$

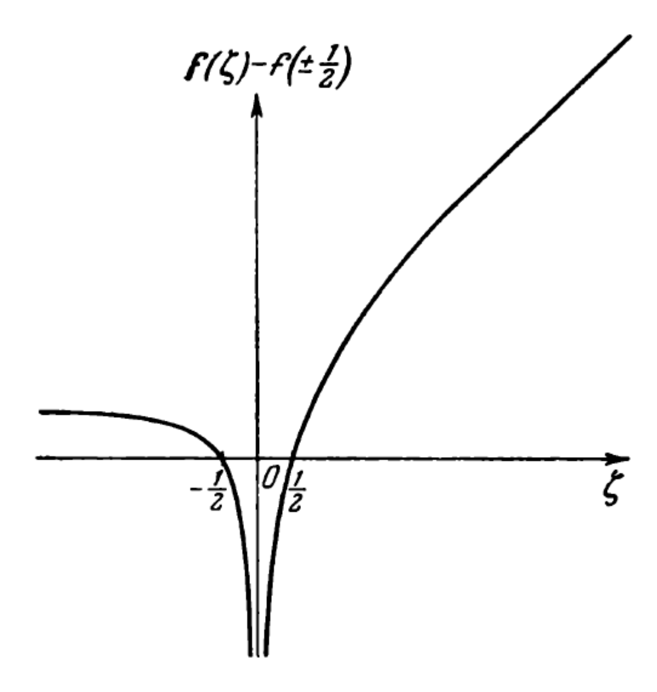


图 48 普适函数$f(\zeta)-f\left(\pm\frac{1}{2}\right)$的示意图。

[系数β_1可能和方程（7.33）中相应的系数不同]。如果我们假设$\alpha(\zeta)$在相对宽范围的正ζ值范围内（也包括存在线性速度分布的区域）变化相对很小，那么对于这个范围内足够大的ζ值，温度分布也由这种形式的线性方程很好地描述：

$$f_1(\zeta) = 常量 + \frac{\zeta}{\alpha R},\ \ \overline{T}(z) = \frac{1}{\alpha R}\left(\frac{\kappa T_*}{u_*}\right)^2 \frac{gz}{T_0} + 常量, \tag{7.48}$$

其中α时量级为1的常数。然而，对高度稳定的海洋中湍流的观测以及在实验室水流中的相关测量中明确显示，在非常稳定的介质中，$\alpha(\zeta)$的值非常小（见下面8.2节，特别是图69）。换句话说，对于非常高的稳定性，热流的涡扩散系数K_T比动量的涡扩散系数K小得多。根据Stewart (1959)，原因的物理解释很困难。极端稳定介质的情形可以由一层重流体（例如水）代表，其上存在轻得多的流体（例如空气）。于是下面流体中的湍流运动会扰动自由表面并导致出现个别“溅射”（splashes），穿透进入上层流体。然后在重力作用下再次落回。“水”穿透进入“空气”会在“空气”中产生压强涨落，导致两种介质之间有明确的动量交换。同时，热交换实际上是不存在的（我们记得我们已经同意忽略分子热导率）。所以我们可以假设，对于非常高的稳定性（可能比大气逆温层中实际观测到的稳定），涡黏滞系数K会有一个确定的值，而K_T接近于零。然而，如果这是真的，那

么可以得到，在非常大的正$\zeta = \frac{z}{L}$值，温度分布$\overline{T}(z)$会比速度分布$\overline{u}(z)$陡很多。由$\zeta \to \infty$时$K_T \to 0$的事实得出，温度分布的斜率随z/L的增大而无限增大。于是，函数$f_1(\zeta) - f_1\left(\frac{1}{2}\right)$和$\varphi_1(\zeta) = \zeta f_1'(\zeta)$的一般形式在非常大的正$\zeta$值和函数$f(\zeta) - f\left(\frac{1}{2}\right)$和$\varphi(\zeta)$的一般形式[见图49和50]不同。同样与此有关的是，在高稳定性条件下的理查德森数$\mathrm{Ri} = \frac{\mathrm{Rf}}{\alpha}$明显可以假设为非常大的值（因为如果当$\mathrm{Rf} \to \mathrm{Ri}_{\mathrm{cr}}$时$\alpha \to 0$，那么$\mathrm{Ri} \to \infty$）。所以没有极限“临界”Ri值（不同于Rf的情形）。

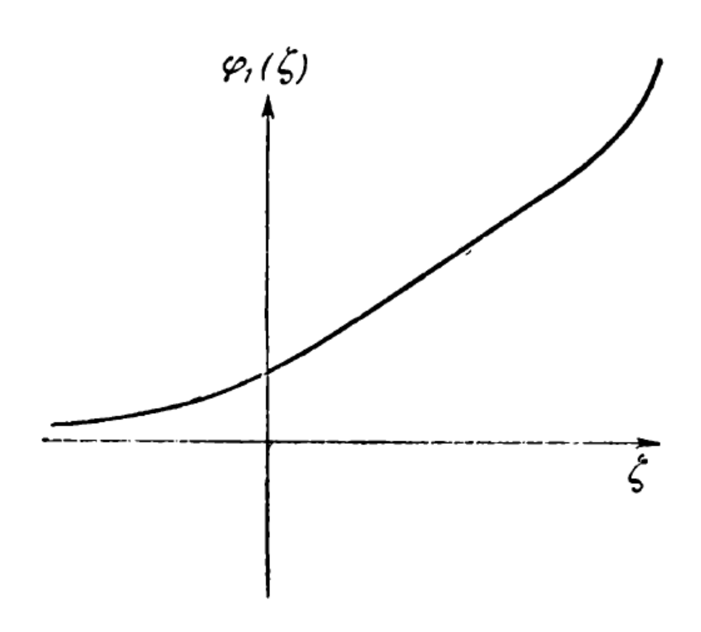


图 49 普适函数$\varphi_1(\zeta)$的示意图。

现在我们考虑函数$f_2(\zeta)$和$g_2(\zeta) = f_2'(\zeta)$。只要$K = K_T$（即$\alpha \equiv 1$）广泛成立，那么假设$K_\vartheta = K = K_T$就是完全自然的，也就是说函数$f_2'(\zeta)$和$f'(\zeta)$和$f_1'(\zeta)$没什么不同。然而，丢弃动量涡扩散系数和热量涡扩散系数相等的假设，我们马上就面对外加物涡扩散系数K_ϑ（决定了函数$f_2(\zeta)$和$g_2(\zeta)$的形式）的问题。下面，我们将看到关于K_ϑ和$f_2(\zeta)$的数据比K_T和$f_1(\zeta)$的数据更差。所以，不可能从它们得到任何真正可靠的结论。因此只能依靠物理直觉。在这方面，我们可以注意到Priestley, Swinbank (1947)的文章。这是最早严肃讨论不同涡扩散系数不相等的气象学文献中的一篇。有人提出，鉴于温度涨落在对流运动中的特殊作用（例如，由比周围热的粒子倾向于向上运动这个事实表示），涡热扩散系数K_T可能有一个值，而动量和湿度涡扩散系数K和K_ϑ 有另一个相同的值。然而，这些研究者的论证不是非常清晰，他们的观点也远未得到所有人认同[见，例如Robinson (1951)]。他们的论证在大气表面层中似乎特别不可信。更有说服力的观点是，由

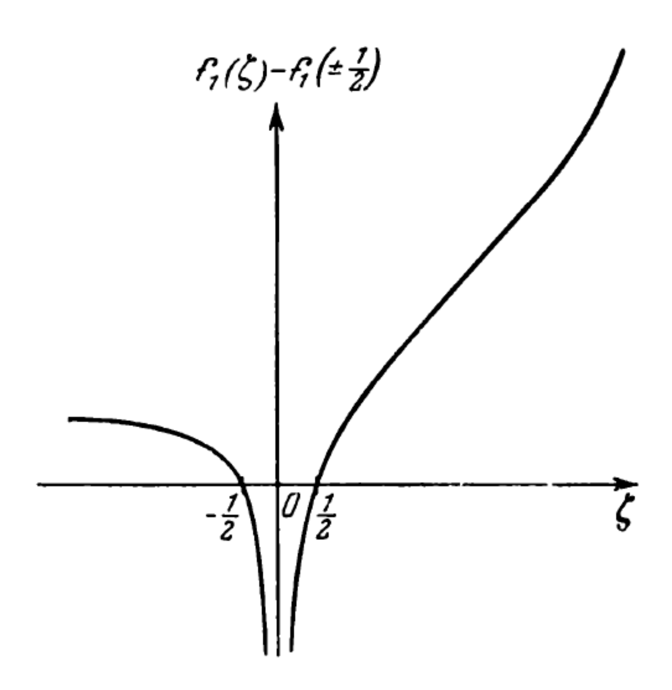


图 50 普适函数$f_1(\zeta) - f_1\left(\pm\frac{1}{2}\right)$的示意图。

于热量和湿度输运（或其他一些被动外加物的输运，这只能通过大气的直接混合来实现）的物理机制的相似性，涡扩散系数K_T和K_ϑ相等，而涡黏滞系数K 也受到压强涨落的影响，可能和$K_T = K_\vartheta$不同。目前大多数专家持后一种观点[见，例如，Ellison (1957)、Charnock (1958a)]。这里我们也应该考虑，对于不太大的温度不均匀性，浮力对流体元的选择性作用对湍流热输运影响不大。所以，只要我们不知道以不同方式影响热量和湿度输运的任何其他物理交换机制，就没有理由否定$K_T = K_\vartheta$的假设，于是$g_2(\zeta) = g_1(\zeta), f_2(\zeta) = f_1(\zeta) +$ 常量。当然，这个假设需要使用自然和实验室中足够精确的特定观测数据（最近才开始有）仔细验证。

7.4　普适函数的进一步讨论；插值公式和半经验公式

在7.3节中，我们分析了普适函数$f(\zeta)$、$\varphi(\zeta) = \zeta f'(\zeta)$和$f_1(\zeta)$、$\varphi_1(\zeta) = \zeta f_1'(\zeta)$的一般行为，展示了决定这些函数在宗量接近于零值、在大的正值和大的负值时行为的渐近公式。然而，在很多情形，方便的是有显式公式给出所有$\zeta = \frac{z}{L}$的值。这种显式公式可以最简单地使用已知的渐近规律并且考虑这些函数在中间范围的ζ值的实验数据，通过插值得到。为此，我们也可以使用湍流的半经验理论的一种变体，将其推广到分层介质的情形，或者我们可以简单地仅仅基于数据尝试选择湍流特征量的表达式，而不参

考理论。已经有大量文献致力于用这三种方法描述分层介质中的湍流特征量。这些文献至少有几百篇论文，但这里我们只是简要地讨论某些相关的结果，特别注意最近的工作。

首先我们考虑函数$f(\zeta)$和$f_1(\zeta)$在负ζ区的行为。如我们已经看到的，对于小的负ζ，这两个函数都一定由对数函数近似。对于绝对值更大的ζ值，我们可以使用“对数+线性”公式（7.33）或（7.47）。而对于非常大的负ζ，函数$f(\zeta)$和$f_1(\zeta)$会接近一个常数，他们对相应常数的偏差以$\zeta^{-1/3}$减小[见方程（7.35）和（7.39’）]。上面，我们也回顾了，根据数据，从对数函数$f(\zeta)$和$f_1(\zeta)$描述的“受迫对流”状态转变为对应于方程（7.35）和（7.39’）的“自由对流”状态显然不发生在任何中间区域（此外，对于量级为十分之一或百分之几的非常小的$|\zeta| = z/|L|$值，见下面的8.1节和8.2节）。接着，Kazanskiy, Monin (1958)假设，$f(\zeta)$在整个负半轴上的值可以很好地用最简单的插值公式描述：

$$f(\zeta) = \begin{cases} \ln|\zeta|, & \text{当}\zeta_1 \le \zeta < 0, \\ \ln|\zeta_1| + C_2(\zeta^{-1/3} - \zeta_1^{-1/3}), & \text{当}\zeta \le \zeta_1. \end{cases} \tag{7.49}$$

类似地，对于$f_1(\zeta)$

$$f_1(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_0}\ln|\zeta|, & \text{当}\zeta_2 \le \zeta < 0, \\ \frac{1}{\alpha_0}\ln|\zeta_2| + \frac{C_2}{\alpha_{-\infty}}(\zeta^{-1/3} - \zeta_2^{-1/3}), & \text{当}\zeta \le \zeta_2. \end{cases} \tag{7.50}$$

其中$C_1\kappa^{4/3} = C_2/\alpha_{-\infty}$。无量纲常量$\alpha_0$、$\alpha_{-\infty}$和$\zeta_2/\zeta_1$决定了函数$f(\zeta)$和$f_1(\zeta)$之间差异的大小，必须基于数据进一步细化。目前，只可能断言系数α_0接近于1（但通常允许所有这些常数都等于1的假设是没有道理的）。对于方程（7.49）中出现的常数C_2、$C_2/\alpha_{-\infty} = C_1\kappa^{4/3}$和$\zeta_1$，它们的值将在下面一节更详细地讨论。应用到函数$\varphi(\zeta) = \zeta f'(\zeta)$和$\varphi_T(\zeta) = \alpha_0\zeta f_1'(\zeta) = \alpha_0\varphi_1(\zeta)$，方程（7.49）-（7.50）显然可以得到下面的关系式：

$$\varphi(\zeta) = \begin{cases} 1, & \text{当}\zeta_1 \le \zeta < 0, \\ -\frac{C_2}{3}\zeta^{-1/3}, & \text{当}\zeta \le \zeta_1. \end{cases} \tag{7.51}$$

类似地

$$\varphi_T(\zeta) = \begin{cases} 1, & \text{当}\zeta_2 \le \zeta < 0, \\ -\frac{C_2'}{3}\zeta^{-1/3}, & \text{当}\zeta \le \zeta_2. \end{cases} \tag{7.52}$$

其中$C_1\kappa^{4/3}\alpha_0 = C_2' = \frac{\alpha_0}{\alpha_{-\infty}}C_2$。自然地，这些函数是不连续的，因为函数（7.49）和（7.50）是连续的但在ζ_1和ζ_2不可微。

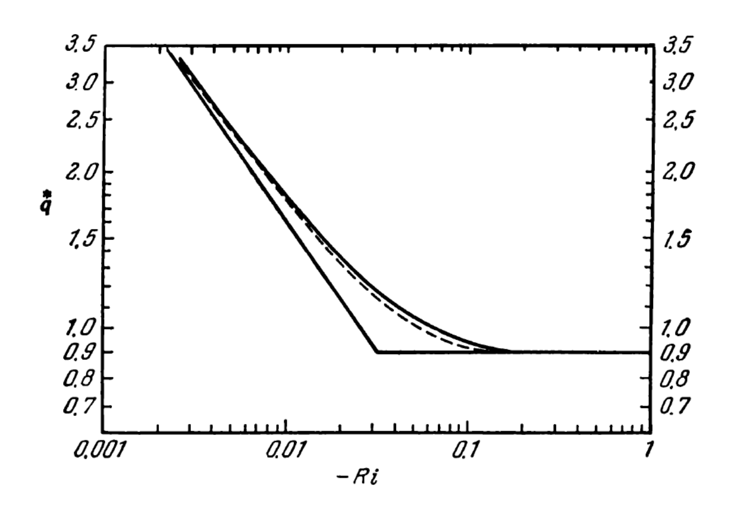


图 51 无量纲热流$\overset{*}{q}$对理查德森数Ri 的依赖。虚线对应于（7.52）形式的函数$\varphi_T(\zeta)$，$\zeta_2 = -(C_2'/3)^3$。典型和实线对应于$n = 2$和$n = 5$的$\varphi_T(\zeta)$的（7.54）形式的内插公式。

虽然导数存在不连续性，但在很多方面，函数（7.49）和（7.50）足以描述具有任意不稳定分层的表面层风和温度的分布。然而，当需要有连续导数的函数$f(\zeta)$和$f_1(\zeta)$时，我们可以，例如根据Priestley (1960a)，不从数据决定ζ_1和ζ_2，而是写出$\zeta_1 = -\left(\frac{C_2}{3}\right)^3$和$\zeta_2 = -\left(\frac{C_2'}{3}\right)^3$[函数（7.51）和（7.52）当然是连续的]。根据Kazanskiy, Monin (1958)，如果我们在小的ζ值保留方程中$f(\zeta)$和$f_1(\zeta)$的线性项（即如果我们假设对于$0 > \zeta > \zeta_1 f(\zeta) = \ln|\zeta| + \beta\zeta$，$\varphi(\zeta) = 1 + \beta\zeta$，对于$\zeta < \zeta_1$，$f(\zeta) = \ln|\zeta_1| + \beta\zeta_1 + C_2(\zeta^{-1/3} - \zeta_1^{-1/3})$，$\varphi(\zeta) = -\frac{C_2}{3}\zeta^{-1/3}$），那么也可以得到同样的结果。这里$\beta$可以取为使得函数$1 + \beta\zeta$在小的$\zeta$给出$\varphi(\zeta)$的实验值很好的近似，于是$\zeta_1$由$1 + \beta\zeta_1 = -\frac{C_2}{3}\zeta_1^{-1/3}$决定，这保证了$\varphi(\zeta)$在$\zeta = \zeta_1$点连续。另一方面，根据Priestley (1960a)并且取常数β和ζ_1为未定的，我们可以选择这些常数使得函数

$$\varphi(\zeta) = \begin{cases} 1 + \beta\zeta, & \text{当}\zeta_1 \leq \zeta < 0, \\ -\frac{C_2}{3}\zeta^{-1/3}, & \text{当}\zeta \leq \zeta_1. \end{cases} \tag{7.53}$$

在点ζ_1有连续的导数。于是

$$f(\zeta) = \int^{\zeta} \frac{\varphi(\xi)}{\xi} \mathrm{d}\xi$$

对所有ζ有两阶连续导数。一般地写出

$$\varphi(\zeta)=\begin{cases}1+\beta_1\zeta+...+\beta_n\zeta^n, & 当\zeta_1\le\zeta<0,\\ -\frac{C_2}{3}\zeta^{-1/3}, & 当\zeta\le\zeta_1.\end{cases} \tag{7.54}$$

我们可以保证函数（7.54）有n阶连续导数，于是$f(\zeta)$有$(n+1)$阶连续导数。然而，为了做到这一点，只需要令函数$1+\beta_1\zeta+...+\beta_n\zeta^n$和$-\frac{C_2}{3}\zeta^{-1/3}$以及它们的前$n$阶导数在点$\zeta=\zeta_1$相等，然后从$n+1$个方程的系统中得到$n+1$个未知量$\zeta_1,\beta_1,...,\beta_n$。对于任意$n$，不难得到这个方程组的显式解。根据这些解，如果$n\to\infty$，那么$\zeta_1\to\infty$，但系数$\beta_k$都趋向于有限值

$$\lim_{n\to\infty}\beta_k=\frac{a^{3k}}{(3k+1)k!C_2^{3k}},其中a=3\lim_{n\to\infty}\frac{3^n n!\sqrt[3]{n}}{4\cdot 7...(3n+1)}\approx 2.7 \tag{7.55}$$

[见Priestley (1960a)]。系数β_k极限值（7.55）对应于无限可微的解析的极限内插函数

$$\varphi(\zeta)=\frac{C_2}{a\zeta^{1/3}}\int_0^{a\zeta^{1/3}/C_2}e^{t^3}dt. \tag{7.56}$$

对于函数φ_T可以写出完全类似的内插公式，唯一的不同是系数C_2现在必须替换为$C_2'=\frac{\alpha_0}{\alpha_{-\infty}}C_2=C_1\kappa^{4/3}\alpha_0$。所以$n$赋值$1,2,...$和$\infty$我们得到无限个（7.54）形式的函数$\varphi(\zeta)$和$\varphi_T(\zeta)$的内插公式。可以发现这些内插公式[包括极限公式（7.56）]彼此相差非常小，以实际上相同的方式描述了已有的数据（数据有相当大的弥散）。为了展示各个内插公式之间的接近，图51展示了借自Priestley (1960a)的一张图。这张图代表了无量纲热流

$$\overset{*}{q}=\frac{q}{c_p\rho_0\left(\frac{g}{T_0}\right)^{1/2}\left|\frac{\partial T}{\partial z}\right|^{3/2}z^2}=\frac{\kappa^2\alpha_0^{3/2}}{[\varphi_T(\zeta)]^{3/2}\zeta^{1/2}}$$

（这在自由对流条件下变为常量），通过使用（7.54）类型的$n=0,2$和5的$\varphi_T(\zeta)$的内插公式得到。在用作图51基础的计算中，假设$\alpha_0=1$（并且一般来说$\alpha(\zeta)\equiv 1$），$\kappa=0.4$和$C_2'=C_2=0.95$（最后一个值对应于大气中温度分布的某些数据）。这里$\mathrm{Ri}=\mathrm{Rf}=\frac{\zeta}{\varphi_T(\zeta)}$画作横坐标（如果我们使用宗量$\zeta=\frac{z}{L}$作为横坐标，那么曲线之间的差异更小）。一般来说，对于$C_2=0.95$，对应于“零阶”内插公式（7.51）$[\zeta_1=-\frac{C_2^3}{27}]$和“极限”公式（7.56）的$\varphi(\zeta)$值之间的差异从不超过15%，仅在靠近$\zeta_1$ 的ζ值看到接近15%的偏差，这基本是和曲线（7.51）在$\zeta=\zeta_1$处存在跳变不连续性有关。借助方程（7.53），第一次平滑马上得到和方程（7.56）偏差

不超过5%的$\varphi(\zeta)$值。所以很明显，在处理大气中的观测时，使用比方程（7.53）复杂的（7.54）类型的内插公式意义不大。由这个观点，对Webb (1960)使用以下形式的内插公式的提议：

$$\varphi(\zeta)=\begin{cases}1+\beta\zeta, & \text{当}\zeta_1\le\zeta<0,\\ -\frac{C_2}{3}\zeta^{-1/3}+C\zeta^{-1/3}, & \text{当}\zeta\le\zeta_1.\end{cases}\tag{7.57}$$

几乎没有充分理由，其中系数C_2由数据确定，β、C和ζ_1由这个条件选择：函数（7.57）在点$\zeta=\zeta_1$应该有二阶连续导数（或者ζ_1由观测得到，β、C_2和C根据前面提到的条件选择）。

直到现在，正ζ情形的实验研究还非常少。所以，似乎合理的是在$0<\zeta<\infty$使用函数$f(\zeta)$和$\varphi(\zeta)=\zeta f'(\zeta)$的内插公式

$$f(\zeta)=\ln\zeta+\beta_1'\zeta,\quad \varphi(\zeta)=1+\beta_1'\zeta\tag{7.58}$$

这给出了接近于令和大的正ζ时的正确结果。

按照Ellison (1957)可以得到一种不同类型的内插公式，我们取$\zeta=\frac{z}{L}\to 0$（即对于中性分层）时$\mathrm{Rf}\to 0$ 以及对于$|\zeta|\gg 1$（即对于自由对流）时$K\approx\kappa u_* z$，$-\mathrm{Rf}\sim|\zeta|^{4/3}$，$K=\kappa u_* L\cdot\mathrm{Rf}\sim\kappa u_* z|\zeta|^{1/3}$[如果我们假设$0<\alpha_{-\infty}<\infty$，见方程（7.38）和（7.41）]，即$\frac{K}{\kappa u_* z}\approx(-\sigma\mathrm{Rf})^{1/4}$，其中$\sigma$时某个常数[容易看到，等于$(3/C_2)^3$]。由此开始，我们可以预期对于整个$0\ge\mathrm{Rf}>-\infty$范围（即沿$0\ge\zeta>-\infty$半轴）$K$对Rf的依赖可以很好地用这种形式的方程描述：

$$K=\kappa u_* z(\sigma\mathrm{Rf})^{1/4}\tag{7.59}$$

这在小的和大的Rf值都给出了正确的结果。同时，可以发现当$\sigma=1/\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}$，方程（7.59）在非常稳定分层的极限情形也给出了渐近正确的结果。实际上，从方程（7.59）明显可以看出当Rf增大，它永远不会超过$1/\sigma$，并且当$\mathrm{Rf}\to 1/\sigma$（即当$\zeta=\frac{z}{L}\to+\infty$），$K/z\to 0$，和方程（7.42）完全一致。所以可以预期，使用含有一个经验常数σ的方程（7.59），我们可以给出任意分层情形下湍流分层介质中平均速度分布的近似描述。它很难依赖于$\sigma=1/\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}$值，这个值等于$\sigma=27C_2^{-3}$（这给出了$K(\mathrm{Rf})$在大的负Rf值的真实渐近行为）。然而，因为目前$\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}$和$C_2$的值知道得不太精确，我们还米有足够理由对于$\mathrm{Rf}<0$和$\mathrm{Rf}>0$在方程（7.59）中使用不同的$\sigma$值。

方程（7.59）也可以由将湍流的半经验理论推广到分层介质的最简单尝试得到。实际上，如我们已经在6.5节看到的，分层介质中的湍流能量平衡

的半经验方程可以转换为

$$K = u_* l_1 (1 - \sigma \mathrm{Rf})^{1/4}, \tag{7.60}$$

其中$l_1 = \kappa z \lambda(\mathrm{Rf})$是适当定义的“湍流长度标度”。如果现在假设$\lambda(\mathrm{Rf}) \equiv 1$，即任意分层的标度$l_1$由一个相同的方程$l_1 = \kappa z$（这在中性分层的情形是对的）给出，那么可以立即得到方程（7.59）。Obukhov (1946)正是用这种方式第一次得到了这个方程，他用它研究了函数$f(\zeta)$和$\varphi(\zeta)$在大的正ζ和大的负ζ 值的渐近行为。近年来，很多研究者用各种方法详细讨论了方程（7.59）的推导[见，例如Yamamoto (1959)、Panofsky (1961a)、Priestley (1961)、Sellers (1962)、Syono, Hamuro (1962)、Klug (1963)和Rijkoort (1968)]。然而，因为所有推导都使用了某些任意假设，所以它们对Ellison的观点几乎没有发展。Ellison把方程（7.59）简单地考虑为$K(\mathrm{Ri})$的插值公式，对于$\zeta = \frac{z}{L}$ 大的负值、接近于零的值和大的正值给出正确的结果。

因为$K = \frac{\kappa u_* z}{\varphi(\zeta)}$和$\mathrm{Rf} = \frac{\zeta}{\varphi(\zeta)}$，方程（7.59）可以重写为下面函数$\varphi(\zeta)$简单的代数方程

$$\varphi^4 - \sigma\zeta\varphi^3 - 1 = 0. \tag{7.61}$$

这个方程含有一个未知常数σ，可以通过引入物理量$\eta = \sigma\zeta = \frac{z}{L_*}$替代$\zeta = \frac{z}{L}$作为自变量而消去，其中$L_* = \frac{L}{\sigma}$。于是这个方程具有这种形式

$$\varphi^4 - \eta\varphi^3 - 1 = 0. \tag{7.62}$$

Yamamoto (1959)和Klug (1963)数值求解了方程（7.62）。Yamamoto给出了函数$\varphi(\eta)$值的表[和示意图47符合得很好]以及这个函数在正半轴和负半轴的简单解析近似。图中画出了对于不同分层参数$\eta_0 = \sigma z_0/L$，无量纲风速$\kappa\overline{u}/u_*$ 作为无量纲高度z/z_0的函数。后来Syono, Hamuro (1962)和Okamoto (1963)给出了四阶方程（7.61）的完全解，并对函数$\varphi(\eta)$和相应的风速分布进行了更详细的研究。然而，我们不详细讨论方程（7.61）解的研究，我们对此不感兴趣。在任何情形，这只是φ可能的插值公式中的一个（此外，它显然不是非常精确的那个）。

让我们也注意到对于$\zeta \leq 0$，支持方程（7.59）的论据也可以用于证明方程

$$K = \kappa u_* z (1 - \sigma' \mathrm{Ri})^{1/4} \qquad (7.59')$$

其中σ'是另一个常数（也就是说$\sigma' = \sigma_{-\infty}\sigma$）。如果我们现在把长度$L$替换为$L' = u_*(\partial u/\partial z)/\kappa(g/T_0)(\partial T/\partial z) = \sigma(\zeta)L$，把变量$\zeta = z/L'$换为$\zeta' =$

z/L'，那么方程（7.59'）可以重写为类似于方程（7.61）的形式，但是把ζ换为ζ'[$\varphi(\zeta)$换为$\varphi(\zeta')$]，把σ换为σ'。Panofsky, Blackadar, McVehil (1960)和其他一些人使用了这个$\varphi(\zeta')$的方程（见8.1节）。

特别地，方程（7.61）不能严格从上面提到的事实得出，即这个方程对应于物理上不可能的假设，湍流在高度z的标度l_1不依赖于温度分层。然而，如果我们假设

$$l_1 = \kappa z \lambda\left(\frac{z}{L}\right), \tag{7.63}$$

那么我们得到φ的方程

$$\varphi^4 - \sigma\zeta\varphi^3 - \frac{1}{\lambda^4} = 0, \tag{7.64}$$

这含有另一个未知的普适函数$\lambda(\zeta)$[参见Yokoyama (1962b)]。

在稳定分层的情形，湍流交换变得更困难，大的湍流结构不能存在（在$\mathrm{Rf} > \mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}} = 1\sigma$湍流根本不存在）。所以，自然的是预期，对于正的$\zeta$，函数$\lambda$会随这$\zeta$从零增大到无穷大（或当Rf从零增大到$\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}$）而单调地从$\lambda(0) = 1$ 减小到零。作为函数$\lambda(\mathrm{Rf})$的一个具体例子，Kazanskiy, Monin (1956) 考虑了$\lambda(\mathrm{Rf}) = (1-\sigma\mathrm{Rf})^{\gamma-\frac{1}{4}}$的情形，其中$\gamma > \frac{1}{4}$是某个数。这样选择$\lambda(\mathrm{Rf})$，方程（7.60）变为

$$K = \kappa u_* z(1-\sigma\mathrm{Rf})^{\gamma}. \tag{7.65}$$

（Holzman (1943)用$\gamma = 1/2$的这个关系作为K的经验公式。）再一次把K和Rf用函数$\varphi(\zeta)$表示，我们发现方程（7.65）等价于方程

$$\frac{1}{\varphi(\zeta)} = \left[1 - \frac{\sigma\zeta}{\varphi(\zeta)}\right]^{\gamma}. \tag{7.66}$$

方程（7.66）表明，当$\eta = \sigma\zeta \geq 0$（即在稳定分层时）$\varphi \geq 1$，$\varphi(0) = 1$，而在$\eta \to \infty$时$\varphi(\eta) \to \infty$。对于小的$\eta$，我们可以令$\varphi(\eta) = 1 + \delta$，其中$\delta \ll 1$。我们容易发现$\delta = \gamma\eta$，即$\varphi \approx 1 + \sigma\gamma\zeta$。所以乘积$\sigma\gamma = \beta$必须等于方程（7.32）中的系数$\beta$。此外，对于大的$\eta = \sigma\zeta$，渐近关系$\varphi \approx \eta = \sigma\zeta$成立，表明$\sigma = \frac{1}{R} = \frac{1}{\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}}$[参见方程（7.43）]。Kazanskiy和Monin对$\gamma = 0.6$的特殊情形计算了$\varphi(\eta)$和$f(\eta)$。基于这个计算得到的无量纲涡黏滞系数$\sigma K/\kappa u_* L$对无量纲高度$\eta = \sigma_z/L$的依赖非常接近于指数依赖$\sigma K/\kappa u_* L = 1 - e^{-\eta}$，这被用于很多气象学工作中[Dorodnitsyn (1941), Matveyev (1960)及其他]。Borkowski (1964)考虑了$\gamma = 6$的情形，Rijkoort (1968)对一些γ值详细研究了一般方程（7.66）。

近似（7.65）对正的ζ（以及Rf）最合适。实际上，应用到负的ζ（对于不稳定分层）时，它仅当$\gamma = 1/4$ 时给出$\zeta \to -\infty$以及$\mathrm{Rf} \to -\infty$时给出明显正确的自由对流规律（7.38）-（7.40）。所以，当$\zeta < 0$，必须要么使用方程（7.66）的特殊形式（7.61）[即，事先假设$\gamma = 1/4$]，要么舍弃存在有限极限$\alpha_{-\infty}$的假设。也容易得到湍流标度l_1对不稳定条件下分层的依赖的一般形式，符合自由对流规律。实际上，如果我们假设$l_1 = \kappa z\lambda(z/L)$[所以对于近似（7.61）$\lambda(\zeta) = 1$]，于是由方程（7.64）和（7.39）我们得到

$$\lambda(\zeta) = \left(\frac{27}{\sigma C_2^3}\right)^{1/4}\left(1 + \frac{C_2}{3\sigma\zeta^{4/3}}\right)^{-1/4} \to \lambda(\infty) = \left(\frac{27}{\sigma C_2^3}\right)^{1/4} \text{当}\zeta \to -\infty. \tag{7.67}$$

（这里$\lambda(\infty) =$ 常量（即l_1正比于z）自然地从自由对流条件中没有z以外的固定长度标度这

一点得出。）对于小的z值，使用方程（7.32）我们得到

$$\lambda(\zeta) \approx 1 - \left(\beta - \frac{\sigma}{4}\right)\zeta, l_1 \approx \kappa z \left[1 - \left(\beta - \frac{\sigma}{4}\right)\frac{z}{L}\right]. \quad (7.67')$$

所以，如果$\beta > \frac{\sigma}{4}$，那么当ζ从零变化到$-\infty$，函数$\lambda(\zeta) = l_1/\kappa z$会首先线性增大，然后其增长速率会减小，当$\zeta \to \infty$，它会趋向于常量。

我们也可以从以某种方式选择函数$\lambda(\zeta)$开始。然有由四次方程（7.64）容易确定函数$\varphi(\zeta)$，即得到风随高度的分布，对应于一个给定的湍流标度$l_1 = \kappa z\lambda(z/L)$。这种方法的例子可以在Takeuchi, Yokoyama (1963)的工作中找到，那里使用了非常粗糙的数据粗略估计湍流可能的“标度”，然后计算了相应的函数$\varphi(\zeta)$。

方程（7.61）[或对于给定$\lambda(\zeta)$的方程（7.64）]和（7.66）时从半经验理论得到的$\varphi(\zeta)$的特殊例子。如我们已经在第3章看到的，对于均匀介质中的湍流也存在半经验理论的一系列不同变体，它们得出略微不同的结果。所以，在复杂得多的非中性分层的条件下，可能的半经验理论的数量非常大，这些理论得到非常不同的$\varphi(\zeta)$和其他普适函数表达式。当然，所有这些理论都含有某些任意假设，需要进一步验证。然而，在很多情形得到的$\varphi(\zeta)$的表达式甚至不满足前一小节推导的一般渐近关系，只能用于有限的一些ζ值范围。所以，例如，在Rossby, Montgomery (1935)提出的分层介质中的第一个半经验理论中，假设$K = u_* l_1$，并且用一个特殊的假设定义标度l_1对高度和分层的依赖。结果，这些作者得出结论

$$K = \frac{\kappa u_* z}{(1 + \sigma \mathrm{Ri})^{1/2}}, \quad (7.68)$$

其中$\sigma =$ 常量，即

$$\varphi^3 - \varphi - \sigma\zeta = 0 \quad (7.69)$$

如果$\alpha(\zeta) \equiv 1$[参见从方程（7.59）推导方程（7.61）]。如果$|\zeta| \ll 1$，方程（7.68）和（7.69）得到合理“对数+线性”的风分布方程（$\beta = \sigma/2$）。然而$\varphi(\zeta)$在$\zeta \to -\infty$和$\zeta \to +\infty$的渐近行为这里都不正确。在Ogura (1952a)发展的另一个半经验理论中，初始前提是湍流能量平衡方程和$K = \frac{u_* l_1^2}{\kappa z}$和$\alpha \equiv 1$的假设。随后得到了一个风速的公式，按照我们的符号可以写为

$$\varphi(\zeta) = \left(1 + \frac{\sigma^2}{4}\zeta^2\right)^{1/2} + \frac{\sigma}{2}\zeta, \quad (7.70)$$

其中σ是一个经验常数。很明显当$|\zeta| \ll 1$，这个公式也等价于“对数+线性”公式（$\beta = \sigma/2$）。然而，当$\zeta \to -\infty$，再一次，我们没有得到对应自由对流条件下风速分布（和温度分布）的“1/3次幂定律”的关系式（7.39）（在另一个极限情形$\zeta \to +\infty$，如果我们假设$\sigma = 1/R = 1/\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}$，正确的渐近关系式满足的）。Bussinger (1955)也使用了Ogura的涡黏滞假设，但是结合了Rossby-Montgomery对标度l_1的假设（而没有使用半经验的能量平衡方程）。他得到的结果可以写为

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{\frac{1}{2}[1 + (1 - 4\zeta)^{1/2}] - \zeta}. \quad (7.71)$$

根据方程（7.71），在$|\zeta| \ll 1$时$\varphi(\zeta) \approx 1 + 2\zeta$，但$\varphi(\zeta)$在大的$|\zeta|$值时的渐近行为再次被证明对每种符号的$\zeta$都不正确。（在强稳定性情形，可以发现$\varphi(\zeta)$甚至取复值。）

借助一个特殊的非常人为的假设，Swinbank (1960, 1964)得到了非常简单的公式

$$\varphi(\zeta) = \frac{\zeta}{1 - e^{-\zeta}}, \quad (7.72)$$

和方程（7.71）一样，它根本不含有经验常数。这个公式对于非常小和非常大的正ζ值（系数$\beta = 0.5$，$R = C_3 = 1$）也有正确的渐近形式[分别具有方程（7.32）和（7.43）的形式]，但是当$\zeta \to -\infty$它不变为“1/3幂律定律”。我们进一步注意到方程（7.72）得出涡黏滞系数K对高度的简单的指数依赖[正比于$1 - \exp(-z/L)$]这在稳定分层的情形似乎是可能的。Kao (1959)提出了半经验理论的另一种变体，其主要结果写为

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2}\{1 + (1 + 4\sigma\zeta)^{1/2}\}\text{对于}\zeta > -\frac{1}{4\sigma}, \tag{7.73}$$

其中σ是一个经验常数。类似于所有前面的公式，方程（7.73）在接近中性条件时简化为“对数+线性”分布，但是当$\zeta \to +\infty$，它的渐近行为不对。在Businger (1959)的半经验理论中得到了一个更复杂的$\varphi(\zeta)$的关系式，可以写为

$$\varphi(\zeta) - \sigma\zeta = \left\{\frac{\sigma\zeta + [(\sigma\zeta)^2 + 4(\varphi(\zeta) - \sigma\zeta)^2]^{1/2}}{2\varphi(\zeta)}\right\}^{3/4}. \tag{7.74}$$

这个关系的优点在于相应的函数$\varphi(\zeta)$在$\zeta \to +\infty$（$\mathrm{Rf_{cr}} = 1/\sigma$，也就是$C_3 = \sigma$）和$\zeta \to -\infty$显示出正确的渐近行为。Zilitinkevich and Laykhtman (1965)发现的函数

$$f(\zeta) = \int^{\zeta} \frac{\varphi(\xi)}{\xi}\mathrm{d}\xi$$

也显示出同样的优点。这个函数是从半经验能量平衡方程（6.48）开始[$\alpha_b = 0$，即忽略能量扩散]辅以下面冯·卡门“混合长”l假设（5.119）的推广

$$l = -\kappa_1 \frac{\left(\frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}z}\right)^2 - \alpha\frac{g}{T_0}\frac{\mathrm{d}\overline{T}}{\mathrm{d}z}}{2\frac{\mathrm{d}\overline{u}}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}^2\overline{u}}{\mathrm{d}z^2} - \alpha\frac{g}{T_0}\frac{\mathrm{d}^2\overline{T}}{\mathrm{d}z^2}}$$

得到的（其中κ_1和α是经验常数，$\alpha = K_T/K$）。Vager (1966)用数值方法发展了考虑能量扩散效应（即假设$\alpha_b \neq 0$）的更一般的半经验理论，也得到了函数$\varphi(\zeta)$和$f(\zeta)$的明确形式。同时，由Yamamoto，Shimanuki (1966)的半经验论证，主张用一对方程替代方程（7.62）：

$$\begin{aligned} &\varphi^4 - |\eta|\varphi^3 - 2\varphi^2 + 1 = 0\text{对于不稳定情形}(\eta < 0) \\ &\varphi^4 - |\eta|^{1-2p}\varphi^3 - 2\varphi^2 + 1 = 0\text{对于稳定情形}(\eta > 0) \end{aligned} \tag{7.75}$$

其中p是一个小的数值常数。他们计算了对应于$p = 1/6$的方程（7.75）的普适函数。方程（7.75）第一个方程的解非常接近方程（7.62）在$\eta < 0$的解（在$\eta \to 0$或$\eta \to -\infty$时有相同的渐近行为），但第二个方程的解对小的η表现为$1 + 1/2|\eta|^{1/2-p}$，对大的η表现为$|\eta|^{1-2p}$，即仅当$p = 0$时具有通常的行为。

Pandolfo (1966)使用了确定不稳定分层的低层大气中的风和温度分布的普适函数的另一种方法。他假设风速在$0 > \zeta > \zeta_1$范围满足“对数+ 线性”方程，而温度分布在$\zeta < \zeta_1$满足“1/3幂律”（7.35）-（7.36）。这表明为了在整个$\zeta < 0$半轴完全确定函数$\varphi(\zeta)$和$\varphi_1(\zeta)$，只需要知道函数$K_T/K = \alpha(\zeta)$。最后一个函数是Pandolfo借助对所有$\zeta < 0$有$\zeta = \mathrm{Ri}$这个有问题的假设得到的。根据这个假设以及对风和温度分布的假设得到，当$0 > \zeta > \zeta_1$，$\alpha(\zeta) = 1/(1 + \beta\zeta)$，而当$\zeta < \zeta_1$，$\alpha(\zeta) \sim |\zeta|^{1/6}$。现在，非常容易写出对于所有$\zeta < 0$值函数$\varphi(\zeta)$和$\varphi_1(\zeta)$的最终方程。因为根据Pandolfo的理论，

当$\zeta \to -\infty$，$\alpha(\zeta) \to \infty$，很明显相应的速度分布$\overline{u}(z)$不满足“1/3幂律”。

Businger (1966)基于不是非常可靠的纯经验论证提出了不稳定情形（即$\zeta < 0$）的另一组速度和温度分布的方程。这些方程具有这种形式

$$\varphi(\zeta) = (1-\beta\zeta)^{-1/4}, \varphi_1(\zeta) = (1-\beta\zeta)^{-1/2}, \alpha(\zeta) = (1-\beta\zeta)^{1/4}. \tag{7.76}$$

我们也看到这里对于所有$\zeta < 0$，$\zeta = \mathrm{Ri}$，“1/3幂律”对速度或温度分布都不对。

还可以给出进一步例子说明如何使用半经验假设确定函数$\varphi(\zeta)$和$f(\zeta)$[见，例如Elliott (1957, 1960)、Kravchenko (1963)、Naito (1964)特别是Rijkoort (1968)，那里考虑了很多$\varphi(\zeta)$和$f(\zeta)$的假设方程]。然而，必须记住，以这种方式得到的这些函数的所有表达式都只应看作近似公式，其在给定ζ（或Rf或Ri）范围的精确度必须进一步基于和观测的比较来确定。在下一节中，我们将看到已有观测数据的弥散相当大，所以在各种半经验公式之间做选择相当困难。

除了风分布的半经验公式（量纲是对的）[即，它们简化为某些关于函数$\varphi(\zeta)$或$f(\zeta)$的假设]，我们还在气象学文献中找到了大量工作（通常超过十五年历史），提出了气象学变量分布的半经验或纯经验公式，不是基于量纲分析（经常含有一些理查德森数或其他分层特征量的经验函数，而不是经验常数）。所以，例如，一些年来，科学文献中热烈讨论了使用“广义对数定律”（含有依赖于稳定性的参数）描述不同温度分层条件下大气表面层中风分布的可能性。在提倡这个定律的作者有，例如，Rossby, Montgomery (1935)、Sutton (1936, 1937)、Budyko (1946, 1948)、Bjorgum (1953)。所有“广义对数定律”的一个明显缺陷是，它们没有考虑风速对高度的依赖对非中性分层条件下对数方程实际的系统性偏差。此外，即使在温度分层起非常小作用的最低层中，广义对数分布也不太像是大气中观测结果的规律（特别是，风分布外插到$\overline{u}(z_0) = 0$得出一个依赖于稳定性的z_0 值，即不是下垫面的客观特征）。

其他作者，包括Schmidt (1925)、Best (1935)、Laykhtman (1944, 1947a)、Frost (1948)、Deacon (1949)和Takeda (1951)，提出用z的幂函数近似大气表面层的风分布（即用所谓“广义幂律”）。Schmidt、Best和Frost使用了一个简单的公式$\overline{u}(z) \sim z^{\epsilon}$，而Laykhtman、Deacon和Takeda发展了一个理论，其中

$$\overline{u}(z) = \overline{u}(z_1)\frac{z^{\epsilon - z_0^{\epsilon}}}{z_1^{\epsilon} - z_0^{\epsilon}} \tag{7.77}$$

也就是说

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \sim z^{\epsilon-1}\text{如果}z \gg z_0$$

其中ϵ是依赖于热分层的参数（对于逆温分层为正，对于中性分层为零，对于不稳定情形为负）。方程（7.77）使得我们可以探测到风速分布和对数定律偏离的一般特征。当$\epsilon \to 0$，风速分布变为普通的对流分布。然而，如果按照Laykhtman的工作，我们假设参数z_0也依赖于分层，那么分层效应在$z \to 0$仍然明显，这和类似的理论的推论矛盾。此外，为了在每个情形符合观测数据，这样的理论中自由参数的数量大得难以得到它们的值，并且计算的精度会降低。然而，如果根据Deacon，我们取z_0 为常量，那么我们必须假设ϵ也依赖于高度[见，例如Davidson, Barad (1956)]，这是完全不令人满意的。我们也必须指出，公式（7.77）和7.2节的量纲考虑也不一致。特别是，$\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}$这里明显依赖于函数$\epsilon = \epsilon(\mathrm{Ri})$[Ri在固定高度取值]和粗糙度参数$z_0$（在Laykhtman的情形也依赖于分层）。

基于对数据的分析，有人提出，特别是Halstead (1934)和Panofsky (1952)提出，通过

在对数定律中中引入一个线性修正考虑风分布的分层效应，即使用这种形式的公式：

$$\overline{u}(z) = \frac{u_*}{\kappa}\left(\ln\frac{z}{z_0} + bz\right), \tag{7.78}$$

其中b是一个依赖于稳定性的参数（对于逆温为正，在不稳定情形为负）。公式（7.78）可以从量纲分析得到。我们仅需要另$b = \frac{\beta}{L}$，这转变为Monin-Obukhov公式（7.33）。

所有关于风分布的论述可以对温度和湿度分布充分，只要分层是不稳定的、中性的或略微稳定的。然而，对于非常稳定的情形，如我们已经看到的，出现了一种特殊情况。有理由相信在这些条件下涡扩散系数$K_T = K_\vartheta$比K小很多，所以在此情形温度$\overline{T}$和外加物浓度$\overline{\vartheta}$的浓度的分布在形式上不同于平均速度分布（参见图48和50）。这个现象的理论分析有巨大的困难，到目前为止还没有明显的成功。然而，值得提到Ellison (1957)尝试估计$\alpha = \frac{K_T}{K}$对理查德森数$\mathrm{Rf} = \frac{\zeta}{\varphi(\zeta)}$的依赖，因为它得出的结果和Ellison, Turner (1960)[见下面8.2节末]后来的实验符合得出乎预料地好。为了计算α，Ellison使用了分层介质中的湍流能量平衡方程以及相关的二阶矩$\overline{T'^2}$、$\overline{w'^2}$和$\overline{w'T'}$的方程。如我们已经在6.1节看到的，不幸的是这些方程含有大量新的未知项。所以，为了得到他的推论，Ellison进行了一些额外的粗略假设（半经验假设类型的），由此某些项被假设小得可以忽略，并且假设了不可忽略的项和所考虑的二阶矩之间的某种联系。使用这些假设（隐含了在高度稳定情形热交换和动量交换相比较小的假设），Ellison得到了一个关系式，可以写为

$$\alpha(\zeta) = \frac{K_T}{K} = \frac{\alpha_0(1-\mathrm{Rf}/R)}{(1-\mathrm{Rf})^2} = \frac{\alpha_0\varphi(\zeta)[R\varphi(\zeta)-\zeta]}{R[\varphi(\zeta)-\zeta]^2}, \tag{7.79}$$

其中α_0和R是ζ的缓变函数，在一阶近似下，可以简单假设为经验常数。很明显这里对于中性分层（即在对数层中）α_0 等于K_T/K值，R是Rf永远不能超过的临界值$\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}$，对于这个值$K_T$变为零。Ellison根据非常粗糙的直觉估计得出结论，参数R一定远小于1（例如，接近1/7或1/10）。然而，这个结论仍然不是最终的。如果我们知道Rf接近其极限值$R = \mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}$的方式，即函数$\varphi(\zeta)$在大$\zeta$时的渐近展开$\varphi(\zeta) = \frac{\zeta}{R}[1+o(1)]$中的小量$o(1)$的阶，那么由方程（7.79）也有可能确定函数$\varphi_1(\zeta)$[或者$\varphi_T(\zeta) = \frac{1}{\alpha_0}\varphi_1(\zeta)$]在$\zeta \to \infty$的渐近行为。然而，目前我们仍然没有必须的数据。

7.5 分层边界层中湍流状态的一般相似性假设及其在湍流涨落特征量中的应用

目前，我们只考虑了大气表面层中平均速度、温度和湿度的分布，并且仅对它们使用了7.2节中讨论的量纲分析。然而，这些分析具有一般性特征，7.3-7.4节的结果远没有穷尽相似性理论在分层边界层中湍流中的应用。我们现在要考虑这个理论的进一步应用，联系到除了基本流动变量的平均值外的统计特征量。

首先，我们写出相似性的基本假设的最一般形式。在7.1节中，我们注意到对于平面均匀粗糙表面上方分层流体的平面平行湍流（这是“大气表面层”的一个自然的模型），流体变量的所有一点矩量都只依赖于垂向坐标z。然而，一点矩量的限制仅仅是因为我们主要对它们感兴趣。实际上，在这样的模型中，流动变量值在多个点上的所有概率分布在这一组点在平

面Oxy上的任意平移下以及穿过平均速度$\overline{u}(z)$方向的Oxz平面内的反射变换下是不变的，并且是稳态的（不依赖于时间平移）。换句话说，在这个模型中，任意流动变量在点$(x_1, y_1, z_1, t_1), ..., (x_n, y_n, z_n, t_n)$值的概率分布只能依赖于参数$x_2 - x_1, ..., x_n - x_1; y_2 - y_1, ..., y_n - y_1; z_1, ..., z_n; t_2 - t_1, ..., t_n - t_1$，并且如果$Oy$的方向反过来也不会变换。

作为流动变量，我们仅考虑速度的三个分量u, v, w和温度T（进一步加入外加物浓度ϑ只会导致出现明显的附加公式，在讨论中这一点不重要）。这些变量可以表示为

$$u = \overline{u}(z) + u', \quad v = v', \quad w = w', \quad T = \overline{T}(z) + T', \tag{7.80}$$

其中$\overline{u}(z)$和$\overline{T}(z)$是z的普通（非随机）函数，之前已经详细讨论过了。所以只考虑随机涨落$u'(x, y, z, t)$、$v'(x, y, z, t)$、$w'(x, y, z, t)$和$T'(x, y, z, t)$的概率分布就足够了。在分层介质模型中，应用于大气表面层的湍流状态相似性的一般假设可以表述为：*无量纲涨落u'/u_*、v'/u_*、w'/u_*和$T'/|T_*|$在$(x_1, y_1, z_1, t_1), ..., (x_n, y_n$*
联合概率分布只能依赖于无量纲参量

$$\frac{x_2 - x_1}{|L|}, ..., \frac{x_n - x_1}{|L|}; \frac{y_2 - y_1}{|L|}, ..., \frac{y_n - y_1}{|L|}; \frac{z_1}{|L|}, ..., \frac{z_n}{|L|}; \frac{(t_2 - t_1)u_*}{|L|}, ..., \frac{(t_n - t_1) * u_*}{|L|},$$

只要满足下面两个条件：1)高度$z_1, ..., z_n$不太大（它们位于可以假设$u_* =$常量，$q =$常量的层中，科里奥利力的效应可以忽略）*也不太小*（都远大于“粗糙度高度”z_0）；*2)任意两个不同点(x_i, y_i, z_i)和(x_j, y_j, z_j)之间的距离以及所有非零的差$|t_i - t_j|$都不太小*（故而所考虑的时空点的涨落之间的相互作用没有显示出由空气的分子黏滞和热导率决定的分子效应）*也不太大*（所以水平均匀性条件和稳态条件没有失效）。在本章中，L 和T_*表示和方程（7.12）和（7.14）中同样的长度和温度标度。这个假设的证明实际上已经包含在7.1-7.2节的考虑中。

作为例子，我们将详细考虑一个固定时空点(x, y, z, t)的涨落(u', v', w', T')的联合概率分布。根据相似性假设，这个分布只能依赖于垂向坐标z，其概率密度$\Phi(u', v', w', T')$可以写为

$$\Phi(u', v', w', T') = \frac{1}{u_*^3 |T_*|} \Psi\left(\frac{u'}{u_*}, \frac{v'}{u_*}, \frac{w'}{u_*}, \frac{T'}{|T_*|}; \frac{z}{L}\right), \tag{7.81}$$

其中Ψ是一个五变量的普适函数。当然，一个五个变量的函数是一个非常复杂的特征量。所以重要的是在高度不稳定$\left(\frac{z}{L} \to -\infty\right)$和高度稳定$\left(\frac{z}{L} \to \infty\right)$以及在中性分层$\left(\frac{z}{L} \to 0\right)$的极限情形，公式（7.81）可以简化。

在中性分层情形，$q \to 0$，浮力对湍流没有影响。所以参数g/T_0必须从方程（7.81）中去掉。所以，在此情形，没有对z/L的依赖（L含有g/T_0），即概率分布是依赖于高度的。此外，中性分层情形没有温度涨落，故而Φ对T'的依赖可以用乘数$\delta(T')$描述[其中δ是狄拉克δ-函数]。于是我们得到

$$\Phi(u', v', w', T') \to \frac{1}{u_*^3}\Psi_1\left(\frac{u'}{u_*}, \frac{v'}{u_*}, \frac{w'}{u_*}\right)\delta(T')\text{当}\frac{z}{L} \to 0, \tag{7.82}$$

其中Ψ是一个三变量普适函数，描述了对数层中一点的速度涨落的概率分布。对于$q > 0$，$u_* \to 0$，可以得到非常大不稳定性的极限情形（自由对流），故而在这里参量u_*必须从方程（7.81）中消失。于是得到

$$\begin{aligned}\Phi(u', v', w', T') \to\ & \kappa^{1/3}\left(\frac{g}{T_0}\right)^{-2/3}\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\right)^{-5/3} z^{-2/3} \\ & \times\Psi_2\left(\frac{u'}{\left(\kappa\frac{g}{T_0}\frac{q}{c_p\rho_0}z\right)^{1/3}}, \frac{v'}{\left(\kappa\frac{g}{T_0}\frac{q}{c_p\rho_0}z\right)^{1/3}}, \frac{w'}{\left(\kappa\frac{g}{T_0}\frac{q}{c_p\rho_0}z\right)^{1/3}}, \frac{T'}{\left(\kappa^{-4/3}\frac{g}{T_0}\right)^{-1/3}\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\right)^{2/3} z^{-1/3}}\right),\end{aligned} \tag{7.83}$$

其中Ψ_2是另一个普适函数。最后，可以假设在非常稳定的情形，湍流涨落具有局域特征，即它们的统计性质不再依赖于和下垫面的距离z。所以必须预期当$\frac{z}{L} \to +\infty$，参量z从方程（7.81）消失，即

$$\Phi(u', v', w', T') \to \frac{1}{u_*^3|T_*|}\Psi_3\left(\frac{u'}{u_*}, \frac{v'}{u_*}, \frac{w'}{u_*}, \frac{T'}{T_*}\right)\text{当}\frac{z}{L} \to \infty. \tag{7.84}$$

不幸的是，方程（7.82）-（7.84）还是非常难以验证，因为多维概率分布非常难以可靠地从实验数据确定。因此，我们将进一步限制于仅研究分布（7.81）最简单的特征，也就是说，限制于固定点(x, y, z, t)的涨落u', v', w', T'的最低阶矩。根据一般公式（7.13），这些涨落的任意一点矩量都可以表示为参数$\frac{g}{T_0}$、u_*和$\frac{q}{c_p\rho_0}$的某种组合，乘以一个$\zeta = \frac{z}{L}$的普适函数[从方程（7.81）当然也得到同样的结果]。由涨落量的定义，它们的平均值为零，所以我们可以直接研究二阶矩。一共有十个这种矩量。然而，其中三个，即$\overline{u'v'}$、$\overline{v'w'}$和$\overline{v'T'}$恒等于零。这是由于湍流对于平均风的方向对称（这已经在7.1节联系矩量$\overline{u'v'}$和$\overline{v'w'}$进行了讨论）。矩量$\overline{u'w'} = -u_*^2$和$\overline{w'T'} = \frac{q}{c_p\rho_0}$具有恒定值，所以只需要考虑五个矩量——$u', v', w', T'$的方差（可以方便地考虑标准差$\sigma_u, \sigma_v, \sigma_w, \sigma_T$来代替它们）以

及混合二阶矩$\overline{u'T'}$。根据方程（7.13），这些量可以写为

$$\frac{\sigma_u}{u_*}=f_3(\zeta),\frac{\sigma_v}{u_*}=f_4(\zeta),\frac{\sigma_w}{u_*}=f_5(\zeta)$$
$$\frac{\sigma_T}{|T_*|}=f_6(\zeta),\frac{\overline{u'T'}}{u_*T_*}=f_7(\zeta). \tag{7.85}$$

所以，为了确定风速和温度涨落的所有二阶矩，确定参数u_*和q并且知道五个普适函数f_3,f_4,f_5,f_6和f_7就足够了。特别是，它们可以用于表达有趣的湍流特征量，诸如各向异性系数σ_v/σ_u和σ_w/σ_u以及相关系数r_{uw},r_{wT}和r_{uT}

$$\frac{\sigma_v}{\sigma_u}=\frac{f_4(\zeta)}{f_3(\zeta)},\frac{\sigma_w}{\sigma_u}=\frac{f_5(\zeta)}{f_3(\zeta)},r_{uw}=-\frac{1}{f_3f_5}$$
$$r_{wT}=\pm\frac{\kappa}{f_5f_6},r_{uT}=\mp\frac{f_7}{f_3f_6} \tag{7.86}$$

（在最后两个方程中，上面的符号对应不稳定分层，下面的符号对应稳定分层）。

按定义，函数$f_3(\zeta),...,f_6(\zeta)$显然对所有$\zeta$值是非负的。用函数$f_7(\zeta)$定义的矩量$\overline{u'T'}$描述了平均风方向的湍流传热。这种传热通常不起重要作用，可以忽略。在中性分层和极端不稳定时，$\overline{u'T'}=0$（见下面）。然而，对应其他ζ值，函数$f_7(\zeta)$取正值，因为对于不稳定分层，不等式$T'>0$通常在$w'>0$时成立。所以，u'涨落往往是负的，而对于稳定分层，情况相反。此外，比例$-\overline{u'T'}/\overline{w'T'}=\kappa f_7(\zeta)$甚至可以取大于1的值，因为$u'$涨落经常比$w'$涨落大很多[见下面8.5节和Yaglom (1969)]。

函数$f_3,...,f_7$在$\zeta\to-\infty$、$\zeta\to+\infty$和$|\zeta|\to0$的渐近行为可以从方程（7.82）-（7.84）开始，像上面描述平均分布的函数f,f_1,f_2那样确定。随着不稳定性增长（即，当$\zeta\to-\infty$），u_*必须从（7.85）的所有方程中消失。于是函数f_3,f_4和f_5渐近以$|\zeta|^{1/3}$增长，f_6类似于$|\zeta|^{-1/3}$趋向于零，f_7趋向于某个常数。此外，必须记住，当$u_*\to0$，也有$\overline{u}(z)\to0$，即湍流趋向于这种状态，在平面Oxy中，无法辨认出特殊的方向，u'和v'涨落起到相同的作用（在没有平均水平速度时“真正自由对流”的理想状态）。所有我们一定可以预期当$\zeta\to-\infty$，

$$f_3(\zeta)\approx f_4(\zeta)\approx C_4|\zeta|^{1/3},\quad f_5(\zeta)\approx C_5|\zeta|^{1/3},$$
$$f_6(\zeta)\approx C_6|\zeta|^{-1/3},\quad f_7(\zeta)\approx 0,$$

(7.87)

或者，换句话说，

$$\sigma_u \approx \sigma_v \approx C_4' \left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{gz}{T_0}\right)^{1/3}, \sigma_w \approx C_5' \left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{gz}{T_0}\right)^{1/3}$$
$$\sigma_T \approx C_6' \left(\frac{q}{c_p\rho_0}\right)^{2/3} \left(\frac{gz}{T_0}\right)^{-1/3}, \overline{u'T'} \approx 0$$

[σ_w的公式（7.87'）实际上在Prandtl (1932a)就已经知道了，但随后被忘记了，后来Obukhov (1960)独立得到了这个公式以及σ_T的公式]。方程（7.87）中的普适常数$C_4 = C_4'\kappa^{-1/3}$、$C_5 = C_5'\kappa^{-1/3}$和$C_6 = C_6'\kappa^{4/3}$可以从观测确定。由方程（7.87）得到，在自由对流条件，$\frac{\sigma_v}{\sigma_u} \approx 1$，$\frac{\sigma_w}{\sigma_u} =$ 常量，$r_{wT} =$ 常量，$r_{uw} \sim |\zeta|^{-2/3} \to 0$以及$r_{uT} \approx 0$。在另一个极限情形，当$\zeta \to \infty$（即，稳定性无限增长），由方程（7.84），湍流特征量不能明显依赖于z。所以当$\zeta \to \infty$，方程（7.85）的所有函数[以及它们的组合（7.86）]一定趋于恒定。最后，当$|\zeta| \to 0$，温度涨落为零[见方程（7.82）]并且$T_* \to 0$。于是，$f_6(0)$和$f_7(0)$只能解释为极限。实际上，函数$f_6(\zeta)$和$f_7(\zeta)$必须看组由单独的两个分支组成（$\zeta > 0$和$\zeta < 0$）。对于常量$f_3(0) = A_3$、$f_4(0) = A_4$和$f_5(0) = A_5$，它们描述了均匀流体对数层中速度涨落的强度，有确定的值（见上面5.3节，那里这些常量记作A_1, A_2和A_3）。对于小的$|\zeta|$值，f_3, f_4和f_5可以近似由泰勒级数的两项描述：

$$f_i(\zeta) = A_i + \beta_i\zeta, i = 3, 4, 5, \tag{7.88}$$

其中系数β_i都是负的（因为随着稳定性增长，湍流交换变弱）。

可以写出涨落u', v', w'和T'的高阶矩类似于方程（7.85）的方程。例如

$$\frac{\overline{w'^3}}{u_*^3} = f_8(\zeta), \quad \frac{\overline{T'^3}}{|T_*|^3} = f_9(\zeta),$$
$$\frac{\overline{w'(u'^2 + v'^2 + w'^2)}}{u_*^3} = f_{10}(\zeta), \frac{\overline{w'T'^2}}{u_* T_*^2} = f_{11}(\zeta)$$

(7.89)

函数f_8和f_9描述了w'和T'概率分布的斜度：

$$\frac{\overline{w'^3}}{\sigma_w^3} = \frac{f_8}{f_5^3}, \quad \frac{\overline{T'^3}}{\sigma_T^3} = \frac{f_9}{f_6^3}, \tag{7.90}$$

而函数f_{10}和f_{11}描述了湍流能量的垂向扩散和温度涨落的强度。基于热对流的概念，作为一组以相对密集的窄射流形成出现的暖空气上升运动和相当大质量缓慢下沉形式的冷空气下降运动，我们可以预期$f_8, ..., f_{11}$是正的，至少对于负的ζ 如此。根据方程（7.82）-（7.84），当不稳定性增强（当$\zeta \to -\infty$），函数f_8和f_{10}一定类似于渐近类似于$|\zeta|$增大，f_9一定渐近以$|\zeta|^{-1}$减小（故而斜度因子f_8/f_5^3和f_9/f_6^3一定趋向于常量），而$f_{11}(\zeta)$以$|\zeta|^{-1/3}$ 减小。随着稳定性增长（当$\zeta \to \infty$），所有函数$f_8, ..., f_{11}$以及比例f_8/f_5^3和f_9/f_6^3都趋向于常量。

固定点(x, y, z, t)处速度和温度导数的统计特征量一般来说现在也依赖于分子黏滞和热扩散系数ν和χ（回想一下，在相似性假设的公式中，要求差$|t_i - t_j|$和不同点(x_i, y_i, z_i)和(x_j, y_j, z_j)之间的距离不太小）。所以应用量纲分析到这些特征量得出更复杂的公式，它们含有多个变量的普适函数。然而，这个规律有两个重要的例外，与物理量

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\nu \sum_{i,j} \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)^2} \tag{7.91}$$

和

$$\overline{N} = \chi\overline{(\nabla T')^2} = \chi \sum_i \overline{\left(\frac{\partial T'}{\partial x_i}\right)^2} \tag{7.92}$$

有关。实际上，这些量出现在湍流能量平衡方程（6.43）中，那里$\overline{\varepsilon}$记作符号$\overline{\varepsilon}_t$，出现在相关的温度涨落强度平衡的方程（6.55）中，借助这些方程这些量可以用速度和温度涨落的普通一点矩量表示。所以$\overline{\varepsilon}$和$\overline{N}$应该不明显依赖于分子常数ν和χ。这不是偶然的。如我们在本书第2卷第8章中展示的，$\overline{\varepsilon}$和$\overline{N}$在相对大尺度的运动规律中起了重要作用，可以从速度和温度涨落在相距足够远的两点的概率分布确定。所以，为了描述$\overline{\varepsilon}$和$\overline{N}$对高度z的依赖，我们可以使用普通的相似性公式（7.13），它不含有ν和χ。也就是说，我们可以写出

$$\overline{\varepsilon} = \frac{u_*^3}{\kappa z}\varphi_\varepsilon(\zeta), \quad \overline{N} = \frac{\kappa u_* T_*^2}{z}\varphi_N(\zeta), \tag{7.93}$$

其中φ_ε和φ_N是新的普适函数。当$|\zeta| \to 0$，φ_ε和φ_N都趋向于有限极限$\varphi_\epsilon(0) = 1$（因为这里$\overline{\varepsilon} = u_*^2 \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}$，见上面6.5节）和$\varphi_N(0) = 常量 = 1/\alpha_0$。此外当$\zeta \to -\infty$，$\varphi_\varepsilon(\zeta) \sim |\zeta|$，$\varphi_N(\zeta) \sim |\zeta|^{-1/3}$。几个点上涨落运动的公式要复杂得多。这些公式在所有情形都含有几个变量的普适函数。所以，例如，在点(x_1, y_1, z_1)和(x_2, y_2, z_2)同时的湍流涨落两点矩量一般来说会依赖于四

个变量$\frac{z_1}{L}$、$\frac{z_2}{L}$、$\frac{x_2-x_1}{L}$和$\frac{y_2-y_1}{L}$。实际上，目前没有希望通过实验确定四个变量的函数。所以，可以减少两点矩量中变量个数的条件是非常有趣的。特别地，一个这种条件是$-\zeta > \zeta_1$，其中ζ_1是一个正数，定义了湍流状态为自由对流状态的$|\zeta|$值的下限（我们将在下面一节讨论ζ_1的量级）。在这个条件下，我们可以取$u_* = 0$，故而从这个问题的参数写不出有限的长度标度。此外，在此情形Oxy平面内没有优势方向，所以所有标量（即不依赖于坐标轴的方向）两点矩量只能依赖于$r_0 = [(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2]^{1/2}$，而不单独依赖于$x_2 - x_1$和$y_2 - y_1$。由$z_1$、$z_2$和$r_0$可以写出两个无量纲组合，例如$z_2/z_1$和$r_0/\sqrt{z_1 z_2}$（或$z_2/z_1$和$r/\sqrt{z_1 z_2}$，其中$r = [r_0^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}$）。所以在自由对流条件下，所有标量两点矩量都等于参数g/T_0、$q/c_p\rho_0$和$z = \sqrt{z_1 z_2}$的某种组合乘以一个z_2/z_1和r/z（或z_2/z_1和r/z的）普适函数。特别地，

$$
\begin{aligned}
\overline{w'(x_1,y_1,z_1,t)w'(x_2,y_2,z_2,t)} &= \left(\frac{q}{c_p\rho_0}\right)^{2/3}\left(\frac{g}{T_0}\right)^{2/3}(z_1z_2)^{1/3}R_1\left(\frac{z_2}{z_1},\frac{r}{\sqrt{z_1z_2}}\right),\\
\overline{u'(x_1,y_1,z_1,t)u'(x_2,y_2,z_2,t)} &= \overline{v'(x_1,y_1,z_1,t)v'(x_2,y_2,z_2,t)} = \left(\frac{q}{c_p\rho_0}\right)^{2/3}\left(\frac{g}{T_0}\right)^{2/3}(z_1z_2)^{1/3}R_2\left(\frac{z_2}{z_1},\ldots\right.\\
\overline{T'(x_1,y_1,z_1,t)T'(x_2,y_2,z_2,t)} &= \left(\frac{q}{c_p\rho_0}\right)^{2/3}\left(\frac{g}{T_0}\right)^{2/3}(z_1z_2)^{1/3}R_3\left(\frac{z_2}{z_1},\frac{r}{\sqrt{z_1z_2}}\right),
\end{aligned}
\tag{7.94}
$$

其中R_1、R_2和R_3是两变量的普适函数[这些公式是Obukhov (1960)给出的]。

实验确定两变量函数也非常复杂，但不是没有希望。然而，值得注意的是，在某些情形，对一个变量的依赖形式已经在理论上成功地进行了预测，而对于一些统计特征，一般来说可以将理论公式中存在的所有不确定性简化为数值系数选择中的不确定性。为此，只需使用一些额外的相似性考虑。这些考虑与一类完全不同的湍流有关，其中包括大气湍流作为一个特例。第2卷第8章将主要讨论这种相似性。因此，我们将推迟对方程（7.94）类型公式的进一步分析到本书第2卷。

和f, f_1, f_2的情形一样，可以使用湍流半经验理论的不同变体得到关于函数$f_3, ..., f_{10}, \varphi_\varepsilon$和$\varphi_N$的很多其他不严格的结果。所以，例如，Kazanskiy, Monin (1957)[也参见Monin (1959a)]基于简化的能量平衡方程（6.46）辅以其他进一步半经验假设，得到了$f_5(\zeta)$的一个这种形式的近似方程：

$$
f_5(\zeta) = A_5\left[1 - \frac{1}{f'(\zeta)}\right]^{1/4}, \tag{7.95}
$$

其中$A_5 = f_5(0)$是一个经验常数。同样的考虑应用到（6.46’）形式的平衡方程得出关系式

$$f_5(\zeta) = A_5 \left[1 - \frac{\sigma}{f'(\zeta)}\right]^{1/4}, \qquad (7.95')$$

含有另一个经验常数σ。后来Panofsky, McCormick (1960)提出了一个假设，使他们得出结论

$$f_5(\zeta) = A_5[\zeta f'(\zeta) - B\zeta]^{1/3}, \tag{7.96}$$

其中B是一个新的经验常数，而Businger (1959)和Munn (1961)使用两个不同的分层介质中混合长的假设分别得到了公式

$$f_5(\zeta) = \left\{\frac{\sigma + [\sigma^2 + 4(f'(\zeta) - \sigma)^2]^{1/2}}{2f'(\zeta)}\right\}^{1/2} \tag{7.97}$$

[其中σ和方程（7.74）中的相同]和

$$f_5(\zeta) = -A_5 \frac{f''(\zeta)}{[f'(\zeta)]^2}. \tag{7.98}$$

Yokoyama (1962a)也使用了$A_5 = 1$（和数据矛盾）的方程（7.98）。对于$f_6(\zeta)$，Priestley (1960b)和Panofsky (1961b)使用了半经验关系

$$f_6(\zeta) = A_6 \alpha_0 \zeta f_1'(\zeta), A_6 = f_6(0). \tag{7.99}$$

Monin (1965)考虑了速度和温度涨落的一点两阶矩的完整动力学方程系统，忽略了这个系统中描述这些量垂向输运的项（即，特别是所有含有三阶矩的项），而他借助（6.12）类型的半经验假设消去了压强涨落。所以他得到了近似关系式

$$[f_3^2(\zeta) - f_4^2(\zeta)] f_5^2(\zeta) \approx 2, \tag{7.100}$$

联系了函数f_3、f_4和f_5（对于$\zeta = 0$，它得到了5.3节中给出的数据的支持）。此外，使用某些额外的半经验假设，Monin能够把各向异性系数$f_3(\zeta)/f_4(\zeta)$和$f_5(\zeta)/f_4(\zeta)$用$\varphi(\zeta) = \zeta f'(\zeta)$和常数$A_3 = f_3(0)$、$A_4 = f_4(0)$和$A_5 = f_5(0)$表示出来，这些常数从实验得到（有证据表明在这些假设下，不等式$C_2 = 1/R \geq 5.5$ 一定成立）。Pandolfo (1936)提出了另一个半经验关系，将函数$\varphi(\zeta)$、$f(\zeta)$和$f_5(\zeta)$联系起来。使用非常粗糙的假设，Panchev (1961)得到了下面方程（7.36）和（7.87’）中的系数C_1、C_5'和C_6'的关系式：

$$C_6' = \frac{1}{C_5'} = \left(\frac{C_1}{6}\right)^{1/4} \tag{7.101}$$

（由此，特别地，在自由对流中，$r_{wT} = 1$，这似乎是非常可疑的）。

普适函数$\varphi_\varepsilon(\zeta)$、$f(\zeta)$和$f_{10}(\zeta)$之间的关系可疑从能量平衡方程（6.43）得到。根据这个方程，似乎有可能

$$\varphi_\varepsilon(\zeta) = \zeta f'(\zeta) - \zeta - \frac{\kappa}{2} f_{10}'(\zeta) \tag{7.102}$$

[见Monin (1958)]。方程（7.102）精确到允许忽略压强涨落和黏滞摩擦导致的垂向湍流能量输运（如果我们在函数f_{10}的地定义中包含$2\overline{p'w'}/\rho_0 u_*^3$，那么它就变得非常精确）。如果我们完全忽略垂向能量扩散[即我们采用方程（6.46）]，那么我们得到

$$\varphi_\epsilon(\zeta) = \zeta f'(\zeta) - \zeta, \tag{7.103}$$

而如果我们认为这种扩散正比于$\frac{g}{T_0}\frac{q}{c_p}\rho$（即如果我们采用方程（6.46’）），那么

$$\varphi_\varepsilon(\zeta)=\zeta f'(\zeta)-\sigma\zeta. \quad (7.103')$$

当然，方程（7.103）和（7.103’）一般来说没方程（7.102）那么精确[但在中性分层的极限情形等价于方程（7.102），方程（7.103’）在自由对流情形等价于方程（7.102）和（6.43），因为$f_{10}(\zeta)\sim\zeta$]。记住函数$f(\zeta)$的渐近公式（7.33）和（7.39’）并将例如方程（7.103’）作为起点，我们发现

$$\varphi_\varepsilon(\zeta)=\begin{cases}-\sigma\zeta=\frac{\sigma z}{|L|} & \text{对于}\zeta\to-\infty,\\ 1+(\beta-\sigma)\zeta & \text{对于}|\zeta|\ll 1.\end{cases} \quad (7.104)$$

所以，根据方程（7.103’），在接近中性分层时，$\overline{\varepsilon}\approx\frac{u_*^3}{\kappa z}$，而在强不稳定情形，$\overline{\varepsilon}\approx\sigma\frac{g}{T_0}\left|\frac{q}{c_p\rho_0}\right|$，即它不再依赖于高度（只用量纲分析得到了同样的结果，但含有未定的数值系数）。

如果我们把温度涨落强度的平衡方程（6.55）作为起点，也可以推导出$\varphi_N(\zeta)$的类似关系式。使用这个方程我们容易得到这个关系式：

$$\varphi_N(\zeta)=\zeta f_1'(\zeta)-\frac{1}{2\kappa\zeta f_{11}'(\zeta)}. \quad (7.105)$$

此外，如果我们也忽略温度涨落强度的垂向扩散[方程（6.55）右边第一项]，那么我们得到

$$\varphi_N(\zeta)=\zeta f_1'(\zeta). \quad (7.106)$$

函数（7.106）具有这种性质

$$\varphi_N(\zeta)=\begin{cases}\frac{\kappa^{4/3}}{3}C_1|\zeta|^{-\frac{1}{3}} & \text{当}\zeta\to-\infty,\\ \frac{(1+\beta\zeta)}{\alpha_0} & \text{当}|\zeta|\ll 1.\end{cases} \quad (7.107)$$

于是，在这种近中性分层近似下，$\overline{N}\approx\frac{\kappa u_* T_*^2}{\alpha_0 z}$，而对于强不稳定性，$\overline{N}$根据这个规律随高度减小：

$$\overline{N}\approx\frac{C_1}{3}\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\right)^{\frac{5}{3}}\left(\frac{g}{T_0}\right)^{-\frac{1}{3}}z^{-\frac{4}{3}}. \quad (7.108)$$

近中性分层的结果不依赖于忽略扩散项，而扩散效应可能导致方程（7.108）数值系数的变化。不知道函数$\alpha(\zeta)=f'(\zeta)/f_1(\zeta)$在大的正$\zeta$时的行为没法谈论$\varphi_N(\zeta)$ 在$\zeta\to+\infty$时的行为。

当然，对于公式（7.95）-（7.101）、（7.103）、（7.103’）和（7.108），我们可以重复之前类似的联系f、f_1和f_2的半经验公式的讨论。它们都只是近似的，精确度和适用区间都必须通过和高质量实验结果比较而得到。目前，关于涨落的数据仍然非常不完整。然而，半经验公式仍然可以有很大的价值，因为在很多情形它们可以帮助我们以相当高的精度估计相应统计特征量的数量级，作为总结已有（相对粗略）观测结果的一般指南。

8. 理论推论和数据的比较

8.1 大气表面层中的风速分布

这里我们比较大气表面层中气象测量数据和第7节的理论推论。我们首先采用最简单的不同高度z的平均风速的测量，借助风速计在地球表面不同点重复很多次[很多这种测量在例如Middleton, Spilhaus (1953)、Kedrolivanskiy, Stemzat (1953)和Lettau, Davidson (1957)的书中有描述]。在5.4节中已经注意到，当下垫面相对平坦并且温度分层接近中性，低层大气中的风速分布可以相当好地用对数公式（5.13）描述。然而，在绝热情形（即具有相当大的温度梯度），风速$\overline{u}(z)$对$\ln z$的依赖[这种数据可以在例如Thomthwaite, Kaser (1943)、Shcherbakova (1949)、Deacon (1949)、Pasquill (1949)、Monin (1953)和很多最近的工作中找到]展现出与简单线性关系的规则的偏离。对于不稳定分层，$\overline{u}(z)$随$\ln z$增长的增长总是慢于线性，而对于稳定分层，它快于线性。作为一个典型的例子，图52[取自Monin (1953)]，给出了1951年得到的平均风速分布，来自哈萨克斯坦草原在高度$0.5, 1, 2, 4, 8$和15 m的气象测量。图52中的六条曲线是对分成六组的61条风速分布平均得到的，每一条曲线由近似常数值的稳定性参数表征：

$$B_1 = \frac{g}{T_0}\frac{\overline{T}(2) - \overline{T}(0.5)}{[\overline{u}(1)]^2} \tag{8.109}$$

其中T_0是标准温度，括号中的数表示观测点的高度（以米为单位）。

图52中用数$+2, +1, ..., -3$标记的六个稳定性组对应于从适度稳定（+2组）到略微稳定（+1）、近中性分层（0）、略微不稳定（−1）和适度不稳定（−2）到强不稳定（−3）。

我们看到只有在中性分层，对数公式很好地代表了整个风速分布（即由图52中的直线代表）。在所有其他情形，在足够高的高度观测到了和对数规律的偏离，定性上和前一节的理论预测相符。然而，同时，在较低的高度，所有组的风速分布都近似由具有同样“粗糙高度”z_0（当然这可以用近中性分层的分布最可靠地确定）的$\overline{u}(z) = A\ln\frac{z}{z_0}$类型的公式给出。在图52的条件中，这个高度接近于1 cm。

根据第7节的相似性理论，在所有情形风速的高度变化都一定由无量纲高度$\zeta = \frac{z}{L}$的普适函数$f(\zeta)$确定，其中$L = -c_p\rho_0 T_0 u_*^3/\kappa g q$。为了验证这个结果并确定函数$f(\zeta)$的精确形式，除了$\overline{u}(z)$，我们还需要$u_* = \left(\frac{\tau}{\rho_0}\right)^{1/2}$和$q$值，这使得我们可以估计长度标度$L$。然而，大气表面层中湍流动量和热流$\tau$ 和q的直接测量（这是8.3节中特定讨论的主题）仅在相对近期才开始，并且目前还是相当不频繁而且不精确的。所以含有函

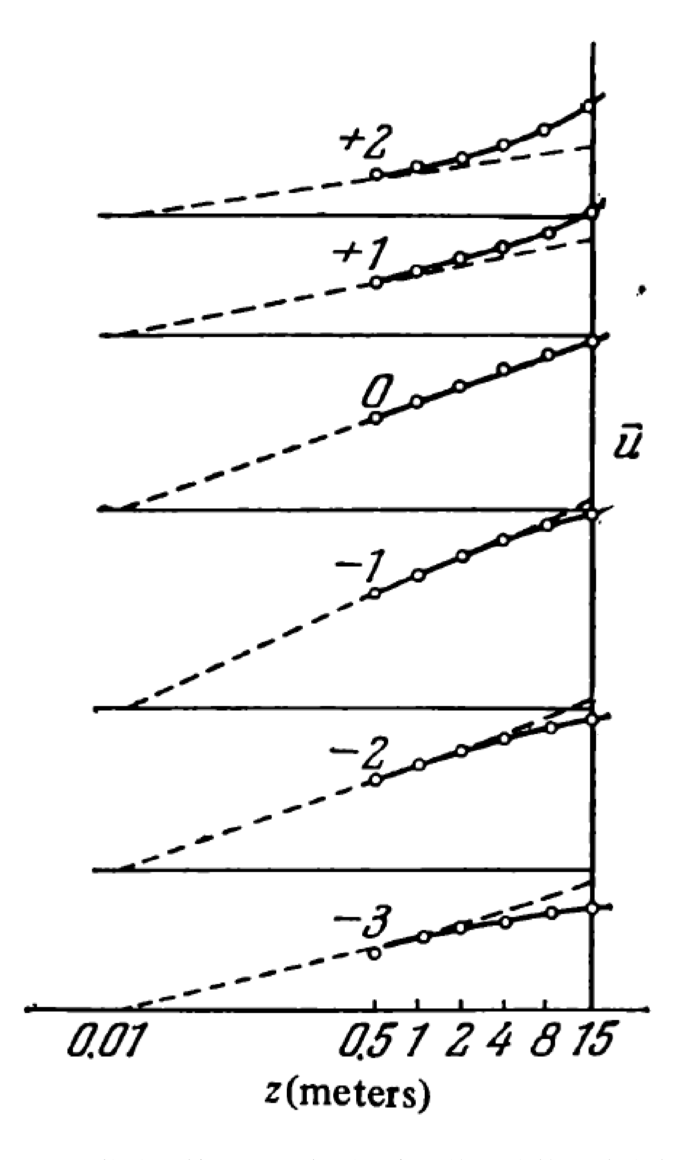


图 52 不同热分层情况下，表面层中平均风速的经验分布。

数$f(\zeta)$的方程（7.24）的第一个经验验证（这使得第一次可以画出这个函数的典型图像）是Monin, Obukhov (1953, 1954) 用一种非常不同的方法进行的。作为这个验证的基础，他们适用了与不同气象条件下风和温度分布有关的广泛数据（在1945、1947、1950和1951在苏联不同区域的四次远征期间收集）。此外，假设公式（7.24）成立，并且采用了额外一些对函数$f(\zeta)$和$f_1(\zeta)$形式的假设。基于这些假设的数据处理结果之间令人满意的一致性，证实了它们可以作为合理的一阶近似，并且表明函数$f(\zeta)$的一般

形式必须和以这种方式得到的经验值一致。

Monin和Obukhov对风和温度分布的假设包括假设$f(\zeta)$的“对数+线性”近似（7.33）（描述最低四米的风分布）适用，以及假设这一层中风和温度分布的相似性。基于此，所有这些最低四米的风分布都近似为一个这种形式的公式

$$u_i(z) = A_i(\log z + D) + C_i z, \tag{8.110}$$

其中i是分布的标号，A_i、C_i和D是经验系数（用最小二乘法确定）。因为所有测量都是对高度$z \gg z_0$，假设系数D 对于同一个观测点的所有分布都相同，等于$-\log z_0$，其中z_0是粗糙度参数。系数A_i和C_i的值使得我们可以根据

$$\frac{u_*}{\kappa} = \frac{A}{\ln 10}, \quad \frac{\beta}{L} = \frac{C_i \ln 10}{A_i} \tag{8.111}$$

得到$\frac{u_*}{\kappa}$和$\frac{\beta}{L}$值的每个分布。此外，对于每个分布，稳定性参数$B_1 = \frac{g}{T_0}\frac{\overline{T}(2)-\overline{T}(0.5)}{[\overline{u}(1)]^2}$的计算使用了方程（7.33）和$\overline{u}(z)$和$\overline{T}(z)$分布相似性的假设，取为等于

$$B_1 = \frac{g}{T_0}\frac{\kappa^2 T_*}{u_*^2}\frac{\ln 4 + \frac{3}{2}\frac{\beta}{L}}{\left(\ln\frac{1}{z_0} + \frac{\beta}{L}\right)^2} = \frac{1}{\beta}\Phi\left(\frac{\beta}{L}\right), \Phi(t) = \frac{t\left(\ln 4 + \frac{3}{2}t\right)}{\left(\ln\frac{1}{z_0} + t\right)^2}.$$

知道了$z_0 = 10^{-D}$，我们可以把β定义为$\Phi\left(\frac{\beta}{L}\right)$值[其中$\frac{\beta}{L}$取自方程（8.3）]对$B_1$经验值的回归系数。然后可以发现$\beta \approx 0.6$，而$\Phi\left(\frac{\beta}{L}\right)$和$B_1$之间的相关性非常高。$\frac{u_*}{\kappa}$和$L = \frac{0.6}{\beta/L}$的值加上所有$\overline{u}(z)$的数据被用于写出经验函数

$$f(\zeta) - f\left(\pm\frac{1}{2}\right) = \frac{\kappa}{u_*}\left[\overline{u}(z) - \overline{u}\left(\frac{|L|}{2}\right)\right], \tag{8.112}$$

其中加号表示稳定分层，负号表示不稳定分层[$\overline{u}\left(\frac{|L|}{2}\right)$的值从测量的$\overline{u}(z)$插值得到]。图53所示的这样得到的结果使得我们可以写出$-3 < \zeta < 6$范围的经验函数$f(\zeta)$。尽管风速测量精度不够并且用来确定$\frac{u_*}{\kappa}$和L值的近似方法相对粗糙，但经验点位于（两个分支组成的）光滑曲线上，弥散很小（除了对于足够大的整ζ，那时弥散变得相对大）。这样得到的图证实了存在决定风速对高度的依赖关系的普适函数$f(\zeta)$。另外，经验函数$f(\zeta)$在整体上和图48中的示意图一致，即可以发现它有很多前一节预测的渐近性质：在近中性分层（小$|\zeta|$）它接近于$\ln|\zeta| +$ 常数，对于强不稳定性（$\zeta \ll -1$），它渐近趋向于常数，而对于强稳定性（$\zeta \gg 1$），它近似于一个线性函数（在图53中，这些渐近曲线用点线表示）。如后来的研究所示，Monin和Obukhov在1953-1954年发现的函数$f(\zeta)$值被证明对$\zeta \leq 0$相当

准确，但对于$\zeta > 0$它们太小了（实际上，$f(\zeta)$对于ζ增大的图明显上升得比图53所示的要陡）。

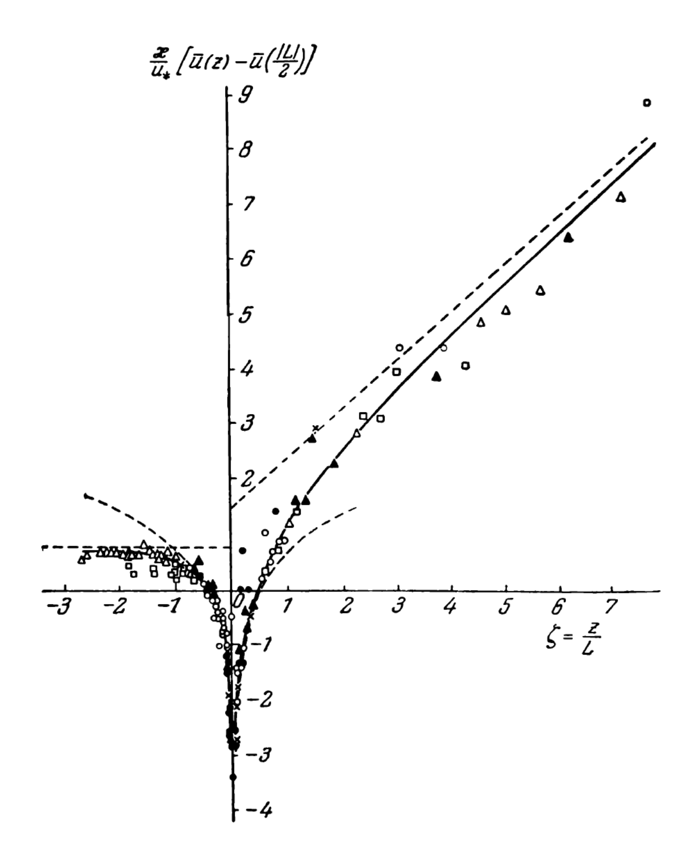


图 53 根据Monin, Obukhov (1953, 1954)，函数$f(\zeta) - f\left(\pm\frac{1}{2}\right)$的经验图。图上各种符号表示不同实验中得到的数据。

不同研究者经常基于其他实验证据画类似图53的图。所以，Perepelkina (1959b)使用了Pasquill (1949)和Rider (1954)的$z \le 2$ m的风和温度分布数据，用于经验地确定$|\zeta| < \frac{1}{2}$的$f(\zeta) - f\left(\pm\frac{1}{2}\right)$ 值。后来，她还得出了达到70 m高度的风和温度分布的数据，这是在1960-1961的夏天和秋天，从南俄草原靠近齐姆良斯克镇的气象桅杆得到的。再后来，Shiotani (1962)发表了函数$f(\zeta) - f\left(\pm\frac{1}{2}\right)$在$\frac{1}{4} < |\zeta| < \frac{3}{2}$类似于图53的图，以及$f(\zeta) - f\left(\pm\frac{1}{10}\right)$在$|\zeta| < 0.3$的详图，这是使用类似上面描述的方法从1960-1962在东京附近的45米高的电视塔观测的风和温度分布数据得到的。u_*和q的直接测量数据一出现，人们就尝试画类似图53的图，其中L的值根据这些（和分布测量同时进行的）测量的结果确定，无需任何特殊假设。例如，Gurvich (1965)和Zilitinkevich, Chalikov (1968a)参考1962年到1965年在齐姆良斯克区域得到的数据画了这种图（见下面的图54和图55）。

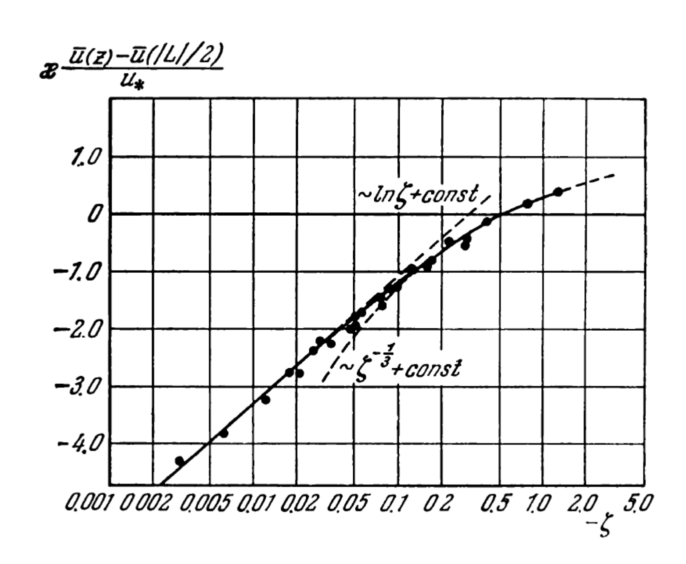


图 54 根据Gurvich (1965)的数据，函数$f(\zeta)-f\left(-\frac{1}{2}\right)$在$\zeta<0$的经验图。

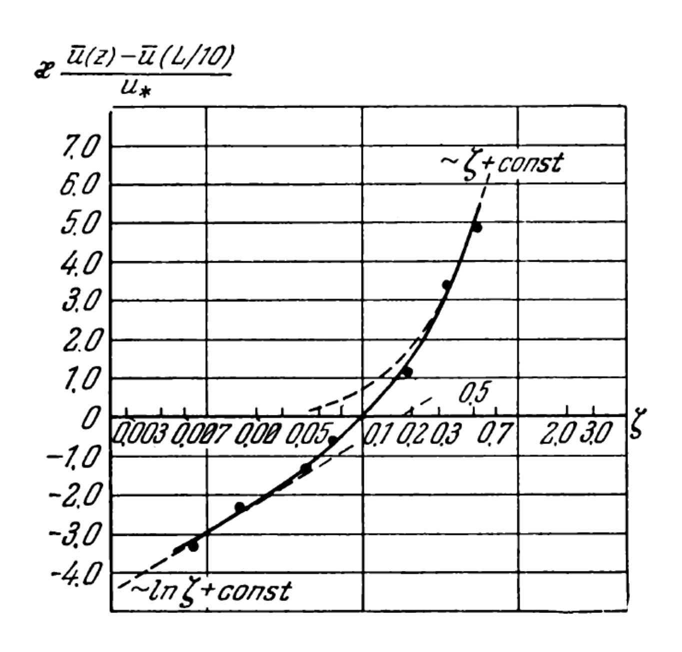


图 55 根据Gurvich (1965)的数据，函数$f(\zeta)-f\left(\frac{1}{10}\right)$在$\zeta>0$的经验图。

图53给出的函数$f(\zeta)-f\left(\pm\frac{1}{2}\right)$图直观清晰地描述了不稳定分层和稳定分层情况风速对高度的依赖的一般形式。然而，对于函数$f(\zeta)$在小$|\zeta|$对于对数方程偏离的定量估计，以及它在大的负ζ值对常量的偏离，这些图不是非常适合，因为这些图上经验曲线相应的部分被大大压缩了。于是，一些研究者要么修改图53，要么修改经验函数$f(\zeta)$本身，这

在某些方面更方便。于是，例如，Priestley (1959a)修改了图53对应于负ζ（不稳定分层）的部分，把无量纲高度$\zeta = \frac{z}{L}$的线性标度替换为对数标度。$f(\zeta)$对于对数函数的偏离对小的$|\zeta|$变得更加明显，特别地，很明显即使对于$\zeta \approx -0.05$，这些偏差也相当客观（尽管在图53中似乎实线和虚线对于$|\zeta| < 0.5$没什么差别）。后来R. J. Taylor (1960a)（使用了Rider (1954)和Swinbank (1955)的测量）和Takeuchi (1961)（由1953年和1956年在美国内布拉斯加奥尼尔附近的大草原进行的观测得到了大量数据，也从Lettau, Davidson (1957)和Barad (1958)收集了大量数据）给出了类似的图[但是$\overline{u}\left(\frac{|L|}{10}\right)$ 替换了$\overline{u}\left(\frac{|L|}{2}\right)$，在很多情形更容易从$\overline{u}(z)$的测量值确定]。R. J. Taylor根据Rider和Swinbank对$\tau = \rho_0 u_*^2$和q的直接测量确定了$\frac{u_*}{\kappa}$和L的值，而Takeuchi使用了（8.2）形式的风和温度分布的近似和公式（7.33）和（7.47）[$\alpha_0 = 1, \beta_1 = \beta$]。同时，Takeuchi比较了用这种方法得到的$L$ 的经验值和用Monin, Obukhov (1954)方法得到的值（原理类似，但某些细节不同，并且使用了u_*和q的测量值）。根据他的结果，所有三种确定L的方法互相符合得令人满意。后来，Gurvich (1965)用1962年和1963年夏天在齐姆良斯克镇附近的草原同时测量的风、湍动热流和剪切应力分布数据画了同样的图（见图54和55，对应于一系列测量平均数据的点）。基于与第7节类似的理论的风分布数据处理的其他结果可以在很多工作中找到，包括Panofsky, Blackadar, McVehil (1960)、Panofsky (1963, 1965)、Lumley , Panofsky (1964)、Panofsky, Busch, Prasad et al. (1967)、Webb (1960, 1965)、J. J. O'Brien (1965)、Swinbank (1964, 1966, 1968)、Swinbank, Dyer (1968)、Busch (1965)、Busch, Frizzola, Singer (1968)、Bernstein (1966)、Chamock (1967a,b)、Paulson (1967)、Businger, Miyake, Dyer, Bradley (1967)、Zilitinkevich, Chalikov (1968a)、Rijkoort (1968)、Fichtl (1968)等等。一些研究者最近也得到了类似的结果，他们在特殊的风洞中进行了实验测量，风洞的一部分地板可以加热或制冷来产生热分层[参见，例如，Malhotra, Cermak (1963)、Cermak, Sandborn et al. (1966)、Cermak, Chuang (1967) 和Chuang, Cermak (1967)]。尽管实验点的弥散在所有测量中都相当大，不同研究者得到的$f(\zeta)$值总的来说彼此符合得令人满意。（所发现的一些不一致将在随后对这些结果的讨论中指出。）

在一些情形，在得到实验结果时，采用的依据不是风分布$\overline{u}(z)$本身，而是风速梯度$\frac{\partial \overline{u}(z)}{\partial z}$。根据方程（7.15'），为了得到普适关系，我们必须考虑无量纲量

$$\frac{\kappa z}{u_*}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = \varphi\left(\frac{z}{L}\right), \quad \varphi(\zeta) = \zeta f'(\zeta), \tag{8.113}$$

或者同样的，考虑物理量

$$\overset{*}{K} = \frac{K}{u_* z} = \frac{u_*}{z\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}} = \frac{\kappa}{\varphi(\zeta)}. \tag{8.114}$$

然而，因为计算$\frac{z}{L} = \zeta$需要湍动流量$\tau = \rho u_*^2$和q的值（目前后者的数据相对较少），$\overset{*}{K}$ 值通常根据理查德森数

$$\text{Ri} = \frac{g}{T_0}\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} / \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{\alpha(\zeta) f'(\zeta)}$$

确定，这是ζ的一个单值函数。Rider (1954)、Deacon (1955)、Priestley (1959a)、Ellison, Turner (1960)、Gurvich (1962)、Deacon, Webb (1962)和Webb (1965)给出了函数$\overset{*}{K}$ (Ri)的图像。图56展示了Guirvich (1962)在$-0.005 >$ Ri > -4范围的图像，也考虑了Deacon (1955)的数据。图中虚线给出了关系式

$$\overset{*}{K}(\text{Ri}) = a|\text{Ri}|^{\frac{1}{4}}, \quad a = \left(\frac{3}{C_2}\right)^{\frac{3}{4}} \kappa \alpha_{-\infty}^{\frac{1}{4}} = \frac{3^{\frac{3}{4}}}{C_1^{\frac{3}{4}} \alpha^{\frac{1}{2}}{}_{-\infty}}, \tag{8.115}$$

对应于自由对流条件的渐近“1/3次幂律”（7.39），系数$a = 0.97$，是对$R < -0.05$的数据集使用最小二乘法得到的。实线代表函数$\overset{*}{K}$ (Ri)在对数亚层中的渐近值$\overset{*}{K}(0) = \kappa \approx 0.4$，这是非常精确地从Ri线性标度的$\overset{*}{K}$ (Ri)图像中得出的（用完全相同的方法，可以极其可靠地证明在大气中也有$\kappa \approx 0.4$）。图56中没有Ri > 0（稳定分层）的数据，但一般来说，大的正Ri的观测在气象学中非常少见。所以，关于Ri > 0的$\overset{*}{K}$ (Ri)值最广泛的数据是Ellison, Turner (1960)在实验室实验中得到的，其中水的盐度梯度产生的密度梯度起到了温度梯度的作用（见下面8.2节）。Ellison和Turner的数据非常弥散，但总体上他们令人信服地证明了在正半轴$\overset{*}{K}$ (Ri)随Ri的增大而减小，如预期的那样。

现在让我们更仔细地考虑不稳定分层的结果。Panofsky, Blackadar, McVehil (1960)和其他人经验地研究了$\varphi = \frac{\kappa z}{u_*}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}$对参数$\zeta' = \frac{z}{L'}$的依赖[其中$L' = u_* \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} / \kappa \frac{g}{T_0}\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} = \alpha(\zeta) L$，故而$\zeta' = \text{Ri}\varphi(\zeta')$]，它也单值地和$\zeta$相联系。根据他们的结果，对于所有负的$\zeta'$，系数$\sigma' = \sigma\alpha_{-\infty} = 18$的（7.61）形式的方程的解[即$\sigma' = 18$的关系式$\varphi(\zeta) = (1 - \sigma'\text{Ri})^{-1/4}$，参见7.4节方程（7.59'）] 给出了$\varphi(\zeta')$ 的一个好的近似。后来，同样的方程在其他一些工作中由非常不同地点的广泛数据进行了检验，包括Kondo (1962)、Lumley, Panofsky (1964)、Panofsky (1965)、Swinbank (1966)、Panofsky, Busch et

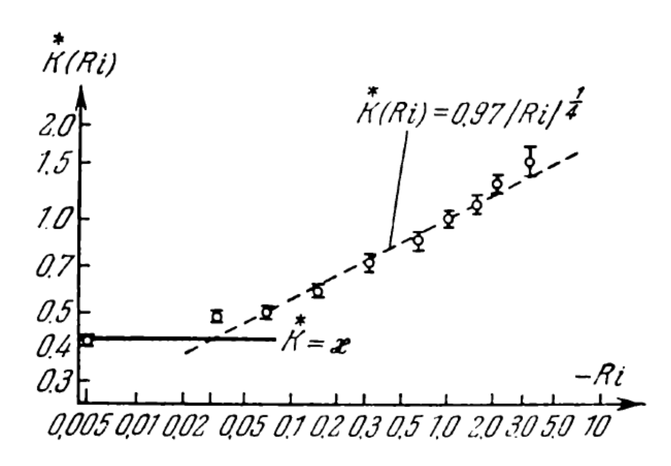


图 56 函数$\overset{*}{K}$ (Ri)的经验图像，根据Gurvich (1962)。

al. (1967)、Bernstein (1966)、Chamock (1967a)、Paulson (1967)、Fichtl (1968)和Rijkoort (1968)的工作。这些结果之间有小的差异，但一般得出结论，$\varphi(\zeta) = (1 - \sigma'\mathrm{Ri})^{-1/4}$形式的方程以足够的精度对所有负Ri值描述了已有数据，如果σ'选在10到20之间（例如，Paulson认为$\sigma' = 11$式最佳猜测，而Kondo建议$\sigma' = 13$，根据Panofsky及其研究组的工作，对于所有地理位置$\sigma' \approx 18$）。然而，一些研究者更喜欢原始的Ellison方程（7.59）[或者同样地，方程（7.61）]，者等价于方程（7.59’），只要$\alpha(\zeta)$可以认为恒定。然而，在这样的$\varphi(\zeta)$的近似中，通常发现系数σ比σ'小得多（例外式Panofsky et al. (1960)和Bernstein (1966)，那里$\sigma = 14$，根据Zilitinkevich, Chalikov (1968a)，在有限的Ri范围，$\sigma = 12$）。所以Panofsky (1965)和Klug (1967)建议$\sigma = 7$，Pasquill [见Swinbank (1966)]发现4到6范围内的值是合适的，而Charnock (1967a)在重新检查Bernstein的结果时使用了$\sigma = 4$（在所有这些工作中，都使用了Swinbank在澳大利亚的观测数据）。σ相对较小和$\alpha_{-\infty}$比1大很多的发现符合得很好（见下面8.2节）。让我们也注意到，方程（7.59）和（7.59’）都符合“1/3幂律”（7.39），$\sigma = (3/C_2)^3$，$\sigma' = \sigma\alpha_{-\infty} = (a/\kappa)^4$其中$\sigma'$时方程（8.7）的Gurvich常数。所以，图56的数据对应于量级为30的σ（而$\sigma' = 18$对应于$a \approx 0.82$）。

Webb (1960)把$\varphi(\zeta')$在$\zeta' \leq 0$半轴的经验值近似为一个（7.57）形式的方程，这样得到的$\varphi(\zeta')$接近从方程$\varphi(\mathrm{Ri}) = (1 - 18\mathrm{Ri})^{-1/4}$对所有不太大的$-\zeta'$得到的接近[见Panofsky (1963)或Lumley, Panofsky (1964)]，但在$\zeta' \to -\infty$极限对应于$\varphi(\zeta') \approx -30(30\zeta')^{-1/3}$（即对应于方程$\varphi \approx (-30\mathrm{Ri})^{-1/4}$）的“1/3 幂律”。后来，Webb (1965)提出了另一种形式的普适风分布方程，和自由对流极限的“1/3幂律”不符。使用最广泛的方程$\varphi(\mathrm{Ri}) = (1 -$

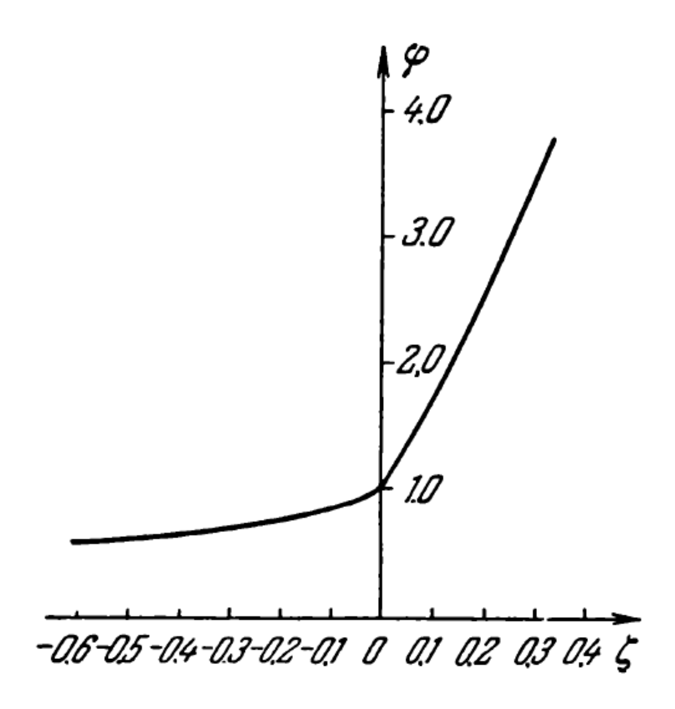


图 57 函数$\varphi(\zeta)$的经验图像，根据Gurvich的数据。

$\sigma'\mathrm{Ri})^{-1/4}$的一些变换和近似可以在Fichtl (1968)中找到。在Zilitinkevich, Laykhtman (1965)中，他们$\varphi(\zeta)$的半经验方程对数据的描述令人满意（然而，这个工作中使用的数据时非常早期的）。Swinbank (1964, 1966)发现，他的指数方程（7.72）[和“1/3幂律”矛盾]描述已有数据非常好，但其他一些作者不同意这个观点[见，例如Barad (1963)、Panofsky (1965)、Swinbank (1966)，也参见Bernstein (1966)和Charnock (1967a)]。和理论上非常吸引人的速度分布的“1/3幂律”的差异使得Businger (1966)提出[Dyer也独立提出]的$\varphi(\zeta)$ 和$\varphi(\zeta')$的经验方程以及Pandolfo (1966)的方程变得可疑[见7.4节，让我们回想一些这两组方程都事先假设了$\zeta = \mathrm{Ri}$]。然而，两组方程都得到了一些令人满意的经验验证，有某些应用[见，例如，Paulson (1967)、Businger, Miyake, Dyer, Bradley (1967)、Deardorff (1968)、Krishna (1968)、Yoshihara (1968)，也参见Kapoor, Sundararajan (1968)中的讨论]。Gurvich (1962, 1965)画出了函数$\varphi(\zeta)$或$\varphi(\zeta')$的纯经验图像[也参见图57，取自这些工作：Busch (1965)、Swinbank (1968)]，在这个工作中，给出了$\zeta^{-1/3}\varphi(\zeta)$对Ri的依赖。所有这些图都和普适依赖的假设一致，但互相之间有小的偏差。知道了函数$\varphi(\zeta)[f(\zeta)]$，也容易得到流量理查德森数$\mathrm{Rf} = \zeta/\varphi(\zeta)$对$\zeta$的依赖。以完全相同的方式，如果我们知道$\varphi(\zeta')$，其中$\zeta' = z/L' = \zeta/\alpha(\zeta)$，容易得到普通理查德森数$\mathrm{Ri} = \mathrm{Rf}/\alpha = \zeta'/\varphi(\zeta')$对$\zeta'$ 的依赖。最后，如果我们知

道函数$\alpha(\zeta)$[其确定稍后讨论]和$\varphi(\zeta)$[或$\varphi(\zeta')$]，那么我们可疑得到两个理查德森数Rf和Ri对任意变量ζ和ζ'的依赖。作为一个例子，图58展示了ζ对Ri的依赖，从Mordukhovich, Tsvang (1966)的数据得到。Panofsky (1963)也画了Ri对ζ（或ζ'）的经验依赖图[参见Lumley, Panofsky (1964)、Gurvich (1962)、Webb (1965)、Pandolfo (1966)（用人工的方法展示了$\mathrm{Ri}=\zeta$）、Swinbank(1968)和其他一些工作]。Cramer (1967)也画了Rf对ζ依赖的经验图。当然，当$\zeta\to 0$和$\mathrm{Ri}\to 0$，$\mathrm{Rf}\approx\zeta$，$\mathrm{Ri}\approx\zeta'\approx\zeta/\alpha_0$[见方程（7.28）]。所以从图58的数据（以及从所有Ri对ζ依赖的数据）得出α_0接近于1。

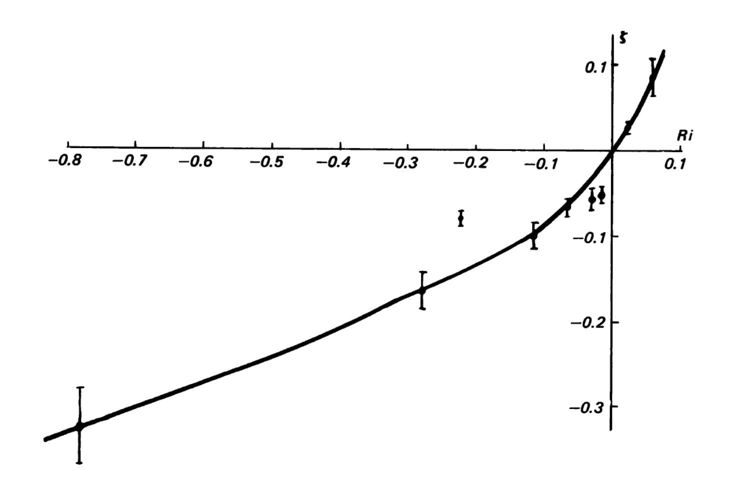


图 58 ζ对Ri的经验依赖关系，根据Gurvich的数据。

我们看到，目前已有的分布和湍动流量数据的精度不足以可靠地区分普适风分布函数的各种表达式。所以，似乎不值得详细讨论各种公式的优缺点。目前，唯一合理的时使用物理上证明了描述普适函数渐近行为的定量，验证它们与实验结果相符。如果有可能，还希望获得这些定律中数值系数的估计值。Zilitinkevich, Chalikov (1968a)[也参见Zilitinkevich (1970)]使用莫斯科大气物理研究所研究人员在1963年到1965年间在齐姆扬斯克附近草原得到的广泛的数据完成了这个项目。对于不稳定条件（稳定条件随后考虑），假设简单的插值公式（7.53）成立，即

$$f(\zeta)=\begin{cases}\ln|\zeta|+\beta\zeta, & \text{当}\zeta_1\le\zeta<0,\\ a_1+C_2\zeta^{-1/3}, & \text{当}\zeta\le\zeta_1.\end{cases}\tag{8.116}$$

其中未知常数a_1和β可以用函数$f(\zeta)$和$\varphi(\zeta)=\zeta f'(\zeta)$在$\zeta=\zeta_1$点的连续性条件消去。所以这个负半轴$\zeta<0$的普适风分布函数中只有两个未定系数$C_2$和$\zeta_1$。此外，这些系数值（和进入普适函数定义的常数$\kappa$）是对同时测

量的风和温度分布以及湍动流量τ和q的所有数据使用最小二乘法确定的。于是得到了下面的最小二乘估计值：$C_2 \approx 1.25$，$\zeta_1 \approx -0.16$，$\kappa \approx 0.43$，这表明$\beta \approx 1.45$和$a_1 \approx 0.24$。所有这些估计的95%置信区间都非常窄，测量点都沿曲线（8.8）集中，弥散相对小。所以方程（8.8）给出的函数$f(\zeta)$和$\varphi(\zeta) = \zeta f'(\zeta)$的渐近行为与Zilitinkevich和Chalikov处理的实验结果（不幸的是仅限于$0 \geq \zeta \geq -1.2$范围）相符。Zilitinkevich和Chalikov也提到，同样的数据可以（弥散不显著增大地）描述为这个（7.49）形式的方程

$$f(\zeta) = \begin{cases} \ln|\zeta|, & \text{当} -0.07 \leq \zeta < 0, \\ 1.2\zeta^{-1/3} + 0.25, & \text{当}\zeta \leq -0.07. \end{cases}$$

或者$\sigma = 12$的方程（7.61），或者和Zilitinkevich, Laykhtman (1965)提出的那个有关的半经验方程。

我们也基于R. J. Taylor (1960a,b)和Gurvich (1962, 1965)[参见图54和56]的各种气象数据给出了风速分布的"1/3幂律"的经验验证。在所有情形，数据都证实了这个规律，但对系数m的估计有一些弥散：R.J. Taylor给出的C_2值从0.9到1.5，而根据图56的数据，$C_2 \approx 0.93\alpha_{-\infty}^{1/3}$，根据图54的数据，$C_2 \approx 1.4$。让我们也回想一些$C_2 = 3/\sigma^{1/3}$，所以$\sigma = 7$[Panofsky (1965)建议]对应于$C_2 \approx 1.55$。

重要的是注意到所有已有数据表明"1/3幂律"（理论上只适用于非常大的负ζ值）在出乎意料小的、量级为−0.1（甚至百分之几）的ζ 值（或ζ'，或Rf，或Ri）就开始成立。因为Rf等于热力学因素和动力学因素导致的湍流能量产生率的比值，这个结果显然表明对流产生垂向湍流混合被风剪切有效得多。于是，*动力学亚层*（其中热力学因素不重要）*的厚度实际上只占*$|L|$*的一小部分*。[8]

特殊气象风洞中产生的热分层流动中风分布和湍动流量的测量目前比野外气象测量还不可靠。然而，Cermak, Sandborn et al. (1966)和Chuang and Cermak (1967)给出的数据和第7节中相似性理论的推论非常一致，表明有人工热分层的风洞中观测到的普适关系和大气表面层中观测到的（在不稳定和稳态条件下）没有显著差异。

现在我们考虑稳定分层的情形。稳定条件的观测比不稳定情形的观测要少得多，并且相应的数据一般来说非常弥散，和仅有一个无量纲高度$\frac{z}{L}$定义的普适相似性假设符合得不是很好。（所以，图55给出的Gurvich的图只能看作尝试性的，没有进一步验证。）有可能正的ζ值的实验点可以由稳定条件中湍流相当强的间歇性（导致时间平均的巨大变化，因此必须极大增

[8]由这个观点，传统地在标度L的表达式（7.12）分母加入冯·卡门常数κ（导致这个标度额外增大2.5倍）是非常不幸的。

长平均周期以得多可靠的结果）部分解释。

这个事实可能也发挥了部分作用：大气表面层中的强逆温一般伴随强辐射冷却，期间气象条件是非常不稳恒的，q随高度剧烈变化。然而，我们可以注意到，甚至在20世纪50年代初，Rider, Robinson (1951)和Halstead (1952)就从观测发现，在非常稳定分层的情形，风分布通常是近似线性的。同样的推论也可以从Liljequist (1957)在南极的观测中得出，那里通常有强的逆温。根据McVehil (1964)和Webb[见Lumley, Panofsky (1964)，第117页]，对于$0 \leq \zeta' \lesssim 0.3$（其中$\zeta' = z/L'$，见下面），公式$\varphi(\zeta') = 1 + \beta_1'\zeta'$很好地代表了$\varphi(\zeta')$，其中根据McVehil（他处理了内布拉斯加，奥尼尔附近以及在南极的“南极点”站的观测结果）的数据，$\beta_1' = 7$，根据Webb的数据，$\beta_1' \approx 4.5$。最后，McVehil (1964)、Webb (1965) [也参见Lumley, Panofsky (1964), 117页]、J. J. O'Brien (1965)、Gurvich (1965)、Busch (1965)、Panofsky, Busch et al. (1967)、Hogstrom (1967b)、Chalikov (1968)、Hoeber (1968)和Zilitinkevich and Chalikov (1968a)对逆温情形的各种气象观测的处理得到非常相似的结论，这为它们增加了分量。根据所有数据，在稳定性增强（类似于不稳定情形从受迫对流转变为自由对流）时状态没有突变，并且风分布可以唯一地由“对数+线性”方程（7.58）在广泛的正ζ值（或ζ'，或Rf，或Ri）范围描述。作为例子，我们在下面的图A中给出方程$f(\zeta') = \ln \zeta' + 7\zeta' +$ 常量或者实际上相同的$\varphi(\zeta') = 1 + 7\zeta'$（图中实线）的预言和McVehil （在内布拉斯加，奥尼尔附近和在南极的“南极点”站进行的）观测的比较。这幅图显示出非常好的符合。根据Panofsky et al. (1967)，方程$\varphi(\zeta') = 1 + 7\zeta'$在这个稳定性范围近似等价于（7.58）形式的方程$\varphi(\zeta) = 1 + 10\zeta$。Gurvich (1965)[见图55]和Zilitinkevich, Chalikov (1968a) [也参见Zilitinkevich (1970)]得到了方程（7.58）中系数β_1'同样的值$\beta' = 10$，他们用最小二乘法出来了齐姆良斯克附近草原上几次远征的大量数据。同时，J. J. O'Brien (1965)得到了方程$\varphi(\zeta') = 1 + \beta''\zeta'$中系数的平均估计$\beta'' \approx 5.0$（弥散很大）。Fichtl (1968)使用了一个两层方程，当$0 < \mathrm{Ri} < 0.01$，$\varphi(\zeta') = 1 + 4.5\zeta'$，当$0.01 \leq \mathrm{Ri} \leq 0.1$，$\varphi(\zeta') = 1 + 4.5\zeta'$。Chalikov (1968)根据苏联南极科考的数据得到$\beta_1' \approx 7$。Cermak et al. (1966)也从稳定热分层的风洞中的实验测量得出$\beta_1' \approx 7$。所以我们一定会得到结论，β_1接近10的方程（7.58）令人满意地描述了已有的几乎所有稳定分层的数据。渐近方程（7.43）和（7.44）中的系数C_3显然一定有相同的量级（接近10）。有趣的是注意到，在这方面，Ellison和Turner的数据（见下面8.2节）也得到结论，常数$R = \mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}$的值显然位于0.01和0.15之间，故而$C_3 = 1/R \approx 7 - 10$。然而，为了更精确地确定这个常数[以及更完整地阐明“线性定律”（7.44）成立

的条件]仍然必须组织特别仔细的强逆温情形的气象观测和进行额外的实验室检验。

容易看到，方程$\varphi(\zeta) = 1 + \beta_1'\zeta$等价于关系式$\varphi(\mathrm{Rf}) = (1 - \beta_1'\mathrm{Rf})^{-1}$。在此情形，$\zeta$对Rf的依赖也具有非常简单的形式：$\zeta = \mathrm{Rf}/(1 - \beta_1'\mathrm{Rf})$，$\mathrm{Rf} = \zeta/(1 + \beta_1'\zeta)$[参见方程（7.20）]。类似地，如果$\varphi(\zeta') = 1 + \beta''\zeta'$，那么$\zeta' = \mathrm{Ri}/(1 - \beta''\mathrm{Ri})$，$\mathrm{Ri} = \zeta'/(1 + \beta''\zeta')$。如果认为$\alpha(\zeta)$恒定（且已知），那么这些关系式也给出Ri对$\zeta$的依赖。这个依赖观测的经验图如图59所示，基于Gurvich (1965)的数据。

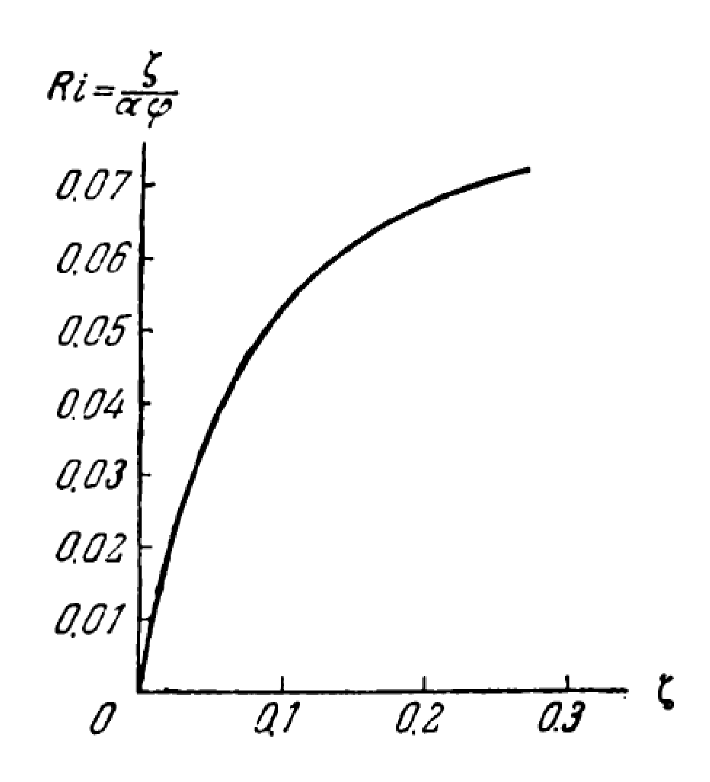


图 59 稳定分层情形Ri对ζ的经验依赖关系[根据Gurvich (1965)的数据]。

最后，公式（7.32）-（7.33）中的常数β值（决定了非常小的$|\zeta|$时$\varphi(\zeta)$和$f(\zeta)$的行为）被证明是非常不确定的，它很大程度上依赖于ζ值范围的选择。让我们仅考虑$\zeta < 0$的情形（因为稳定情形上面已经讨论过了）。我们已经指出，Monin, Obukhov (1954)发现，$\beta \approx 0.6$用“对数+线性”函数可以得到最低四米的一层中风分布非常好的近似。这个结果后来也被Panofsky, Blackadar, McVehil (1960)、J. J. O'Brien (1965)、Busch (1965)、Bernstein (1966) 以及在相对宽的负ζ范围内使用（7.32）形式近似的工作证实。同

时，一些研究者从更有限的ζ值范围的数据确定β，或者甚至借助了公式

$$\beta = \left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\kappa z}{u_*}\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}\right)\right]_{\zeta=0},$$

他们得到了大得多的β值，为几的量级[参见Zilitinkevich, Chalikov (1968a)得到的$\beta \to 1.45$]或甚至几十的量级[例见，例如Webb (1960, 1965)、Taylor (1960a)或Kondo (1962a)]。所以从在有限范围内最好地近似ζ值的条件确定β依赖于所选的范围，并且和从零处的$\varphi(\zeta)$导数确定的β不相符。所以，一点也不奇怪，在R. Taylor (1960a, b)、Takeuchi (1961)、Kondo (1962a)和O'Brien (1965)中得到了一系列不同的β值。于是得到，“对数+线性”近似一般只能小心使用，而对于$\zeta < 0$，广泛使用是不可取的。如我们在不稳定分层情形看到的，从对数律转变为自由对流理论的极限“1/3幂律”发生在非常薄的一层中。所以事实上只针对这一个转换层的公式（7.32）和（7.33）在这里没什么意义。

8.2 温度和湿度分布的数据

除了风速分布$\overline{u}(z)$的观测，大部分通常的气象观测也包括对平均温度分布$\overline{T}(z)$的观测，在较少的情况下会包括大气表面层中平均湿度$\overline{\vartheta}(z)$的观测。在温度测量中使用了各种类型的温度计。它们装有特殊装置防止它们受到太阳辐射的直接影响。电子仪器测量$\overline{T}(z)$分布最方便。这些仪器包括，例如，电阻温度计和热敏电阻（它们记录了空气温度变化引起的导体或特殊半导体（热敏电阻）电阻变化引起的电流变化）以及热电偶（其中一个接头保持恒温，其他接头暴露在大气中）[见，例如，Laykhtman, Chudnovskiy (1949)、Mclbroy (1955)、Krechmer (1957)、Lettau, Davidson (1957)]。电子设备可以直接测量小的温度差$\overline{T}(z_1) - \overline{T}(z_2)$，这使得测量精度可以提高到百分之几摄氏度或甚至百分之一摄氏度。为了测量湿度，最常用的方法是比较干湿球温度计的读数。在不同时期，许多其他原理也用作这些测量的基础[见，例如，Laykhtman, Chudnovskiy (1949)、Middleton, Spilhaus (1953)、Lettau, Davidson (1957)、1965国际会议]。然而，到目前为止，这些原理没有发展出简单可靠、能给出相对高精度ϑ值的仪器。所以仍然非常难以得到高精度的$\overline{\vartheta}(z)$分布数据。

稳定和不稳定分层的温度分布$\overline{T}(z)$的一般形式现在由很大观测已经被大家熟知。展示这种形式的一个典型例子是图61 中Monin (1962)的数据，是对1951年夏天在开放草原条件下观测的61个单独的温度分布平均得到的（平均是对8.1节开头提到的、与图52有关的六个相同稳定性均匀组进行

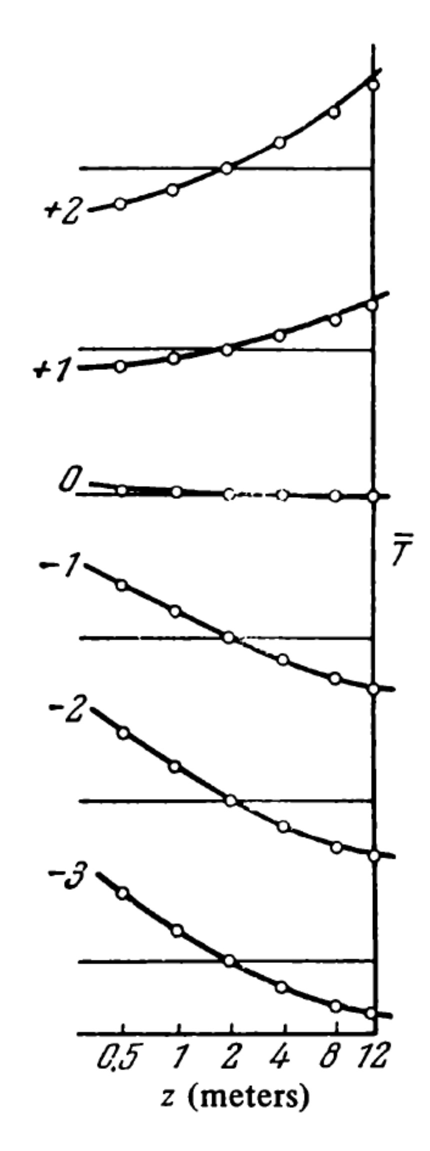


图 61 [9]不同分层情况下表面层中平均温度的经验分布。

的）。由图61明显看到，在不稳定分层情形，$\overline{T}(z)$随$\ln z$增大时的减小速率慢于线性规律，而对于稳定分层，$\overline{T}(z)$随$\ln z$增大而增大快于线性。上面已经注意到关于风速随高度增大的规律对分层的依赖的一个类似规则（见图52）。比较图52和61，我们甚至可以假设在所有分层情形中，风速和温度分布彼此相似，即对于大气的任意稳定性，对于表面层中的任意两个高度z_1和z_0，比例

$$\frac{\overline{T}(z_1)-\overline{T}(z_0)}{\overline{u}(z_1)-\overline{u}(z_0)} \tag{8.117}$$

可以假设为相同的值（对于逆温为正，对于中性分层为零，对于不稳定分层为负）。为了验证这个假设，比较两个形状函数

$$\frac{\overline{u}(z)-\overline{u}(z_0)}{\overline{u}(z_1)-\overline{u}(z_0)}\text{和}\frac{\overline{T}(z)-\overline{T}(z_0)}{\overline{T}(z_1)-\overline{T}(z_0)} \tag{8.118}$$

（其中高度z_0和z_1固定，z是变量）并检查它们是否相同就足够了。另一个方法是验证温度梯度和速度梯度比随z恒定。很多研究者在不同时间以不同精度进行了两种类型的验证[特别是Pasquill (1949)、Rider, Robinson (1951)、Panofsky (1961b)、Swinbank (1964, 1968)、McVehil (1964)、Gurvich (1965)、Busch (1965)、Swinbank, Dyer (1967)和Charnock (1967b)]。在较早的工作中，人们总是发现，表面层中风和温度分布在偏离中性分层不太大时特别相似。甚至经常有人断言，这种相似性对任何分层都严格成立，或者至少对任何不稳定分层成立。然而，澳大利亚研究组最近的工作（还没有被其他研究者的数据可靠地证实）表明对于不稳定分层，风速和温度分布有相当大的形状差异（参见，例如，下面的图62）。所以我们必然得出结论，$\overline{u}(z)$和$\overline{T}(z)$互相不类似，尽管在宽的稳定性范围内完全可靠地定量确定不相似的程度需要进一步仔细的研究（参见下面关于函数$\alpha(\zeta)$的讨论）。

湿度分布$\overline{\vartheta}(z)$的情况更糟糕。这些分布相对早的测量，例如，Pasquill (1949)和Rider (1954)都表明，在最低的几米，形状函数$\frac{\overline{\vartheta}(z)-\overline{\vartheta}(z_0)}{\overline{\vartheta}(z_1)-\overline{\vartheta}(z_0)}$接近（8.10）的两个函数。换句话说，早期对各种分层进行的湿度分布$\overline{\vartheta}(z)$的测量并不否认这些分布与风和温度分布相似的说法。让我们回想一下，根据早期数据，风和温度分布是非常类似的。然而，Crawford (1965)、Hogstrom (1967a, b), 和Swinbank, Dyer (1967, 1968)[也参见Dyer (1967)]更近期的测量表明，湿度分布表观上类似于温度分布，但一般来说和风分布不相似。对这些结果更完整的讨论在本小节末给出。这里我们重画了图62[取自Swinbank, Dyer (1967)]，其中根据四次澳大利亚科考的所有数据展示了2 m处三个形状函数$S_X=[X(4)-X(1)]/[X(16)-X(1)]$对理查德森数的依赖（仅对负的Ri）。形状函数定义式中的宗量是以米为单位的高度。平均风速$\overline{u}$、平均温度$\overline{T}$和平均湿度$\overline{\vartheta}$被用作物理量X（对应的函数记作S_u、S_T和S_ϑ）。也展示了图62中给出的稳定性均匀组中平均值的标准差（除了稳定性范围中间的风函数的情形，那里误差太小展示不出来）。根据图62中的数据，风和湿度的形状函数取近似相同的值，即0.5，对应于接近中性分层的对数分布。图中没有$|\mathrm{Ri}|<0.01$的S_T值，因为温度差测量的精度显然不足以确定大多数等温条件下的S_T。然而，随不稳定性增强，所有三个变量的形状函数越来越偏离中性值。此外，S_T和S_ϑ实际上在整

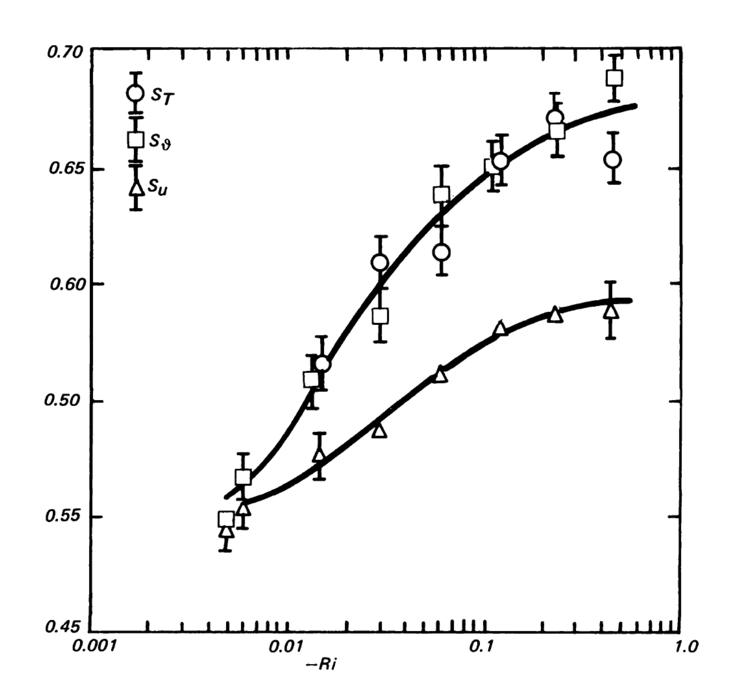


图 62 2 m 处平均速度u、温度T和湿度ϑ 的形状函数$S_X = [X(4) - X(1)]/[X(16) - X(1)]$与理查德森数的关系图，加上了相应的标准差[根据Swinbank, Dyer (1967)]。

个Ri范围是不可区分的，但它们都偏离S_u值相当多。图62所示结果非常重要，完全符合在7.3节末提出的热量和被动物质外加物混合机制相似性的直观物理推论。我们必须记住，目前湿度分布测量的精度相当差，甚至澳大利亚研究组的温度测量数据都显示出和其他来源的数据[例如Zilitinkevich, Chalikov (1968a)]的某种规则的偏差。所以图62的结果目前必须看组仅仅是初步的，需要进一步仔细验证。

用相似性理论（7.24）的一般公式，比例（8.9）可以写为

$$\frac{\overline{T}(z_1) - \overline{T}(z_0)}{\overline{u}(z_1) - \overline{u}(z_0)} = \frac{T_* \kappa}{u_*} \frac{f_1(\zeta_1) - f_1(\zeta_0)}{f(\zeta_1) - f(\zeta_0)}, \qquad (8.9')$$

其中$\zeta_1 = \frac{z_1}{L}$，$\zeta_0 = \frac{z_0}{L}$，而$f(\zeta)$和$f_1(\zeta)$是描述风和温度分布对无量纲高度依赖关系的普适函数。所以很明显，这个比例对所有z_1和z_0不变意味着函数$f(\zeta)$和$f_1(\zeta)$仅相差一个倍数。但

$$\frac{f'(\zeta)}{f_1'(\zeta)} = \alpha(\zeta) = \frac{K_T}{K},$$

所以风和温度分布的相似性等价于热量和动量的涡扩散系数之比α不依赖

于高度和不依赖于理查德森数。图62所示的数据和其他类似的数据为假设涡扩散系数比K_T/K不严格为常量的假设提供了明确的依据。然而，目前还没有成熟的数据可以完全可靠地定量确定这个比值对$\zeta=z/L$的依赖。关于这一点的更详细讨论，见下文。关于湿度的涡扩散系数，目前我们只能说，现有的所有湿度分布数据都符合$K_\vartheta/K_T=$ 常量的假设[甚至和$K_\vartheta/K_T=1$的假设相符]。

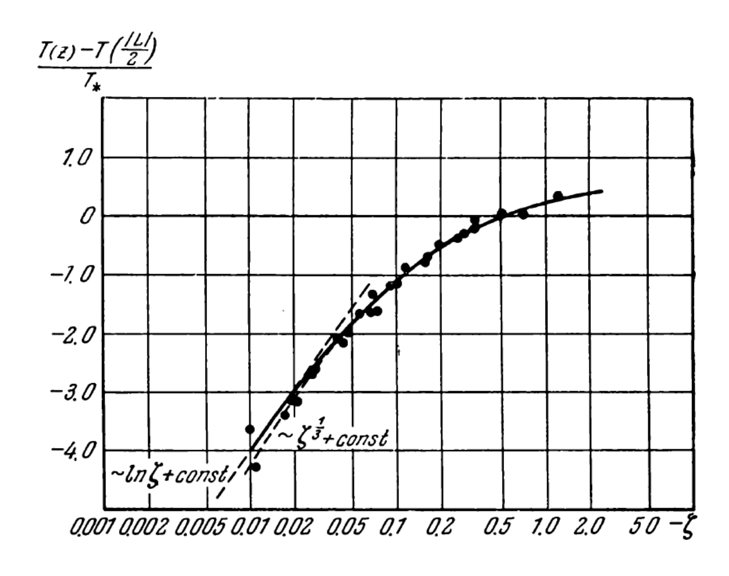


图 63 $\zeta<0$时函数$f_1(\zeta)-f_1\left(-\frac{1}{2}\right)$的示意图[根据Gurvich (1965)的数据]。

从相似性理论的观点对温度分布进行更全面的研究需要写出物理量$[\overline{T}(z)-\overline{T}(a|L|)]/T_*$或$\frac{z}{T_*}\frac{\partial\overline{T}}{\partial z}$对宗量$\zeta=\frac{z}{L}$经验的依赖关系。这里$a$是一个给定系数，例如，1/2或1/10，而$L$和$T_*$必须从直接测量的或使用某种可靠的间接方法（基于方程（7.12）和（7.14））估计的u_*和q 值确定。R. J. Taylor (1960a)[使用Rider (1954)和Swinbank (1955)的数据]、Takeuchi (1961)[由1956年在内布拉斯加，奥尼尔附近进行风和温度分布观测的大量数据]、Gurvich (1955)和Zihtenkevich, Chalikov (1968a)[使用了1962-1965年在齐姆良斯克（苏联）附近的大量测量数据，见取自Gurvich文章的图63和64]写出了函数$[\overline{T}(z)-\overline{T}(a|L|)]/T_*$。因为Takeuchi使用基于假设$K_T=K$的近似间接方法确定了$L$和$T_*$值，所以他的数据不能用于确定$\alpha(\zeta)$。R. J. Taylor处理的老数据表明，即使对于$\zeta\approx-0.03$，大气中也会发生向“自由对流状态”（由“1/3 幂律”表征）的转变。此外，Taylor也用这些数据近似估计$\alpha=f'(\zeta)/f_1'(\zeta)$。他发现对于$|\zeta|\leq 0.03$（即在“受迫对流”条件下），根据Rider的数据，$\alpha(\zeta)=\alpha_0\approx 1.2$，根据Swinbank的数据，$\alpha_0\approx 0.8$；对于$\zeta<-0.03$（对于自由对流），根据Rider，$\alpha(\zeta)=$

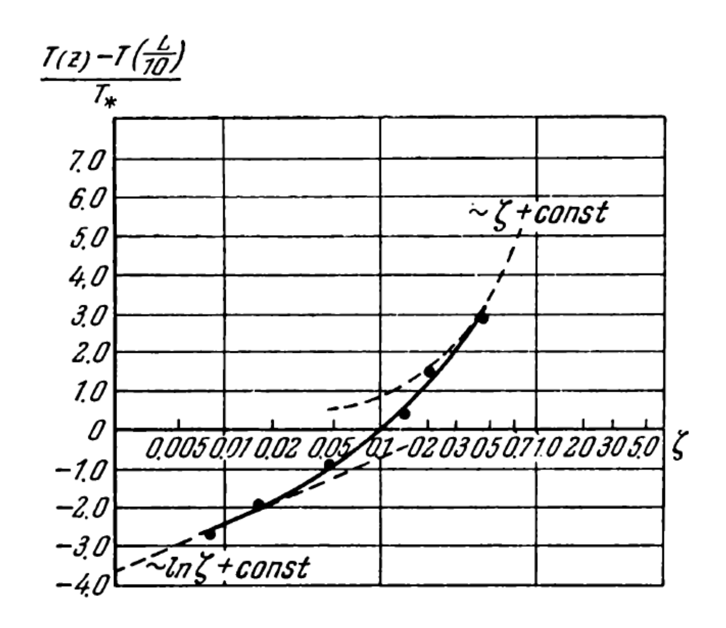


图 64 $\zeta > 0$时函数$f_1(\zeta) - f_1\,(0,1)$的示意图[根据Gurvich (1965)的数据]。

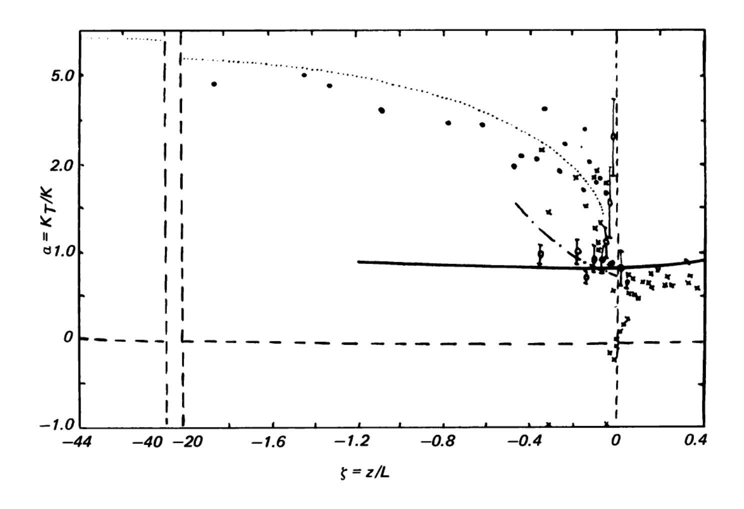


图 64 B. $\alpha = K_T/K$对ζ依赖的数据。•-克朗，澳大利亚[Swinbank (1964)]；○-齐姆良斯克，苏联[Mordukhovich, Tsvang (1966)]；×-圆山，马萨诸塞州，美国[Panofsky et al. (1967)]。点线是CTiarnock (1967a)给出的，虚线是Zubkovskiy (1967)给出的，实线是Zilitinkevich, Chalikov (1968a)给出的。

$\alpha_{-\infty} \approx 1.7$，根据Swinbank，$\alpha_{-\infty} = 1.3$[也参见Deacon (1959)]；最后在逆温情形（对于$\zeta > 0$），根据Rider，$\alpha \approx 1.8$，根据Swinbank的数据，$\alpha \approx 1.0$。如果我们考虑到湍动流量测量精度较差，并且在两种情形可以使用的观测量都很小，那么Rider和Swinbank的数据之间相当大的

差异是完全自然的。后来进行了很多尝试从很多已有的大气表面层中的观测来估计函数$\alpha(\zeta) = K_T/K$ 的值，例如，Swinbank (1964)、Gurvich (1965)、Busch (1965)、Dyer (1965, 1967)、J, L. H. Sibbons [见Swinbank (1966)]、Mordukhovich, Tsvang (1966)、Pandolfo (1966)、Record, Cramer (1966)、Charnock (1967b)、Zubkovskiy (1967)、Businger, Miyake et al. (1967)、Prasad, Panofsky [见Panofsky, Busch, Prasad et al. (1967)]、Kapoor, Sundararajan (1968)、Zilitinkevich, Chalikov (1968a)和其他一些文献。然而，所有这些已有估计的弥散目前非常大，例如可以在图B中看到的，那里展示了在澳大利亚、苏联和美国得到的数据。图中的点线给出了Charnock (1967b)处理澳大利亚数据的结果，虚线和实线是Zubkovskiy (1967)和Zilitinkevich, ChaUkov (1968a)基于在齐姆良斯克的观测给出的，这些观测覆盖更有限的稳定性范围（根据最后一个工作，对于在齐姆良斯克观测到的所有z/L值，$\alpha(\zeta) \approx 1$，$\varphi(\zeta) \approx \varphi_1(\zeta)$）。其他$\alpha(\zeta)$的数据也显示出同样程度的弥散。这种弥散可以自然地用必须对低精度的风和温度的经验分布求导以及必须使用现在测量精度非常低的湍动流量τ和q来解释。我们也必须记住，这些流量的时空变化对于大气表面层几乎是未知的。然而，Mordukhovich and Tsvang (1966)和Dyer (1968)关于τ和q随高度变化的初步数据表明这是非常大的。所以从所有已有数据得到的一般推论是，可靠的$\alpha(\zeta)$估计需要对风和温度分布以及同样观测中同时的τ和q值比现有的测量精确得多的测量。总的来说，已有的数据仅仅表明$\alpha(0) = \alpha_0$接近于1，即它们和5.7节提到的最佳实验室测量（$\alpha_0 \approx 1.1$）一致。随着不稳定性增强，比例α增大，随着稳定性增强，它似乎略微减小。然而，对极限值$\alpha_{-\infty}$的估计目前非常不确定：澳大利亚观测表明$\alpha_{-\infty} \approx 3 - 3.5$。然而，一些研究者倾向于使用小得多的估计值（接近2或者甚至处于1到1.5之间）。大气逆温情形的数据弥散更大，比不稳定分层的数据少得多。根据Prasad, Panofsky的工作[Panofsky et al. (1967)，也参见Busch, Panofsky (1968)]，涡扩散系数比α在大气表面层逆温情形的平均值接近于0.7。非常稳态条件下α值的非大气数据将在本小节末讨论。

很多已有的$\alpha(\zeta)$的确定基于与$\alpha(\zeta)$关系为$\alpha(\zeta) = \varphi(\zeta)/\varphi_1(\zeta)$的普适函数$\varphi_1(\zeta) = \frac{z}{T_*}\frac{\partial \overline{T}}{\partial z}$的计算。$\varphi_1(\zeta)$的图画在，例如Gurvich (1965)（见图65）、Dyer (1965, 1967)、Chamock (1967b)和Swinbank (1968)（这里给出了$\zeta\varphi_1(\zeta)$）中。在这些结果的讨论中，“1/3幂律”（7.35）-（7.36）（即关系式$\varphi_1(\zeta) \sim |\zeta|^{-1/3}$）的正确性，及其在不稳定大气表面层中的适用性，是最重要的。我们已经提到，R. J. Taylor (1960a)的数据表明，在不稳定大气中，向“自由对流状态”（即由“1/3幂律”表征的状态）的转换发生在出乎意料地小、量级为百分之几的$-\zeta$值。然而，这一点的正确性的第一个迹象出现得

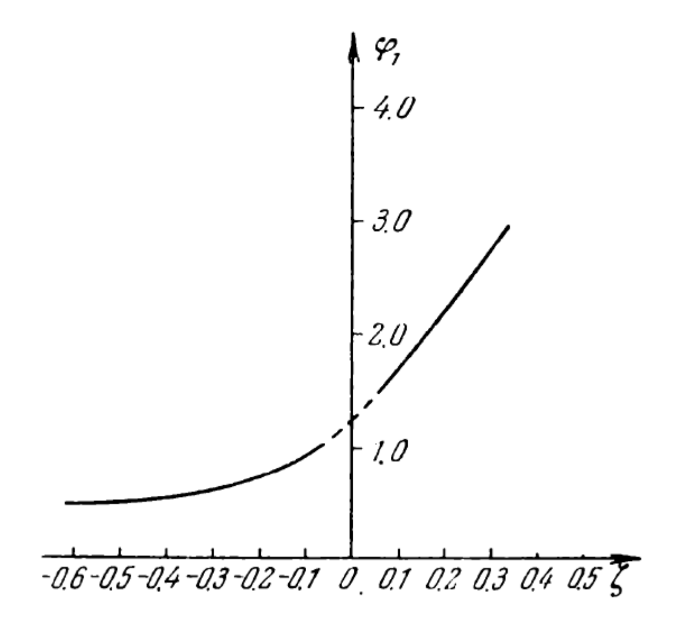


图 65 普适函数$\varphi_1(\zeta)$的经验图[根据Gurvich (1965)的数据]。

更早，在Priestley (1955, 1956)和R. J. Taylor (1956a)的工作中（那里第一次引入了“无量纲热流”$\overset{*}{q}$，我们在后面定义这个量）。对于非常小的负理查德森数和ζ值，从“受迫对流状态”（由接近对数的温度分布表征）转变为“1/3 幂律”的“自由对流状态”由Webb的结果得到。Webb (1958)得到了在澳大利亚艾迪斯韦尔（Edithvale）数年间观测的温度分布数据。所以，对于一系列不稳定分层的观测，他计算了物理量

$$\Gamma = \frac{1}{1.5\log 4}\frac{\overline{T}(8)-\overline{T}(2)}{\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z}\right)_{z=1.5}}$$

[括号中的数表示以米为单位的高度]并画出了1.5 m高度处这个量对Ri的依赖（见图66）。图66中的水平实线表示$\Gamma = 1$的值，对应于对数分布$\overline{T}(z) \sim$ 常量 $- \ln z$，而$\Gamma = 0.73$对应于“1/3幂律”$\overline{T}(z) \sim$ 常量 $+ z^{-\frac{1}{3}}$。对于$-\mathrm{Ri}_{1.5}$，最小的观测值接近0.015或甚至更小，Γ 实际接近于1，然而，它随后开始减小。对于$\mathrm{Ri} \approx -0.03$，$\Gamma$取值接近于0.73。这个值最后在很大的理查德森数范围内保持不变。图66中的点线表示逐渐从$\Gamma = 1$转变为$\Gamma = 0.73$，如果观察到$\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} \sim z^{-1}$就会注意到这一点，这对应于对数分布，持续到$\mathrm{Ri} = -0.03$的高度$z$，而在此之上，满足$\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} \sim z^{-\frac{4}{3}}$。

图66的一个有趣又出人意料的奇特之处是从大约$\mathrm{Ri}_{1.5} = 0.4$开始，Γ值再次开始减小。如果这个结果是对的并且具有普适特征（这仍然是非常

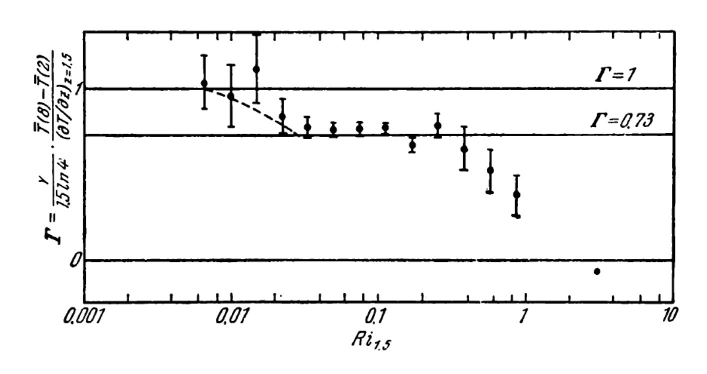


图 66 根据测量，在不稳定分层情形，Γ对Ri的依赖关系。

可疑的），那么可疑得到随着不稳定性增强，但高度固定，或者随高度增加，但固定不稳定分层，会出现一个瞬间，表明“1/3幂律”的有量纲宗量不再起作用。这在某种程度上和这个事实相符，“1/3幂律”没有被Thomas, Townsend (1957) 和Townsend (1959)相当粗略的实验室对流实验（其中水平速度$\overline{u}(z)$等于零）证实。然而，Townsend的结果可疑用这个事实解释，对于零（或非常小的）水平速度，水平混合大大减少，于是，在某个给定高度z的湍流仅在非常长的平均时间是水平方向均匀的。“1/3幂律”不适用于Townsend的实验还有一些其他解释。例如，Deardorff, Willis (1967)得出结论，已有的实验室数据既没推翻也没证实这个假设，在足够大的瑞利数，在没有水平平均速度四，盒子中的人工对流会得出$-1/3$幂律的温度分布，系数C_1接近大气中的观察值。另一方面，略微有理由可疑假设，在没有水平平均速度引起水平混合的情况下，分子热传导亚层中上升对流射流的产生条件会影响整个湍流状态。所以，在所有高度的湍流的统计性质在此情形会依赖于分子扩散系数χ[参见Malkus (1954b)的对流理论]。Townsend (1962a)、Priestley (1962)和Webb (1962)对这个问题进行了详细讨论，但他们没有得到完全明确的结论。同时，Dyer (1965, 1967)和Swinbank (1968)得到了新的测量数据。他们的结果也表明，对于非常不稳定的分层（近似地对于$\zeta < -0.6$），大气中也会产生对自由对流“1/3幂律”的偏离，但这些偏离现在看起来比之前发现的小得多。（Dyer和Swinbank 提出，对于$\zeta < -0.6$，$\varphi_1(\zeta) \sim |\zeta|^{-1/2}$，而在$-0.1 > \zeta > -5$，$\varphi_1(\zeta) \sim |\zeta|^{-0.44}$和所有数据都符合得很好，与源自Malkus理论并且在1962年的讨论中提出的规律$z(\partial\overline{T}/\partial z) \sim z^{-1}$ 相反。）上面提到的Deardorff, Willis (1967)的文章讨论了同样的问题，但他们的推论也非常不确定。由于问题的模糊性，在进一步考虑不稳定分层时，我们通常值考虑具有适中$|\zeta|$值的一层，其中从$|L|$的

百分之几的高度z开始，“1/3 幂律”无疑是很好地满足的。

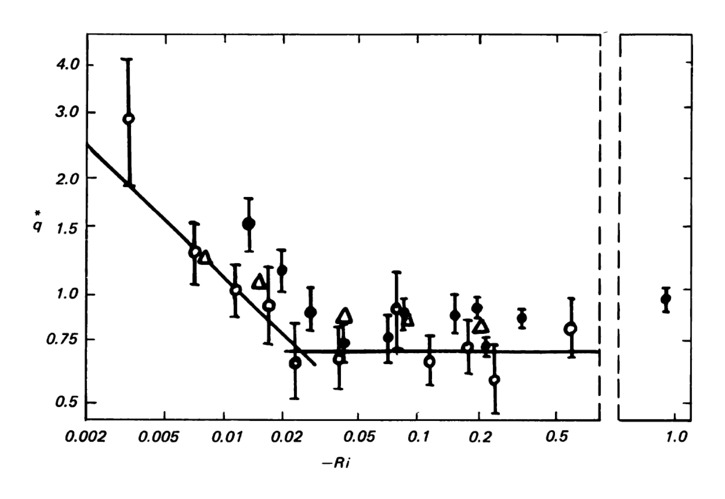


图 67 $\overset{*}{q}$对Ri的依赖关系，根据Swinbank和R. J. Taylor（○）、Perepelkina（△）和Mordukhovich和Tsvang（●）的数据。

为了确定“1/3幂律”（7.36）中系数C_1的数值，方便的是写出无量纲热流

$$\overset{*}{q}=\frac{q}{c_p\rho_0\left(\frac{g}{T_0}\right)^{1/2}\left|\frac{\partial\overline{T}}{\partial z}\right|^{3/2}z^2}=\frac{\kappa^2}{\zeta^2|f_1'(\zeta)|^{3/2}}, \tag{8.119}$$

这是ζ和Ri的单值函数。在自由对流条件下，这个量取恒定值，即$\overset{*}{q}_{-\infty}=\left(\frac{3}{C_1}\right)^{3/2}$，其对于小的$\zeta$和Ri的渐近行为由这个公式给出

$$\overset{*}{q}=\alpha_0^{3/2}\kappa^2|\zeta|^{-1/2}=\alpha_0\kappa^2|\mathrm{Ri}|^{-1/2}.$$

$\overset{*}{q}$对Ri的依赖关系的示意图如7.4节图51所示，两根轴都是对数标度。Priestley (1955, 1956)、R. J. Taylor (1956a)、Perepelkina (1959a)、Busch (1965)、Mordukhovich, Tsvang (1966)和Swinbank (1968)也使用同时测量的$\overline{T}(z)$、$\overline{u}(z)$和q经验地研究了这个依赖关系。图67给出了$\overset{*}{q}$ (Ri)的经验图，根据Swinbank (1955)、R. Taylor (1956a)、Perepelkina (1959a)和Mordukhovich, Tsvang (1966)画出。图67中的垂线段表示各个稳定性均匀组中的平均方差，例外是Perepelkina的数据，只给出了平均值。在所有情形，$\overset{*}{q}$的值都有相当大的弥散，这和所有已有测量相对低的精度有关。然而，图67中的平均值和存在两个极限情形$\overset{*}{q}\sim|\mathrm{Ri}|^{-1/2}$和$\overset{*}{q}=\overset{*}{q}_{-\infty}=$ 常量（图中用实线表示）的假设符合得很好。根据Swinbank和R. J. Taylor早期的数据，这两个极限情形之间的转换区极端窄。Perepelkina, Mordukhovich和Tsvang的数据以及

所有其他$\overset{*}{q}$和$\varphi_1(\zeta)$数据[包括Panofsky, Blackadar, McVehil (1969)、Gurvich (1965)、Busch (1965)、Dyer (1965; 1967)和Zihtinkevich, Chalikov (1968a)]表明转换更平滑，但证实了它和物理中碰到的其他转换相比是非常尖锐的。根据所有数据，除了最近Swinbank (1968)的结果（稍后提到），自由对流和“1/3幂律”在出乎意料小、处于$0.02-0.05$区间的$|\mathrm{Ri}|$和$|\zeta|$就开始成立，这个事实上面已经提到过。渐近关系$\overset{*}{q}\ (\mathrm{Ri}) \sim |\mathrm{Ri}|^{-1/2}$中的正比系数的经验值接近0.17[Deacon (1959)]，和普遍接受的值$\kappa \approx 0.4$，$\alpha_0 \approx 1$一致。然而，常量$\overset{*}{q}_{-\infty}$的数据彼此符合得不好。根据Swinbank和R. J. Taylor 早期的澳大利亚数据，在引入仪器改正后，$\overset{*}{q}_{-\infty}\approx 0.9$[Priestley (1959a), Deacon (1959]。根据Prepelkina，$\overset{*}{q}_{-\infty}\approx 0.8$。根据Gurvich和Zilitinkevich, Chalikov（他们从有限的负Ri 值范围的测量确定了$C_1 = 3/(\overset{*}{q}_{-\infty})^{2/3}$），$\overset{*}{q}_{-\infty}\approx$ 0.75。根据Cramer, Record以及Panofsky相当粗略的数据，分别有$\overset{*}{q}_{-\infty}\approx$ 0.95和$\overset{*}{q}_{-\infty}\approx 0.75$。而根据Mordukhovich, Tsvang，$\overset{*}{q}_{-\infty}\approx 0.8$。所有这些估计符合得显然非常好。不幸的是，Swinbank, Dyer (1968)最近在澳大利亚的测量不支持其他研究者的结果。根据Dyer (1967)，$\overset{*}{q}_{-\infty}$的最佳值[修正了使用差分比$\Delta\overline{T}/\Delta z$而不是导数$\partial\overline{T}/\partial z$导致的误差]在$0.02 \leq |z/L| \leq 0.6$ 范围接近1.15。（在他更早的文章中没有作修正，Dyer (1965)给出一个略微大的估计；Dyer$|z/L|$ 的数据也对应一个较大的$\overset{*}{q}_{-\infty}$值。）Swinbank (1968)对同样的数据的分析表明，实际上根据1962-1964年在澳大利亚的测量，$\overset{*}{q}_{-\infty}$并不是严格恒定的。Dyer的估计对应于Swinbank图中$\mathrm{Ri} \approx -0.1$处$\overset{*}{q}_{-\infty}$平坦的极小。然而，随着$-\mathrm{Ri}$增大，$\overset{*}{q}_{-\infty}$的值也增大，并且在Swinbank考虑的$-\mathrm{Ri}$的最大值（接近于1），$\overset{*}{q}_{-\infty}$只显示出微弱的“变平”到常量（略大于1.5）的趋势，严格的常数值在这么强的不稳定性下还未达到。这些结果明显差异的解释仍然不清楚。

知道了$\overset{*}{q}_{-\infty}$，容易计算系数$C_1 = 3/(\overset{*}{q}_{-\infty})^{2/3}$，反过来也一样。所以，所有确定的$C_1$ 和$\overset{*}{q}_{-\infty}$都彼此紧密相关。对于$\overset{*}{q}_{-\infty}\approx 0.75, 1, 1.15$和1.5，我们分别得到下面的$C_1$值：$C_1 \approx 3.6, 3.0, 1.7$和2.3。

当然，也存在很多$\partial\overline{T}/\partial z$、$\partial\overline{u}/\partial z$、$u_*$、$q/c_p\delta$、$g/T_0$和$z$的不同于$\overset{*}{q}$（和$\overset{*}{K}$，见方程（8.6））的无量纲组合。它们都可以用主风速和温度函数$f(\zeta)$和$f_1(\zeta)$[或$\varphi(\zeta)$和$\varphi_1(\zeta)$]代表，也可以由实验数据确定。所以，例如，Pasquill(1949), Rider (1954)和Perepelkina (1959a)考虑了经验函数

$$F_1(\mathrm{Ri}) = -\frac{q}{c_p\rho_0 \frac{\partial\overline{u}}{\partial z}\frac{\partial\overline{T}}{\partial z} z^2} = \frac{\kappa^2}{\zeta^2 f'(\zeta) f_1'(\zeta)}. \tag{8.120}$$

如果$f(\zeta)$已知，那么$F_1(\mathrm{Ri})$的值也使得我们可以确定描述温度分布的普适函数$f_1(\zeta)$。然而，相对早期工作中引用的$F_1(\mathrm{Ri})$数据的精确度完全不足以这

样使用。

Swinbank (1968)构建了这些函数的经验图：

$$F_3(\zeta)=F_4(\mathrm{Ri})=-\frac{g}{T_0}\frac{z}{u_*}\frac{\partial\overline{T}}{\partial\overline{u}}=\frac{\zeta}{\kappa^2}\frac{\varphi_1(\zeta)}{\varphi(\zeta)}.$$

他的图弥散相当小。$F_3(\zeta)$的数据可以得出结论，在很宽的负稳定性参数范围内$K_T/K=\alpha(\zeta)\approx 2.7|\zeta|^{1/4}$。然而，我们已经注意到，Swinbank (1968)和某些其他研究者的数据之间有些不寻常的差异。

Pasquill (1949)和Rider (1954)从风和湿度分布的测量以及借助称重蒸渗计（weighing lysimeters）的蒸发量测量经验性地写出了类似于$F_1(\mathrm{Ri})$ 的湿度分布的函数

$$F_2(\mathrm{Ri})=-\frac{j}{\rho_0\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial z}z^2}=\frac{\kappa^2}{\zeta^2 f'(\zeta)f_2'(\zeta)}. \tag{8.121}$$

显然，因为

$$F_1(\mathrm{Ri})=K_T/z^2\frac{\partial\overline{u}}{\partial z},F_2(\mathrm{Ri})=K_\vartheta/z^2\frac{\partial\overline{u}}{\partial z},\overset{*}{K}{}^2(\mathrm{Ri})=K/z^2\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}$$

[参见8.1节方程（8.6）]，通过比较F_2、F_1和$\overset{*}{K}$的值我们原则上也可以得到关于比值K_ϑ/K_T和K_ϑ/K行为的明确结论。然而，由于Pasquill和Rider的湿度分布和蒸发流量数据的相当大的不精确性，它们对于这种比较没有用处。

后来，Charnock, Ellison (1959)发现了海面上湿度涨落和温度涨落之间的强关联，并且认为这非常不确定地间接证实了水蒸气和热流的涡扩散系数K_ϑ和K_T相等。然而，后来Crawford (1965)、Dyer (1967)、Swinbank, Dyer (1967)和Hogstrom (1967b)得到了对$K_\vartheta=K_T$的假设明确得多（尽管也不太严格）的证明。其中一个证明如图62中所示，在上面讨论过。另一个方法基于研究无量纲水蒸汽流量

$$\overset{*}{j}=\frac{j}{\rho_0(g/T_0)^{1/2}|\partial\overline{T}/\partial z|^{1/2}|\partial\overline{\vartheta}/\partial z|z^2}=\frac{\kappa^2}{\zeta^2|f_1'(\zeta)|^{1/2}|f_2'(\zeta)|}$$

对热稳定性的依赖，这非常类似于无量纲热流$\overset{*}{q}$。函数$\overset{*}{j}$在$-0.0003\geq\mathrm{Ri}\geq-2.5$范围的第一幅经验图是Crawford (1965)画出的。他使用了蒸发数据和风速、温度和绝对湿度分布的数据，在1962-1963年间由称重蒸渗仪、红外湿度计（空气从不同高度吸入）和热电偶风速计的测量得到。得到的图非

常类似于图67。对于$-\text{Ri} \le 0.025$，这些点集中在直线$\overset{*}{j} = 0.2|\text{Ri}|^{-1/2}$附近，系数0.2接近受迫对流状态$\overset{*}{q}$类似关系中的系数0.17，而对于$-\text{Ri} > 0.025$，它们对应于常数值$\overset{*}{j} \approx 1.4$，弥散相对较小。最后一个数值略大于自由对流状态大部分对$\overset{*}{q}$的估计，但非常接近于Dyer (1965)得到的估计$\overset{*}{q} \approx 1.32$。后来，Dyer (1967)用1962-1964年澳大利亚科考的数据（其中蒸发的水汽流量是用下一小节描述的一种方法测量的，湿度分布是用一种特殊的晶体露点湿度计对从不同高度采样的空气测量的）计算了物理量$\overset{*}{q}$ 和$\overset{*}{j}$ 以及$\varphi_1(\zeta) = zT_*\partial\overline{T}/\partial z$ 和$\varphi_2(\zeta) = z/\Theta_*\partial\overline{\vartheta}/\partial z$。这里发现函数$\varphi_1(\zeta)$和$\varphi_2(\zeta)$实际上在所研究的整个不稳定分层范围是相等的，尽管$\varphi_2$数据更弥散。在$-0.02 \le \zeta \le -0.6$范围，两个函数都很好地满足“1/3幂律”，在改正了把导数$\partial\overline{T}/\partial z$和$\partial\overline{\vartheta}/\partial z$近似为相应的有限差分表达式引起的小误差后，在这个范围计算的$\overset{*}{j}$接近于1.10。这个误差导致$\overset{*}{j}$和q的高估，Crawford, Dyer (1965)忽略了这个误差。最后这个估计值实际上和Dyer在同一个工作中得到的$\overset{*}{q} \approx 1.15$相符。最后，Högström (1967b)使用了1961-1963年间在瑞典南部平原相对粗糙的气象和水文观测数据，其中湿度涨落是用一台澳大利亚仪器测量的，湿度分布是用通常的气象学湿度计以较差精度测量的。他得到一个估计值$\overset{*}{j} \approx 1.25$（没有有限差分改正），和Crawford, Dyer的估计值在实验误差范围内一致。因为$\overset{*}{j} \,/\, \overset{*}{q} = K_\vartheta/K_T$，所有上面提到的数据显然支持对于所有中性和不稳定分层有$K_\vartheta = K_T$的假设。

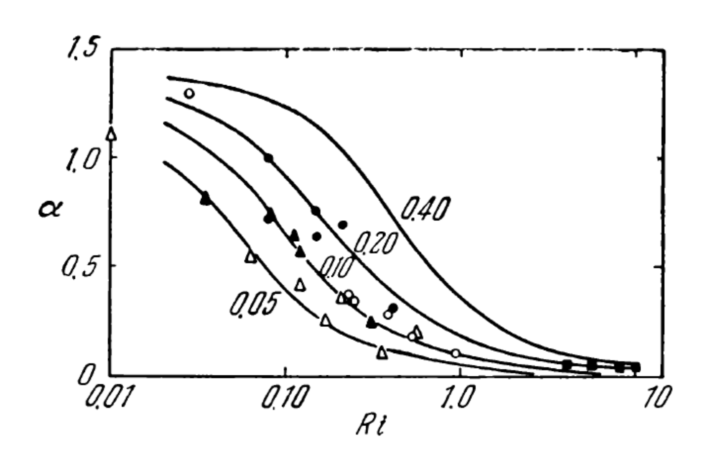


图 68 G. I. Taylor与Ellison和Turner关于α对Ri依赖数据和Ellison公式（8.14）的比较：●○-Ellison和Turner高度$z = 1.5$ cm的数据；▲△-$z = 1$ cm的数据；■-Taylor的数据。空心符号表示较不可靠的实验数据。

到目前为止，我们仅考虑了Ri和ζ为负值（或者，至少只是小的正值）的数据。强逆温的数据到目前在大气测量中还非常稀少，有很大的

弥散。于是，这个课题必须进一步仔细研究。然而，Liljequist (1957)在南极的观测似乎证实了在很多情形中在强逆温中存在线性温度分布，如在某些额外假设下的相似性理论所预测的（见7.3节）。另一方面，如果我们采用热量和物质外加物的涡扩散系数对稳定分层也相同的假设，那么在研究极端稳定情形的$\alpha = K_T/K = K_\vartheta/K$值时，对于由负垂向盐度梯度引起的非常稳定的密度分层流体的流动，我们可以使用来自海洋观测或实验室实验的数据。最早和最著名的这类数据是G. I. Taylor从卡特加特海峡的海洋观测得到的。这些数据表明，在Ri为10的量级，并且$\alpha = K_\vartheta/K$很小使得$\mathrm{Rf} = \alpha\mathrm{Ri}$保持远小于1时也会发生相当程度的湍流交换[见Proudman (1953)和Stewart (1959)的讨论]。Proudman 书中的这些数据表明对于$4 < \mathrm{Ri} < 10$，$\alpha \approx 0.03 - 0.05$（图68中黑色方块）。通过贝加尔湖冰层下一层水中对K 和K_T的直接测量得到了与此紧密符合的$\alpha = K_T/K \approx 0.02 - 0.05$[见Kolesnikov (1960)]。后来在Ellison, Turner (1960)的实验室实验中得到了$\mathrm{Ri} > 0$时α对Ri依赖的相对粗糙的数据。在这些实验中，在矩形截面的管（有玻璃墙）中引入了负垂向盐度梯度的盐水湍流。在管的一个截面测量速度和密度分布，并且通过间接方法估计涡扩散系数K和K_ϑ。图68给出了所得到的结果和Taylor和Proudman的海洋学数据。在这副图中，实验点的弥散非常可观，此外，从$z = 1$ cm到$z = 1.5$ cm的数据有系统性偏差。然而，α随Ri的增大而减小的一般趋势很容易看到。图68中的实线对应于基于Ellison (1947)提出的半经验公式

$$\alpha(\mathrm{Ri}) = \frac{\alpha_0(1 - \mathrm{Rf}/R)}{(1 - \mathrm{Rf})^2}, \quad \mathrm{Rf} = \alpha\mathrm{Ri} \tag{8.122}$$

得到的α值。这里假设$\alpha_0 = 1.4$，这显然太大了，见5.7节，对应于每条曲线的$R = \mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}$值写在曲线上面。图68的实验点或多或多或少和方程（8.14）得到的推论相符。根据这些数据，$R = \mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}$的最佳估计处于0.10和0.15之间。Webster (1964)从风洞测量中得到了$\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}$的另一个粗略估计。在这些测量中，速度剪切和热分层是用两个网格产生的，一个具有可变加热的杆，另一个具有可变直径的杠。根据Webster的结果，$\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}} \approx 0.35$。Högström (1967b)和Webster (1964)报告了其他对$\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}$的估计，没有一个非常可靠，大部分断言$\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}}$处于0.08和0.4之间。

8.3 测量湍动动量流、热量流和水蒸气流的方法

如已经看到的，完整验证第7节讨论的相似性理论的推论不仅需要分布$\overline{u}(z)$、$\overline{T}(z)$和$\overline{\vartheta}(z)$的分布的知识，而且需要湍动动量流（剪切应力）$\tau = \rho u_*^2$、热量流q以及水蒸气流（蒸发率或凝结率）j 的知识。此外，因为物理量τ（或u_*）、q和j是大气湍流非常重要的特征，直

接描述了大气和下垫面之间的相互作用，所以很自然它们的确定是大气表面层物理的一个核心问题。所以，在这一点上，至少需要简单描述一下测量湍动流量的主要方法。

最普适的直接测量u_*、q和j的方法是涨落（或涡相关）法，包括在一个固定点记录涨落u'、w'、T'和ϑ'的时间变化，随后计算乘积$u'w'$、$w'T'$和$w'\vartheta'$的时间平均。因为

$$u_* = (-\overline{u'w'})^{1/2}, q = c_p\rho_0\overline{w'T'}, j = \rho_0\overline{w'\vartheta'}, \tag{8.123}$$

这些平均确定了所有我们感兴趣的量。然而，用于涨落测量的仪器记录时必须不扭曲微观气象学涨落（它们对u_*、q和j值有很大的贡献）的所有细节。后一个要求对仪器参数（不事先知道影响湍动流量的涨落的细节，这些参数难以准确确定）施加了重要的限制。实际上所需信息涉及湍动流量谱的组成，这方面的研究仍然非常不足。我们将在本书第2卷第8章更详细地讨论这一点。此外，当使用涨落方法确定湍动流量，我们需要知道如何选择时间平均区间，使得得到的平均值接近根据某种合理确定的统计系综的平均，故而7.1节提到的“平均值的逐渐漂移”不会发生。所有这些事实使得测量过程变得复杂得多，并且最终的分析得到的结果不总是足够精确。然而，目前，涨落方法仍然时直接确定所有三个量τ、q和j的唯一的一般性方法。

为了测量风速涨落u'和w'的精细细节，直到1958年，大部分研究者都在使用热线风速计，这种仪器已经在风洞流速度涨落的测量中成功使用多年。Göedecke (1935)是使用热线技术在大气测量中取得成功的第一批工作之一。后来，从1947年到1949年，Obukhov和Krechmer[见，例如，Krechmer (1954)]在苏联发展了这类合适的仪器。在大约同时，热线风速计也开始在澳大利亚和英国的大气研究中使用[见，例如，Swinbank (1951a, 1955)、Deacon (1955)、Mcllroy (1955)、Jones, Pasquill (1955)]。McCready (1953) 发展了一种特别灵敏的用于大气测量的热线风速计。20世纪50年代末和20世纪60年代发表了相当多的大气热线风速计测量的工作。然而，我们这里不试图提到所有这些工作。

热线风速计的一般原理在例如Corrsin (1963)和Kovásznay (1966)的工作中已经为人熟知，所以这里不再详细复述。

所有热线风速计的传感器是细金属线，在测量期间由电流加热到几百度的温度。这根线的温度变化，也就是其电阻的变化由传递到空气中的热量决定。这个传热过程依赖于垂直于这根线的流动速度分量，并且在实际中不依赖于通常只有几分之一度的空气温度的小变化。通过测量这根线电阻的涨落，也就是通过这根线的电流的涨落，可以确定垂直于这根线的风速分量的涨落。当热线风速计的线垂直放置，电流涨落对应于水平风速涨落。如果我们现在在穿过平均风向（由惯性风向标得到）的垂直平面中设置两根线，把它们倾斜到与垂直方向夹角$+45°$和$-45°$，那么这两根线的电阻差正比于风速的垂向分量，正比系数依赖于平均风速。热线风速计有助于以高达1 cm/sec的精度、量级为0.01 sec的时间延迟（时间常数）记录风速涨落。时间延迟更短且灵敏得多的此类仪器也是可能的。

线的电阻和电流对风速依赖的非线性是非常不利的。例如，在使用模拟计算机而不是数字计算机时，涨落乘积平均值的计算变得非常复杂。将热线风速计线性化的一种方法是将电流涨落通过一个额外的非线性仪器，这个仪器的特征对应于风速计校准曲线，使得输出信号正比于测量的风速涨落[McCready (1953)、R. J. Taylor (1958)、Dyer, Maher (1965a)]。为了避免这种复杂性，Bovsheverov 和Gurvich[Gurvich (1959)、Bovsheverov, Voronov (1960)]1959年在莫斯科大气物理研究所构建了一台线性仪器用于测量精细尺度速度涨落。他们的仪器，超声微风速计基于声音从声源到麦克风的传播时间对路径上空气速度的依赖。

Businger和Suomi[见Lettau and Davidson (1957)、Barad (1958)、Kaimal, Businger (1963)、Kaimal, Cramer (1964)和Kaimal, Wyngaard, Haugen (1968)]也在美国和日本设

计了同样类型但精度较低的设备。Bovsheverov-Gurvich仪器最重要的部分是微型圆柱声源和麦克风，它们大约直径2 mm，大约5 mm长。这些仪器有两个发射器（源）S_1和S_2以及两个接收机（麦克风）R_1和R_2。S_1和R_2对距离R_1和S_2对2.5 cm（见图69）。声音，也就是超声波，沿实际上相同的路径从S_1向R_1传播，从S_2向R_2反向传播。如果声源信号同相，那么麦克风信号的相位差正比于沿仪器底座方向的风速分量，几乎不依赖于空气温度。这台仪器也使得可以将速度涨落测量到1 cm/sec精度，时间延迟小于0.001 sec。

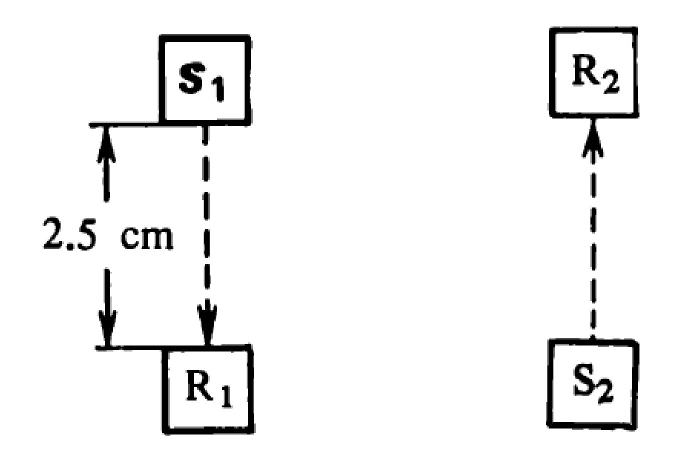


图 69 声波微风速计中发射器和接收机排布的示意图。

除了热线风速计和声波风速计，有时还用螺旋桨风速计和根据用来普通风向标原理建造的特殊类型的微型风向标测量风速的小尺度涨落[见，例如Kaimal, Cramer et al. (1964)和Dyer, Hicks, King (1947)]。微型风向标对于记录风向涨落特别有用，加上热线风速计得到的数据，可以确定三个速度分量u'、v'和w'的瞬时值（见，例如，Cramer, Record (1953)和Lettau, Davidson (1957)5.2节）。然而，这类设备的时间延迟比上面讨论的仪器要大，使测量和随后的处理自动化的可能性较小。

温度涨落T'的测量可以使用带有导体或半导体传感器的电阻温度计，或者借助微型热电偶。测量T'的电阻温度计的一个典型例子是Krechmer (1954)的微型温度计或类似的澳大利亚仪器[Mcllroy (1955)、Dyer (1961)、Dyer, Maher (1965a)]。当电阻元件被用于测量温度涨落，会有非常弱的电流通过它，相对周围温度的升温不超过0.01°。在这些条件下，实际上没有向空气的热传递，线的温度以及电阻只依赖于空气温度涨落，不依赖于风速涨落。结果，通过电阻元件电流的涨落正比于空气温度涨落，正比系数仅由仪器参数决定。

为了测量湿度涨落ϑ'，可以使用干湿球电阻温度计，或干湿热电偶。它们给出了两个温度T'和T_1'的瞬时值，由此ϑ'借助“湿度计”方程得到[见，例如，Middleton, Spilhaus (1953)或Kedrolivanskiy, Sternzat (1953)]。然后T_1'可以数值地从T'和T_1'值得到[Mcllroy (1955)]，或者把T'和ϑ'涨落输入特殊模拟电子器件，自动进行等价于求解湿度计方程的操作而得到[[Swinbank (1951b)、R. J. Taylor (1956b)、Taylor, Dyer (1958)、Dyer, Maher (1965a)、Polavarapu, Munn (1967)]。在每种情形，估计得到的ϑ'值或者特别地，$j = \rho\overline{w'\theta'}$的值的精度要比确定$T'$和$q'$难得多[见R. J. Taylor (1963)]。于是，使用涨落方法完整地得到可靠的j值仍然有光明的未来。通过把两种温度计替换微一种几乎没有事件延迟的光学红外湿度计，这个方向有更好的前景。这种湿度测量法基于空气折射系数对水汽含量的依赖[见Elagina (1962)]。然而，红外湿度计还没有发展到可以系统性地在野外条件下使用的

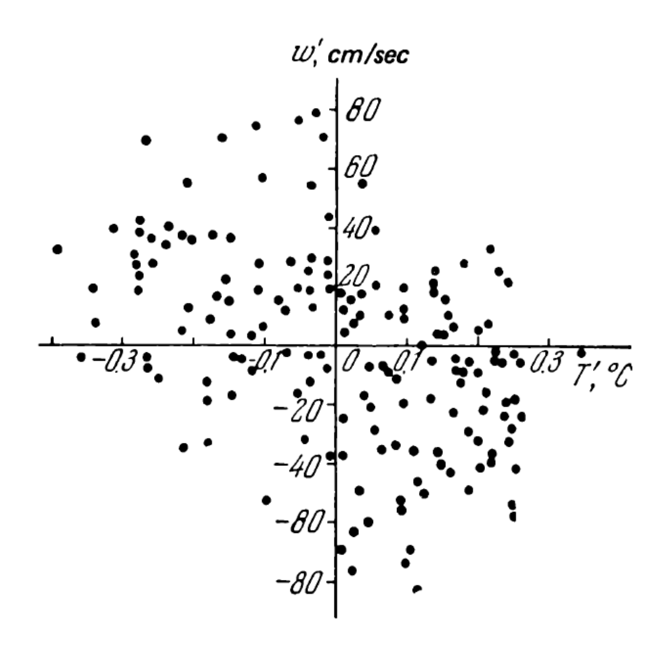


图 70 温度和垂向速度涨落相关图的例子。

阶段。

原则上，涨落测量可以同时确定一系列相继时刻的u'和w'或w'和T'或w'和ϑ'值。未来展示用这种方法得到的结果，图70[借自Monin (1953)]展示了表征在1.5 m高度在逆温条件下测量的涨落w'和T'之间依赖关系的相关图。这幅图对应的w'和T'值之间的相关系数r_{wT}等于-0.24。这里的湍动热量等于$q = -0.03$ cal/cm^2 min。图71也借自Monin，展示了表征也是在1.5 m高度测量的u'和w'涨落之间关系的相关图。这里相关系数等于-0.55，$u_* = 0.33$ m/sec。

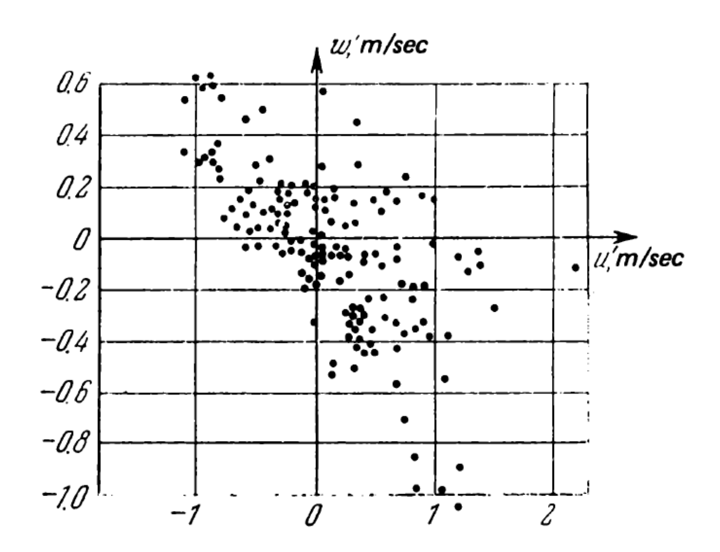


图 71 风速的水平和垂向分量相关图的例子。

当然，从图1所示类型的流迹中计算涨落乘积的平均值是非常费劲和乏味的。然而，如果使用线性仪器，或通过特殊的线性化电路变得几乎线性的仪器，那么涨落乘积（或平方）的平均值可以通过特殊的相关计自动获得。这是一个模拟积分器件，用来计算两个输入信号乘积的积分。这种自动相关器是由Bovsheverov, Gurvich, Tatarskiy, Tsvang (1959)在苏联发展的，也参见Bovsheverov, Gurvich, Mordukhovich, Tsvang (1962)。它们被用于确定湍动热流[Bovsheverov, Gurvich, Tsvang (1959)]。在澳大利亚，Taylor, Webb (1955)和Dyer (1958)发展了一个类似的装置。[也参见Dyer, Maher (1965a, b)和Dyer, Hicks, King (1967)。]涨落也可以记录模拟磁带上，然后转换微数字形式，然后最终由数字计算机计算[参见Kaimal, Haugen, Newman (1966)]。Businger, Miyake et al. (1967)比较了不同热流测量方法，展示了湍动热流的水平变化甚至对于均匀下垫面也相当大。

除了测量湍流剪切应力的涨落方法，也可以使用测力计法。这是首先由Sheppard (1947)提出的，后来被Pasquill (1950)、Rider (1954)、一些美国研究者[见Lettau, Davidson (1957)3.2节和Bradley (1968)、Gurvich (1961)以及Bradley (1968)中的参考文献] 使用。这个方法包括使用覆盖了具有当地特点的草地的土壤。这块土壤设置为与移动平台的地面齐平，在Gurvich和Bradley的实验中用线悬挂起来，在其他研究者的实验中附在流体上。这个平台被特殊的弹簧固定。风对平台的拖拽力或者通过测量弹簧的张力（如Sheppard, Pasquill等人所做的），或者通过测量平台的位移确定。用这种方法测量τ和u_*的仪器变化莫测，使用它们需要非常小心。然而，最好的这些仪器的精度和最好的已有为了同样目的设计的涨落仪器的结果相当。

在气象学领域，湍流水汽流量（或者蒸发率）j通常是用各种类型的称重蒸渗计（土壤蒸发器）的方法测量的。在这些仪器中，一大块土壤被切割，并小心地保持其结构。移除土块形成的孔会被加深，并在里面放置特殊的刻度。这块土壤随后放回其原始位置，以规则的间隔称重。与这些优越的蒸渗仪相比，使用其他类型的蒸渗仪，每次称重都需要转移土块。在每种情况下，都可以确定土块的水分蒸发速率，参见，例如，Mcllroy, Angus (1963)和Crawford (1965)。不幸的是，仍然难以确定一块所测量的土壤的蒸发率在什么程度上对应于未受扰动的土壤的蒸发率。于是，一些研究者倾向于认为所有从称重蒸渗仪得到的数据都非常有问题。为了驳斥这一观点，必须比较使用蒸渗仪和涨落方法同时测量的蒸发率的大量资料。Swinbank, Dyer (1967, 1968)进行了第一个这种尝试。然而，到目前为止，还没有完全可靠的这种资料。这是因为目前蒸发率的涨落测量即没有很好的发展，也不特别精确。

为了确定湍动热流q和蒸发率j，我们也可以使用能量平衡方程，即下垫面的热量预算方程（heat budget equation）

$$B = q + Q + mj. \tag{8.124}$$

这里B是地球表面的辐射平衡量，具体来说，等于入射的长波和短波辐射之和，其中减去了向外的辐射，Q是土壤中的热流，m 是蒸发的潜热。在某些非常干燥土壤的情形，例如，在沙漠中，可以假设右边最后一项和其他两项相比较小。然后，测量B和Q，我们可以计算q。然而，当q用涨落方法测量，方程（8.16）和q、B和Q测量的数据可以用于得到蒸发率j。如果q未知，那么方程（8.16）可以用于得到q的值，见Rider (1954)。另一方面，如果q和j是直接测量的，那么方程（8.16）可以用作所得数据一个额外的验证[Dyer (1961), Dyer, Maher (1965a, b)]。最后，如果q和j都不是直接测量的，但我们有温度和湿度分布的数据，那么我们可以使用热量和水汽的涡扩散系数相等的假设。于是可以得到所谓的波文比（Bowen ratio）$\gamma = q/mj$，这是一个无量纲量，满足方程

$$\gamma = \frac{q}{mj} = \frac{c_p}{m}\frac{\overline{T}_1 - \overline{T}_0}{\overline{\vartheta}_1 - \overline{\vartheta}_0}, \tag{8.125}$$

其中$\overline{T}_1$和$\overline{T}_0$是两个固定高度z_1和z_0的平均温度，$\overline{\vartheta}_1$和$\overline{\vartheta}_0$是同样高度的平均比湿度。由方程（8.16）和（8.17）得到

$$q = \frac{\gamma(B-Q)}{1+\gamma}, \quad j = \frac{B-Q}{m(1+\gamma)}, \tag{8.126}$$

这些方程使得我们可以从B、Q、$\overline{T}_1$、$\overline{T}_0$、$\overline{\vartheta}_1$和$\overline{\vartheta}_0$的测量值计算q 和j。类似的方程可以基于某些其他关于不同涡扩散系数之间关系的假设推导出来[见，例如Lettau, Davidson (1957)第7.3节]。然而，必须注意到，Q和$\overline{\vartheta}_1 - \overline{\vartheta}_0$只能得到误差非常大的测量。所以能量平衡方法的精度比例如涨落方法的精度低很多。

8.4 从气象学变量分布的数据确定湍动流量

上面我们给出了一些测量u_*、q和j的方法。然而，所有这些方法都相当复杂，并且需要特殊的设备，目前只在少数研究组织中有。同时，在地球表面大量的地点系统性确定湍动流量是有趣的。所以非常有用的是给出从更简单的测量（主要是从普通的气象学变量分布的测量）确定u_*、q 和j 的方法。分布测量通常被称为梯度测量，因为它们不同于在一个固定高度进行了标准气象学测量。在这些测量中，我们也确定了气象学变量的梯度。所以，从分布确定流量的方法通常被称为“用来解释梯度测量的方法”或者“确定流量-梯度关系的方法”。

这里我们不详述用分布表达通量的所有旧的推测性半经验公式，因为它们很少直接与最近的直接测量数据进行了比较，它们非常不可靠。相反，我们应该使用第7节中发展的大气表面层中湍流状态的相似性理论。根据这个理论，风速分布和温度分布（现在忽略湿度）是由含有参数u_*、q、z_0[平均速度$\overline{u}(z)$依赖于后一个参数]、$\overline{T}_0 = \overline{T}(z_0)$[$\overline{T}(z)$依赖于$\overline{T}_0$]、冯·卡门普适常数$\kappa$和两个普适函数$f(\zeta)$ 和$f_1(\zeta)$ 的一般公式（7.24）决定的。这里κ接近0.4，第7节和第8.1-8.2节给出了f和f_1的一些信息。目前，我们假设这些函数是精确已知的。在此情形，速度和温度的任意四次测量可以得出四个方程，原则上足以确定四个参数u_*、q、z_0和$\overline{T}_0$。也可以不太困难地减少所需测量的数量，例如可以根本不考虑$\overline{T}(z)$，而只考虑差$\overline{T}(z_1) - \overline{T}(z_2)$，它不依赖于$\overline{T}_0$。然而，这会由于这个事实而变复杂，目前仅近似知道$f$和$f_1$，没有给出任何简单的解析公式，不同研究者给出的数据互相矛盾，测量结果总是有一些误差。所以，在实际中，f和f_1必须使用近似表达式，使用不同的方法，不同的原始数据会导致某种程度上不同的结果。

8.1节中处理风和温度分布的Monin-Obukhov方法包括了用$\overline{u}(z)$和$\overline{T}(z)$值确定$\frac{u_*}{\kappa}$和L值（也使得我们可以得到q）。尽管这个方法基于使用后来受到诟病的“对数+线性”分布公式以及$\alpha \equiv 1$的假设，其精度被证明高于预期。通过比较这个方法得到的u_*和q值和直接测量结果展示了这一点。然而，现在不可能将这种方法的原始形式直接实用，因为它很粗糙和笨拙。在实践中，要从几次观测的结果用最小二乘法确定一些参数。

Takeuchi (1961)和Shiotani (1962)提出了精密相关的从风分布和速度分布测量确定u_*和q值的方法。这些方法也使用了普适函数的“对数+线性”近似，并且假设$K_T = K$。具体来说，Takeuchi给出了简化计算的实际建议，也比较了u_*和q的计算值和流量的直接测量的一些结果。然而，得到u_*和q的方法仍然复杂得难以验证。同时，它们只使用了$f(\zeta)$的一小部分信息。

很多研究这也讨论了根据分布测量确定湍动流量的方法，例如：Kazanskiy, Monin (1956, 1958, 1962)、Priestley (1959b)、Webb (1960, 1965)、Panofsky, Blackadar, McVehil (1960)、Monin (1962a)、Kondo (1962b)、Deacon, Webb (1962)、Panofsky (1963)、Klug (1963, 1967)、Dyer (1965, 1967)、Businger, Miyake et al. (1967)、Zilitinkevich, Chalikov (1968b)和Busch et al. (1968) 。

按照Kazanskiy和Monin的工作，这里给出了一个一般方法，以适当的形式表示了实际用于计算湍动流量的普适函数的数据。然而，首先要作一些一般性评论。

最初的问题是选择最合适的量来确定流量。原则上，三个任意高度上的风速值足以得到参数u_*、q和z_0。于是给人的印象是，使用温度观测是非常多余的。然而，如Priestley (1956b)所示，即使使用多于三个高度z处的风速$\overline{u}(z)$值，我们也不能可靠地确定q。这是因为这样得到的值非常不用于直接测量的数据，不同方法处理的结果也相当不同。所以，补充使用$\overline{T}(z)$似乎有实际的重要性。这个推论实际上也源自Panofsky, Blackadar, McVehil (1960)，他们用一种从三个高度处的$\overline{u}(z)$值（和z_0值）确定q的方法进行实验，但没有得到好的结果。然而，值得注意，Klug (1967)指出Swinbank (1964)直接流量测量数据和由六个高度的风观测计算的值符合得令人满意（使用了一种复杂的最小二乘法，基于Panofsky (1965) 提出的普适风函数$f(\zeta)$的形式）。

因为注意感兴趣u_*和q值，所以可以在一开始旧消去z_0，只考虑差值$\overline{u}(z_2)-\overline{u}(z_1)$，忽略$\overline{u}(z)$本身。然而，在此情形，容易看到，精确度会有很大损失，因为风速差的精度比风本身差，特别是如果高度z_1 和z_2相对接近的话。然而，可以证明，当消去了z_0，风速差中非常小的误差也会对u_*和q产生巨大影响。因为给定点和一年中给定时间的z_0只需确定一次（它不变），并且因为它难以得到，所以更方便的是首先得到z_0，然后一直使用这个值。[10] 同时，$\overline{T}_0=\overline{T}(z_0)$ 不是常量，因而可以消去。所以合理的是仅使用差值$\overline{T}(z_2)-\overline{T}(z_1)$形式的温度分布数据。于是确定$u_*$ 和q 只需要两次测量的数据。

于是，为了从$\overline{u}(z)$和$\overline{T}(z)$数据得到u_*和q，建议首先确定粗糙度参数z_0，然后从某些高度H 的风速U和两个不同高度（例如$2H$和$H/2$）的平均温度差δT出发。根据大气表面层中湍流状态的相似性假设，物理量$U=\overline{u}(H)$和$\delta T=\overline{T}(2H)-\overline{T}\left(\frac{H}{2}\right)$可以用$H$、$\frac{g}{T_0}$、$u_*$、$\frac{q}{c_p\rho_0}$和$z_0$表示。于是，$u_*$和$\frac{q}{c_p\rho_0}$以及依赖于它们的$L$反过来也可以用$H$、$\frac{g}{T_0}$、$U$、$\delta T$和$z_0$表示。由这五项，我们可以写出两个独立的无量纲组合，可以写为

$$B=\frac{\alpha gH}{T_0}\frac{\delta T}{U^2},\quad \zeta_0=\frac{z_0}{H}, \tag{8.127}$$

其中α是一个任意无量纲常数。我们随后更多地讲述关于α合适的选择。所以我们得到

$$\frac{u_*}{U}=F_1(B,\zeta_0),\quad \left|\frac{q/c_p\rho_0}{\alpha U\delta T}\right|=F_2(B,\zeta_0),\quad \frac{L}{H}=F_3(B,\zeta_0), \tag{8.128}$$

其中F_1、F_2、F_3是B的普适函数，也依赖于ζ_0。如果有这些函数的图，它们就可以用于从梯度测量数据确定u_*、q和L。$F_i, i=1,2,3$的图可以使用独立的U、δT、u_*和q的同时测量经验地画出，或者通过固定普适函数$f(\zeta)$和$f_1(\zeta)$的形式在理论上画出。第二种方法使得确定流量的精度相比我们关于普适函数的信息的精度逐步提高。所以，我们将更仔细地讨论这个方法。

作为我们的起点，我们取一般公式（7.24），用于确定普适函数$f(\zeta)$和$f_1(\zeta)$。于是方

[10]当然，有时非常难以确定z_0，例如在海洋大气中。所以，记住这一点，Zilitinkevich and Chalikov (1968b)给出了从$\delta u=\overline{u}(z)-\overline{u}(0.5)$和$\delta T=\overline{T}(2)-\overline{T}(0.5)$确定$u_*$和$q$的列线图，其中数字表示以米为单位的高度。

程（8.19）的第一个方程和方程（8.20）的第一个方程可以写为

$$B = \frac{\alpha}{F_3}\frac{f_1(2/F_3)-f_1(1/2F_3)}{[f(1/F_3)-f(\zeta_0/F_3)]^2},$$

$$F_1 = \frac{\kappa}{f(1/F_3)-f(\zeta_0/F_3)},$$

$$F_2 = \frac{\kappa^2}{\alpha[f(1/F_3)-f(\zeta_0/F_3)][f_1(2/F_3)-f_1(1/2F_3)]}, \tag{8.129}$$

第一个方程隐含地给出了$F_3(B,\zeta_0)$的形式。如果函数$f(\zeta)$和$f_1(\zeta)$已知，那么，例如，这个方程可以用图像求解F_3，方程（8.21）余下的两个方程参数化地给出$F_1(B,\zeta_0)$和$F_2(B,\zeta_0)$。

Kazanskiy, Monin (1962)和Zilitinkevich, Chalikov (1968b)假设风速分布和温度分布相似，即$f_1(\zeta) = \frac{1}{\alpha}f(\zeta)$，其中$\alpha = \frac{K_T}{K} =$ 常量。在这个假设下，方程（8.19）和（8.20）中的系数α也可以方便地取为等于K_T/K。于是方程（8.21）取更简单的形式

$$B = \frac{1}{F_3}\frac{f_1(2/F_3)-f_1(1/2F_3)}{[f(1/F_3)-f(\zeta_0/F_3)]^2},$$

$$F_1 = \frac{\kappa}{f(1/F_3)-f(\zeta_3/F_3)}, \qquad (8.21')$$

$$F_2 = \frac{\kappa^2}{[f(1/F_3)-f(\zeta_0/F_3)][f_1(2/F_3)-f_1(1/2F_3)]}.$$

实际上，在所引用的工作中使用了更特殊的假设，即$\alpha = 1$。然而，在B和F_2中保留系数α根本不改变计算方案。因此，假设一个特定的数值就没有什么特殊的用途了。也可以在下一级近似中假设α，在例如，中性、不稳定和稳定分层中不同。在这个假设下，也可以使用方程（8.21'）。

根据方程（8.21'），Kazanskiy, Monin (1962)和Zilitinkevich, Chalikov (1968b)基于两个关于普适函数$f(\zeta) = f_1(\zeta)$ 形式的假设画出了函数F_1、F_2和F_3的列线图。图72-74给出了Zilitinkevich-Chalikov的列线图，对应于满足方程（7.58）和（8.8）（使用Zilitinkevich, Clhalikov (1968a)建议的数值参数，和两个补充假设：$\kappa = 0.43$和$\alpha \equiv 1$）的函数$f(\zeta)$。Zilitinkevich和Chalikov使用在苏联、澳大利亚和美国的大量野外测量数据检查了这些列线图。相应的流量值和从其他关于$f(\zeta)$形式的假设得到的结果进行了比较[见Zilitinkevich, Chalikov (1968b)和Zilitinkevich (1970)]。

当然，F_2的列线图不仅可以用于确定湍动热流q，也能用于确定蒸发率j，只要除了U和δT，还测量了两个高度的比湿度差$\delta\vartheta = \overline{\vartheta}(2H) - \overline{\vartheta}\left(\frac{H}{2}\right)$。根据一般公式（7.24）和经验地发现的分布$\overline{T}(z)$和$\overline{\vartheta}(z)$的相似性，

$$\left|\frac{j/\rho_0}{\alpha_1 U\delta\vartheta}\right| = \left|\frac{q/c_p\rho_0}{\alpha U\delta T}\right| = F_2(B,\zeta_0), \tag{8.130}$$

其中$\alpha_1 = K_\vartheta/K (= \alpha$如果$K_\vartheta = K\tau)$。

借助方程（8.21'），不难得到函数（8.20）在近中性、非常不稳定和非常稳定分层情况下的形式。对于近中性分层，$|B|$很小，$|F_3|$很大，而在方程（8.21'）中我们可以假设$f(\zeta) \approx \ln|\zeta|$。于是方程（8.21'）变得简单得多，具有这种显式形式

$$F_1 \approx \frac{\kappa}{\ln(1/\zeta_0)}, \quad F_2 \approx \frac{\kappa^2}{\ln 4 \cdot \ln(1/\zeta_0)}, \quad F_3 \approx \frac{\ln 4}{\left(\ln\frac{1}{\zeta_0}\right)^2}\frac{1}{B}. \tag{8.131}$$

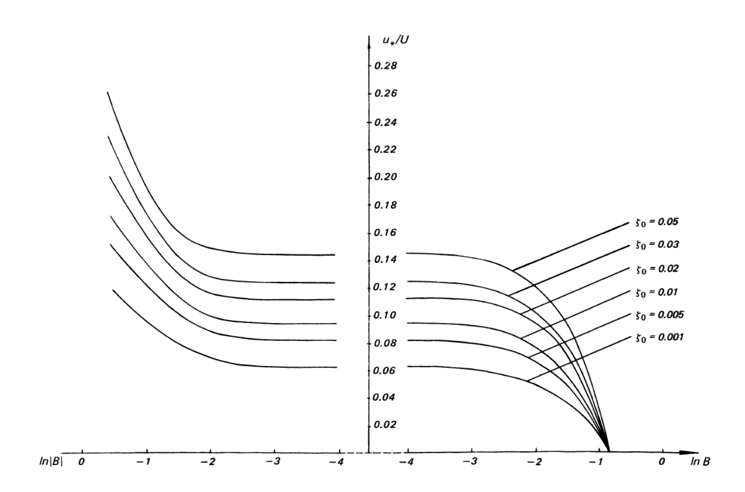


图 72 使用B和ζ确定无量纲摩擦速度$u_*/U = F_1$的列线图。

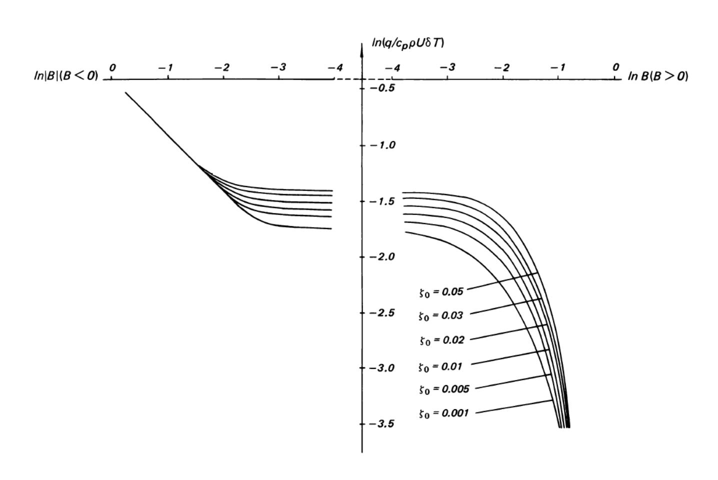


图 73 使用B和ζ确定无量纲热流F_2的列线图。

在极端不稳定情形，B大而且是负的，F_3是小的负数。函数（8.20）的渐近行为在这里通过在方程（8.21'）中引入$f(\zeta) \approx c_2 - C_2|\zeta|^{-1/3}$得到。于是我们得到

$$\begin{aligned} F_1 &\approx \frac{\kappa}{(2^{1/3}-2^{-1/3})^{1/4} C_2^{3/4}} \frac{|B|^{1/4}}{\left(\zeta_0^{-1/3}-1\right)^{1/2}}, \\ F_2 &\approx \frac{\kappa^2 |B|^{1/2}}{(2^{1/3}-2^{-1/3})^{3/2} C_2^{3/2}}, \\ F_3 &\approx -\frac{\left(2^{1/3}-2^{-1/3}\right)^{3/4}}{\left(\zeta_0^{-1/3}-1\right)^{3/2} C_2^{3/4}} |B|^{-3/4}. \end{aligned} \tag{8.132}$$

最后，对于强不稳定性，B是大的正数，F_3是小的正数。在此情形的函数（8.20）的渐渐行为可以通过在方程（8.22'）中引入$f(\zeta) \approx c_3 + C_3\zeta$确定。然后我们发现$B$不能无限增大，

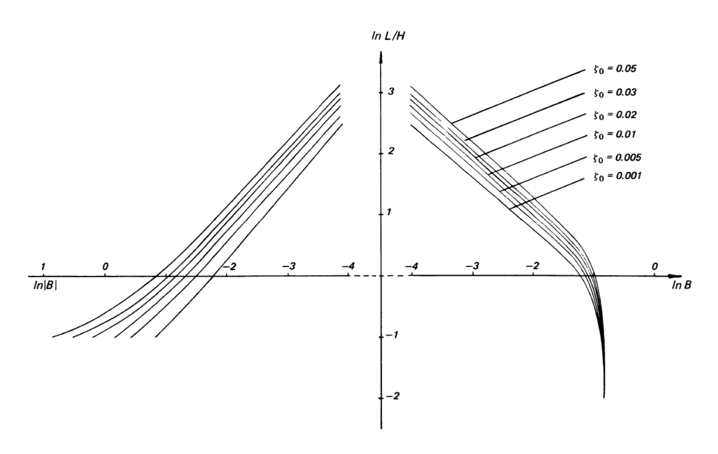


图 74 使用B和ζ确定$L/H = F_3$的列线图。

而是会在$F_3 \to 0$时趋于极限$\frac{3}{2C_3(1-\zeta_0)^2}$。所以对于稳定分层，$B$不可能超过$3/2C_3$。在$F_3$小的时候，对于$F_1$和$F_2$我们得到

$$F_1 \approx \frac{\kappa F_3}{C_3(1-\zeta_0)}, \quad F_2 \approx \frac{2\kappa^2 F_3^2}{3C_3^2(1-\zeta_0)}. \tag{8.133}$$

流量-梯度关系对于强不稳定性假设了一个特别简单的形式。在此情形，如果所有测量高度都超过$\zeta_1 L$，“1/3幂律”层的下边界（为此，$H/2 \geq \zeta_1 L$就足够了），那么为了解释测量结果，我们可以使用在自由对流的极限情形正确的公式。保证了这种可能性的判据$H/2 \geq \zeta_1 L$可以重写为$|F_3| \leq \frac{1}{2|\zeta_1|}$。使用$F_3$的公式（8.24），我们可以把这个判据写为

$$|B| \geq \frac{2\left(2^{2/3}-1\right)|\zeta_1|^{4/3}}{C_2\left(\zeta_0^{-1/3}-1\right)^2} \approx \frac{0.01}{\left(\zeta_0^{-1/3}-1\right)^2},$$

这里，如列线图公式中一样，假设了$C_2 \approx 1.25$和$|\zeta_1| \approx 0.03$。这个判据的数值大约从对应$\zeta_0 = 0.005$的0.0005变化到对应$\zeta_0 = 0.05$的0.004。所以这个不等式右边在这个ζ_0范围可以近似写为$0.1\zeta_0$。所提出的判据简化为这种形式

$$\left|\frac{\delta T}{U^2}\right| \geq \frac{3z_0}{H^2}, \tag{8.134}$$

其中z_0和H以米为单位测量，U以m/sec为单位，δT以°C为单位。

如果满足判据（8.26），那么对于$z \geq H/2$，我们有自由对流状态的一个判据，其中

$$q = \left(\frac{2\alpha_{-\infty}}{C_2}\right)^{3/2} c_p \rho_0 \kappa^2 \left(\frac{g}{T_0}\right)^{1/2} \left|\frac{\partial \overline{T}}{\partial z}\right|^{3/2} z^2 \tag{8.135}$$

[见方程（7.36）和（7.39）]。由此容易证明这里

$$q = c_p \rho_0 \kappa^2 \left[\frac{\alpha_{-\infty}}{C_2\left(2^{1/3}-2^{-1/3}\right)}\right]^{3/2} \left(\frac{g}{T_0}\right)^{1/2} H^{1/2} |\delta T|^{3/2} \tag{8.136}$$

也可以从方程（8.20）和（8.24）得到。把这个q值带入高度$z = H$处涡黏滞系数$K =$

$\alpha_{-\infty}^{-1}K_T$的方程（7.38），我们得到

$$K(H)=\frac{3\kappa^2}{C_2}\left[\frac{\alpha_{-\infty}}{C_2\left(2^{1/3}-2^{-1/3}\right)}\right]^{1/2}\left(\frac{g}{T_0}\right)^{1/2}H^{3/2}|\delta T|^{1/2}. \tag{8.137}$$

q和$K(H)$与$H^{1/2}|\delta T|^{3/2}$和$H^{3/2}|\delta T|^{1/2}$分别相差普适但不是无量纲的系数。取H的单位为米，δT的单位为度，q的单位为cal/cm^2 min，$K(H)$的单位为m^2/sec，并且使用Zilitinkevich, Chalikov (1968a, b)建议的$\kappa\approx0.43,\alpha_{-\infty}\approx1,C_2\approx1.25$和$T_0\approx300$K，我们得到近似方程

$$q\approx0.17H^{1/2}|\delta T|^{3/2},\quad K(H)=0.12H^{3/2}|\delta T|^{1/2}. \tag{8.138}$$

这些公式使得在不稳定分层情形，q和$K(H)$可以很快地从温度差得到。然而，最后一个方程的数值系数目前不完全可靠。这是因为各组数据之间存在无法解释的差异，例如，根据Dyer (1967)，方程（8.30）的第一个方程具有$q\approx0.26H^{1/2}|\delta T|^{3/2}$的形式。

8.5 大气表面层中风速和温度涨落的特征

湍动动量流和热量流只是风速和温度涨落统计特征的特殊情形。这些涨落的很多其他特征已经在7.5节中从相似性理论的观点分析过了。它们都可以借助确定u_*和q的涨落方法所用到同样的装置，从实验中得到。如果存在u_*和q以及涨落的任意统计特征同时测量的数据，或者如果我们有这个统计特征的测量数据，用8.4节描述的方法估计u_*和q，那么可以验证和这个特征有关的相似性理论的推论，并且可以经验地写出相应的$\zeta=\frac{z}{L}$的普适函数。所以原则上涨落测量的数据使得我们可以确定7.5节引入的所有函数$f_3,...,f_{11}$、φ_ε和φ_N。

大气表面层中湍流涨落矩量的数据可以在Swinbank (1955)、Deacon (1955)、Perepelkina (1957, 1962)、Lettau, Davidson (1957)、Barad (1958)、Gurvich (1960)、Tsvang (1960)、Panofsky, McCormick (1960)、Monin (1962b)、Zubkovskiy (1962, 1967)、Lumley, Panofsky (1964)、Klug (1965)、Panofsky, Prasad (1965)、Mordukhovich, Tsvang (1966)、Panofsky, Busch et al. (1967)、Cramer (1967)和很多其他工作中找到。不幸的是，所有这些数据仍然非常不精确，弥散很大，互相符合得不太好。此外，它们远远不是完备的。弥散和数据间不相符可以有这个事实解释，在所有情形，在确定湍动流量（它们有相当大的变化，在垂向和水平方向都是如此[参见，例如，Mordukhovich, Tsvang (1966)和Businger, Miyake et al. (1967)]）时都有相当大的误差，甚至在相对非常均匀的表面上也是如此。然而，许多测量是在明显不均匀的地形上进行的。在每个情形，已有的数据都只能得到某些关于涨落统计性质的初步结论。然而，重要的是，在所有情形，这些结论符合得相当好，给出了相似性理论的预言，以及某些普适函数确定的一般形式。

速度涨落σ_u/u_*、σ_v/u_*和σ_w/u_*的无量纲标准差对热分层（也就是对普

适函数f_3、f_4和f_5）依赖的数据在Swinbank (1955)、Deacon (1955)、Gurvich (1960)、Panofsky, McCormick (1960)和上面提到的1960年后的工作中给出。例如，图75展示了Cramer (1967)在马萨诸塞州圆山（Round Hill）在16米（圆）和40米（三角）的观测对于1.2分钟平均得到的函数$f_3(\zeta)$、$f_4(\zeta)$和$f_5(\zeta)$。这种相对短的平均时间对于消除低频涨落可能是有利的，这些涨落依赖于地形的大尺度特征，不符合相似性理论。对σ_u/u_*、σ_v/u_*和σ_w/u_*的其他数据的综述可以在Panofsky, Prasad (1965)和Panofsky, Busch et al. (1967)中找到。图75a中函数$f_3(\zeta)$的图显示几乎不依赖于稳定性参数ζ，尽管σ_u/u_*会随不稳定性增强而增大。σ_u/u_*沿两半轴随ζ的减小而略微单调增大的更明确迹象可以在Panofsky, Busch等人给出的图中看到。对应于中性分层的σ_u/u_*和σ_v/u_*值的$f_3(0)$和$f_4(0)$可以从大气观测以相对低的精度确定，但是它们一般和从实验室流动中对数层中测量得到的估计值$\sigma_u/u_* = A_1 \approx 2.3$和$\sigma_v/u_* = A_2 \approx 1.7$ 符合得很好[见5.3节末]。相似性理论对“自由对流状态”或对大的负ζ值预测的关系式$f_3(\zeta) = f_4(\zeta) \sim |\zeta|^{1/3}$既没有被已有数据证实，也没有被否定。

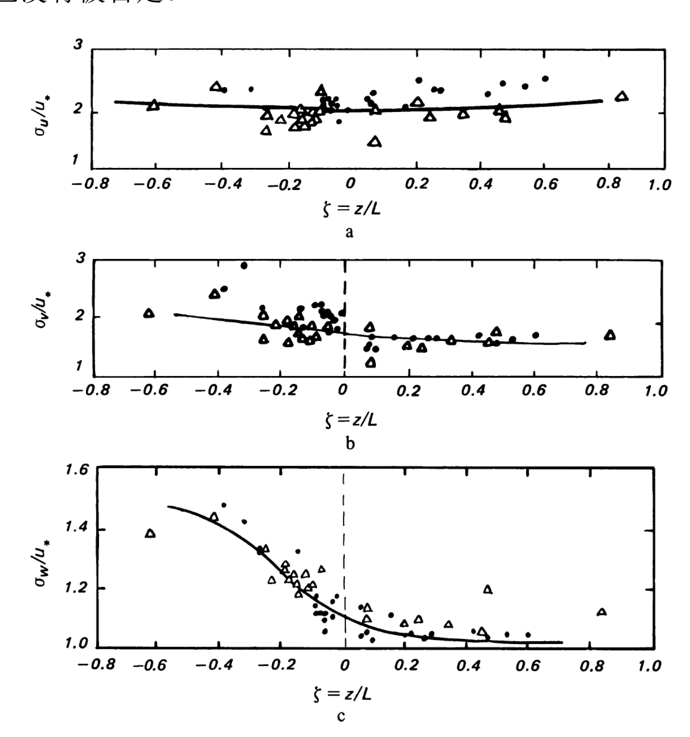


图 75 H. E. Cramer (1967)关于普适函数的数据：a-$\sigma_u/u_* = f_3(\zeta)$；b-$\sigma_v/u_* = f_4(\zeta)$；c-$\sigma_w/u_* = f_5(\zeta)$。

因为大尺度特征毫无疑问是不重要的，$f_5(\zeta)$的数据更多，也比$f_3(\zeta)$和$f_4(\zeta)$的数据更可靠。除了Cramer的图（图75c），我们这里也给出了Panofsky,

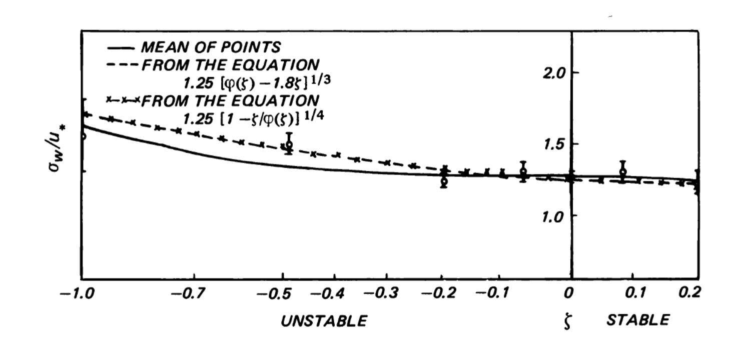


图 75 很多来源作为ζ函数的比例σ_w/u_*。线段代表了平均值的标准差，假设所有观测彼此不依赖。

Busch et al. (1967)的总结图（图C），其中收集了来自很多地点的观测。图C中也画出了（7.96）和（7.95）形式的方程$f_5(\zeta) = 1.25[\varphi(\zeta) - 1.8\zeta]^{1/3}$和$f_5(\zeta) = 1.25[1 - \zeta\varphi(\zeta)]^{1/4}$（$\varphi(\zeta)$去问Panofsky, Busch等人所建议的）。结果表明，它们在图C中整个ζ值范围几乎不可区分，和数据符合得非常好。根据在大气表面层中的观测得到的$f_5(0)$精确值的问题引起了相当多的讨论。Gurvich (1960)相对古老的在俄罗斯的观测数据[]给出估计值$f_5(0) = A_3 \approx 0.7 - 0.8$，比5.3节的实验室估计值$A_3 \approx 0.9$略低，但和Cermak, Sandborn et al. (1966)和Cermak, Chuang (1967)在美国科罗拉多州立大学一个气象风洞中的测量符合得非常好。然而，大部分其他研究者[例如Panofsky, McCormick (1960)、Pasquill (1962a)、Panofsky, Prasad (1965)、Kaimal, Izumi (1965)、Mordukhovich, Tsvang (1966)、Businger, Miyake et al. (1967)和Cramer (1967)]得到的结论是，$f_5(0)$实际上略大于1。这些来自大气观测的$f_5(0) = A_3$的估计的平均值处于1.2到1.3之间（总结图C中使用了1.25）。尽管这个值比实验室估计值大，但是差异不大。根据理论预言（7.87），在大的负ζ处，$f_5(\zeta) \approx C_5|\zeta|^{1/3}$，即$\sigma_w \approx C_5'(qgz/c_p\rho_0 T_0)^{1/3}$，和数据符合得相当好。这也被Myrup (1967)用飞跃加利福尼亚的沙漠湖床的装了仪器的飞机在7.5 m到93 m进行的特殊测量所证实。他的结果表明，方程$\sigma_w = cz^{1/3}$以相当高的精度在强对流情形成立。Perepelkina (1962)基于方程（7.87）对$\mathrm{Ri} < -0.04$成立的假设，由Gurvich在齐姆良斯克附近的草原进行的涨落测量估计了系数C_5' 和$C_5' = C_5'\kappa^{-1/3}$的值。Perepelkina发现$C_5' \approx 1.4$，即$C_5 \approx 1.9$。然而，记住Gurvich关于σ_w的数据可能被低估了，毫不奇怪Perepelkina基于Swinbank (1955)的老数据和非常粗略的测量得到了较大的估计值$C_5' \approx 1.8$或$C_5 \approx 2.4$。对Mordukhovich, Tsvang (1966)原始数据的处理给出了略微更大的估计值：$C_5' \approx 2.1$，$C_5 \approx 2.8$，如果使用了所有$\mathrm{Ri} < -0.04$的值。

然而，对Ri < -0.3的Mordukhovich-Tsvang测量的类似处理得到更小的估计值：$C_5' \approx 1.6$，$C_5 \approx 2.2$。

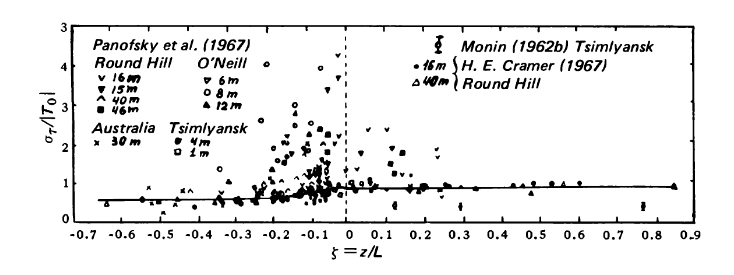


图 76 普适函数$\sigma_T/|T_*| = f_6(\zeta)$的数据。

图76给出了各个来源的$\sigma_T/|T_*| = f_6(\zeta)$数据。尽管弥散相当大（特别是近中性条件，那时$\sigma_T/|T_*|$变成不定的，因为分子和分母都变得非常小），但还是由可能基于最可靠的测量画出一条光滑的平均曲线。根据这条曲线，函数$f_6(\zeta)$对于近中性分层取非常接近1的值（当然很明显，$f_6(0)$只能定义为从正值或负值$\zeta \to 0$时$f_6(\zeta)$ 的极限），这个值在稳定条件下几乎不变，随着不稳定性增长而减小，取小于1的值。Priestley (1960b)根据澳大利亚的测量、在美国内布拉斯加奥尼尔的测量数据以及Myrup (1967)根据沙漠干湖床上方特别不稳定条件下的测量特别研究了极限的“1/3 幂律”（7.87）的正确性问题。Priestley和Myrup都发现，已有的数据很好地证实了预言的关系$\sigma_T = cz^{-1/3}$。然而，图76中数据点的巨大弥散表明额外的仔细研究会非常有用。Priestley也尝试从观测估计了数值系数C_6'和$C_6 = C_6'\kappa^{4/3}$的值。根据他非常粗略的估计，$C_6 \approx 0.4$，即$C_6' \approx 1.3 - 1.4$。后来，Perepelkina (1962)使用Tsvang1958-1959年在齐姆良斯克对温度涨落的测量数据以及来自Priestley的独立数据得到了相当接近的估计值$C_6' \approx 1.1$，即$C_6 \approx 0.3 - 0.35$。最后，Mordukhovich, Tsvang (1966)由1964年在齐姆良斯克在1 m和4 m高度的大量测量计算了常数C_6' （按他们的符号是C_2），也发现$C_6' \approx 1.0 - 1.1$，也就是说$C_6 \approx 0.3$。Perepelkina (1962)改进了Swinbank (1955) 较老的测量数据。他们得到结论，$C_6' \approx 1.2$，$C_6 \approx 0.35$。

Swinbank (1955)、Mordukhovich, Tsvang (1966)和Zubkovskiy, Tsvang (1966)研究了相关系数$r_{uw} = -1/f_3 f_5$和$r_{wT} = \pm\kappa|f_5 f_6|$对稳定性的依赖。已有数据表明，大气表面层中两个相关系数r_{uw}和r_{wT}的典型绝对值在0.3-0.5范围。此外，r_{wT}随不稳定性增强而显著增大，从近中性条件的大约0.35，增长到Ri在-0.3到-0.8范围时的大约0.6。另一方面，r_{uw}近似不依赖于稳定性，对于中性和适度不稳定条件都接近0.4。

大气表面层中水平热流$q_h = c_p\rho_0 u'T'$的测量得到了有趣的结果。第一个这种测量是Shiotani (1955)进行的，他发表了q_h值的三个测量结果，平均时间为1 min。所有三个情形得到的q_h值都比同时的垂向热流q大。然而，这些结果被几乎所有科学家忘记或忽视了，在很多年间，大部分研究者假设，甚至明确写出，水平热流q_h一定等于零或者至少非常小。然而，Zubkovskiy, Tsvang (1966)和Zubkovskiy (1967)的直接测量数据[见图D]表明，比值$-q_h/q = \kappa f_7(\zeta)$对于近中性条件接近于3，随稳定性增强而增大。随不稳定性增强，这个比值下降，但不是很快，在$\mathrm{Ri} \approx -0.8$取值接近1.5。这些数据也和在英国的一个湖面上方（在P. A. Sheppard的指导下（工作未发表））进行的类似测量一致。对于近中性条件，相关系数$r_{uT} = \overline{u'T'}/\sigma_u\sigma_T$的绝对值接近系数$r_{wT}(\approx 0.35)$的绝对值，在逆温条件下甚至超过$|r_{wT}|$。然而，随不稳定性增强，$|r_{wT}|$增大，$|r_{uT}|$减小，根据Zubkovskiy和Tsvang 的数据，在$\mathrm{Ri} = -0.7$时，$r_{wT} \approx 0.6$，$r_{uT} \approx -0.2$。7.5节的理论推导也表明当$\mathrm{Ri} \to -\infty$，$\overline{u'T'} \to 0$和$r_{uT} \to 0$。当然，必须记住，将水平湍动热流q_h和水平平移热流$c_p\rho_0\overline{u}\overline{T}$比较而不和垂向热流$q$比较是自然的。和平移热流相比，热流$q_h$通常非常小，经常可以忽略。然而，有一些问题明确需要适当考虑热流q_h[Monin (1965)的半经验方法是一个例子，也参见Yaglom (1969)]。此外，q_h不为零暗示了涡扩散张量形式的重要结果，这将在10.3节和10.5节中考虑。

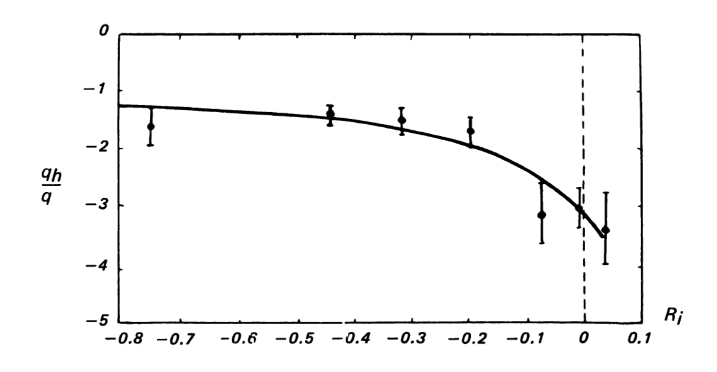


图 76 q_h/q对Ri的依赖关系，根据Zubkovskiy, Tsvang (1965)的数据。

大气表面层中湍流涨落高阶矩的数据太少，显然不足以绘制任何相应普适函数的图。然而，所有已有数据和7.5节的定性预言一致。所以，根据Deacon (1955)，垂向速度斜度$\overline{w'^3}/\sigma_w^2$的值对于不稳定分层处于0.24和0.81之间，也就是说，和7.5节预言的一样，是大的正数。此外，这些值随不稳定性的增强而显著增大。类似地，Gurvich (1960)得到了一个0.4-0.6量级的夏日正午草原上方1 m和4 m高度的$\overline{w'^3}/\sigma_w^2$估计值。最

终，Pries, Appleby (1967)和Holland (1968)对在美国马萨诸塞州圆山相对不均匀的表面上方的一系列观测分析了w 以及u、v和T的斜度。他们也发现，w'在不稳定条件有正的斜度，随不稳定性参数$-\zeta = z/|L|$增大。温度斜度$\overline{T'^3}/\sigma_T^3$值的数据更少，但Pries和Appleby，以及Holland的数据表明，这些值在不稳定和稳定条件下都是正的，也和Perepelkina (1957)的不稳定情形的非常初步的结果相符。Pries, Appleby (1967)和Holland (1968)分析了水平速度分量u和v的斜度数据以及平坦因子δ（即四阶矩和方差平方的比值）的数据，或者同样的，大气表面层中涨落u'、v'、w'和T'的超出$\delta-3$的系数的数据（基于在圆山的观测）。然而，所有这些结果都是非常初步的，这里不讨论。

由相关系数r_{uw}、r_{uT}和r_{wT}对ζ的依赖，我们可以得出结论，归一化涨落u'/σ_u、v'/σ_v、w'/σ_w和T'/σ_T的多维概率密度随分层状态的变化而变化，具体来说，相应概率分布的形式不是普适的。甚至w'/σ_w和T'/σ_T的一维分布也不是普适的，基本上是非高斯的。此外，u'/σ_u和v'/σ_v的概率分布一般不是严格高斯的，但在很多情形接近高斯分布。一些大气表面层中湍流涨落的一维概率分布数据在Pries, Appleby (1967) 和Holland (1968)中给出。Holland (1967, 1968)也发展了一种特别的计算技术来计算u'、v'、w'和T'四维分布的大量不同统计特征，以及几个数字滤波器相应的滤波后的变量。其中包括很多对变量的二维联合概率密度函数、联合矩量和在一对其他变量固定值时不同变量的条件平均值。然而，在分层流体中湍流一般相似性理论的框架下分析所有这些结果的希望还很渺茫。

有一些方法确定变量$\overline{\varepsilon}$和$\overline{N}$的值，但它们将在本书第2卷第8章中讨论。然而，现在，几乎没有大气表面层中$\overline{N}$值和相应的普适函数$\varphi_N(\zeta)$的数据。有大量表面层中$\overline{\varepsilon}$和普适函数$\varphi_\varepsilon(\zeta)$的数据[例如R. J. Taylor (1952)、Takeuchi (1962)、Panofsky (1962)、Lumley, Panofsky (1964)、Hess, Panofsky (1966)、Record, Cramer (1966)、Zubkovskiy (1967)、Myrup (1967)、Panofsky, Busch et al. (1967)、Busch, Panofsky (1968)、and Fichtl (1968)]。然而，所有$\varphi_\epsilon(\zeta)$的经验估计都显示出巨大的弥散。此外，一些最广泛的测量时在不足够均匀的地点（布鲁克海文、圆山和肯尼迪角）和相对高的高度进行的。所以，所有验证湍流能量平衡方程（7.102）的尝试目前都是不确定的，得出互相矛盾的结果。我们也必须记住，所有已有的湍流能量扩散以及相应普适函数$f_{10}(\zeta)$和$\zeta f'_{10}(\zeta)$的直接测量[Record, Cramer (1966)、Myrup (1967)、Panofsky et al. (1967)]是极端粗糙的，没有包含压强项（通常假设很小，但没有证明），弥散极大，几乎不可能使用。不同作者以及建议（和倡导）了平衡方程（7.102）的两个主要的简化假设：1)能量耗散率$\overline{\varepsilon}$和极限能产生率$-\overline{u'v'}(\partial\overline{u}/\partial z)$近似平衡的假设，例如，近似

关系$\varphi_\varepsilon(\zeta) = \varphi(\zeta) = \zeta f'(\zeta)$，这表明对于非中性条件，湍流能量扩散在绝对值上近似等于浮力能量产生率或吸收率$\overline{w'T'}(g/T_0)$，但符号相反，故而$\zeta + (\kappa/2)\zeta f'_{10}(\zeta) \approx 0$[[Lumley, Panofsky (1964)、Hess, Panofsky (1966)、Record, Cramer (1966)、Fichtl (1968)]；2)假设能量扩散项小得可以忽略，以及（7.103）形式的近似方程$\varphi_\varepsilon(\zeta) \approx \varphi(\zeta) - \zeta$成立[Takeuchi (1962)、Panofsky, Busch et al. (1967)、Busch, Panofsky (1968)]。这两个想法之间的矛盾还没有得到满意的解释。同样值得注意的是，Myrup (1967)发现一些初步迹象，在极端强对流中，机械能产生不起重要作用，方程（7.102）中$\zeta f'(\zeta)$项可以忽略，能量扩散是重要的，不能忽略（也就是说，这里的方程（7.103）是不对的，$\sigma \neq 1$）。然而，这个结果也需要进一步证实。

第5章 湍流中的粒子分散

9. 湍流的拉格朗日描述

9.1 不可压缩黏滞流体的拉格朗日动力学方程

在前面的章节中通篇使用了流体运动的欧拉描述。在这种描述中，不可压缩流体的运动（本章中我们限于讨论这种情况）由时间t 的速度场$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}$,t)表征，也就是所有可能的空间点的速度矢量$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)$。这里，由于下面将要阐明的原因，通常把坐标写为$X_i$而不是前面章节的$x_i$是方便的。在此情形，动力学方程（其中压强可以借助方程（1.9）消去）至少原则上可以确定用给定的初始值$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t_0) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{X})$表示的欧拉变量$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$在任意时刻$t > t_0$的值。然而，用欧拉变量去研究这种湍流输运现象（即湍流中外加物的扩散，或由固定流体元组成的湍流中物质表面和流线的变形）是不方便的。更方便的是使用流动的拉格朗日描述，追踪固定的“流体粒子”从某个初始时刻$t = t_0$开始的运动，而不是固定空间点$\boldsymbol{X}$的流体速度。对于流体粒子，我们指的是一团线尺度和分子间平均距离相比非常大的流体。所以，对于这样一团流体，合理的是谈它们的速度，仍然保存在连续介质力学的框架中。然而，这个小尺度很小，这一团中的速度和压强可以认为实际上是常量，在所讨论的时间内，这些流体团可以认为是“整体”运动的，也就是说，没有可观测变形。换句话说，“流体粒子”是流体中可以辨认的“点”，根据流体力学方程在空间中运动。拉格朗日描述最直接地和单个流体元（总和产生了流体流动）的运动相联系。所以，它在物理上比欧拉描述更自然。同时，使用拉格朗日变量（是关于单个流体粒子的）比使用欧拉变量$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$进行分析要复杂得多。于是，拉格朗日形式的流体动力学方程对于具体计算很少使用。尽管对于理想非粘性流体，这些方程在某些著名的教科书中给出[见，例如Lamb (1932)]，但对于黏性流体，相应的方程现在是相对未知的。使得这些方程可以写为相对紧凑形式的推导最近才首次被Gerber (1949) 报道[也参见Monin (1962c)]。尽管在湍流理论中使用黏滞拉格朗日方程仍然是未来的

工作[参见Lyubimov (1969)]，但我们现在在这里推导这些方程，同时引入一些本章后面经常使用的概念和符号。

不可压缩流体流动的完整拉格朗日特征量是函数$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$，它给出了任意时间$t$，所有可能的由某个参数$\boldsymbol{x}$标记的“流体粒子”的坐标$\boldsymbol{X}$。原则上，流体理想方程使得$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$可以在任意$t>t_0$用给定的“流体粒子”速度$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)=\frac{\partial \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}$初始值给出，也就是说，用

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t_0)=\left[\frac{\partial \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}$$

值给出。朗格朗日特征量和欧拉特征量之间的关系由这个表达式给出：

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=\boldsymbol{u}[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t),t]. \tag{9.1}$$

从欧拉动力学方程到拉格朗日方程的变换包括把自变量$(\boldsymbol{x},t)$换为$(\boldsymbol{X},t)$，以及把未知函数$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)$换为$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$，它和$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)$通过方程（9.1）相联系。

此外，在本节中，我们将总是使用流体粒子的拉格朗日参数$\boldsymbol{x}$，它们空间坐标$\boldsymbol{X}$在$t=t_0$时刻的初始值。也就是说，我们假设

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t_0). \tag{9.2}$$

在此情形，两个变量的函数$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$描述了一族“流体粒子”的轨迹，这些粒子在初始时刻$t=t_0$在流体所占据的空间中所有可能的点$\boldsymbol{x}$。所以在任意$t>t_0$时刻，对应于所有可能$\boldsymbol{x}$值的点$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$连续填充了流体占据的整个空间。所以，拉格朗日描述包括为流体流动指定一组轨迹，用$\boldsymbol{x}$区分彼此，时间t在每条轨迹中起到了参数的作用。根据上面所述，对应于这些轨迹的“流体粒子”实际上是跟随流体的数学点。

现在让我们推导拉格朗日动力学方程。我们将使用矢量$\boldsymbol{X}$和$\boldsymbol{x}$的笛卡尔分量，分别写为(X_1,X_2,X_3)和(x_1,x_2,x_3)。如上所述，从欧拉动力学方程变换到拉格朗日方程包括首先用(x_1,x_2,x_3,t)替换自变量(X_1,X_2,X_3,t)。在进行这种变量替换时，我们强调从笛卡尔坐标变换为跟随流体运动的非稳态曲线坐标和非正交坐标。实际上，在所有时刻，每个坐标面$x_i=$常量由同样的“流体粒子”组成。最初这些面是平面，但随时间流逝，它们由于流体混合而变形。

此外，对于变量(x_1,x_2,x_3)，我们使用雅可比行列式的简写形式

$$\frac{\partial(A,B,C)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}=[A,B,C] \tag{9.3}$$

无需进一步说明，$[A,B,C]$在变量A,B,C的偶数次交换下不变，在奇数次交换下改变符号。

在从欧拉坐标X_α到拉格朗日坐标x_β的变换中，矩阵

$$M = \left|\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta}\right|, \qquad \mathrm{det}M = |M| = [X_1, X_2, X_3] \tag{9.4}$$

起到了重要作用。根据方程（9.2），在初始时刻$\frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta} = \delta_{\alpha\beta}$，也就是说，矩阵$M$是单位矩阵，$|M| = 1$。变量$\frac{\partial x_\alpha}{\partial X_\beta}$是逆矩阵$M^{-1}$的元素，或者矩阵$M$中元素$\frac{\partial X_\beta}{\partial x_\alpha}$的余子式除以$|M|$。于是，我们得到下面的计算对欧拉坐标$X_i$求导的公式：

$$\frac{\partial f}{\partial X_i} = \frac{1}{|M|}[X_j, X_k, f]. \tag{9.5}$$

这里以及往后，对于(i,j,k)，我们指的是指标$(1,2,3)$的偶交换。把左边写为$\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\alpha}{\partial X_i}$，容易证明公式（9.5）是对的，其中重复指标$\alpha$和往常一样表示求和。公式右边通过行列式对$f$列元素的展开得到同样的表达式。

由方程（9.1）和（9.5）得到下面速度散度的表达式：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial X_\alpha} = \frac{\partial}{\partial X_\alpha}\frac{\partial X_\alpha}{\partial t} =$$
$$\frac{1}{|M|}\left\{\left[\frac{\partial X_1}{\partial t}, X_2, X_3\right] + \left[X_1, \frac{\partial X_2}{\partial t}, X_3\right] + \left[X_1, X_2, \frac{\partial X_3}{\partial t}\right]\right\} = \frac{1}{|M|}\frac{\partial |M|}{\partial t}$$

其中u_α是速度场的笛卡尔分量。对于不可压缩流体，速度散度严格等于零。所以$\frac{\partial |M|}{\partial t} \equiv 0$，于是$|M|$不随时间变化。因为在初始时刻$|M| = 1$，这个方程在任意时刻仍然成立。回忆$|M|$的表达式（9.4），我们有

$$[X_1, X_2, X_3] = 1. \tag{9.6}$$

这个方程也是（黏滞的或理想的）不可压缩流体的连续性方程的拉格朗日形式。

此外，我们将使用方程（9.5），在其右边设$|M| = 1$。使用两次这个公式，我们得到对欧拉左边X_α的拉普拉斯算符的表达式：

$$\nabla_X^2 f = \frac{\partial}{\partial X_\alpha}\frac{\partial f}{\partial X_\alpha} =$$
$$[X_2, X_3, [X_2, X_3, f]] + [X_3, X_1, [X_3, X_1, f]] + [X_1, X_2, [X_1, X_2, f]]. \tag{9.7}$$

现在我们容易得到纳维-斯托克斯方程

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial X_i} + \nu \nabla_X^2 u_i \tag{9.8}$$

的拉格朗日形式。使用方程（9.1）、（9.5）和（9.7）我们得到

$$\frac{\partial^2 X_i}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho}[X_j, X_k, p] + \nu \left\{ \left[X_2, X_3, \left[X_2, X_3, \frac{\partial X_i}{\partial t}\right]\right] + \left[X_3, X_1, \left[X_3, X_1, \frac{\partial X_i}{\partial t}\right]\right] + \left[X_1, X_2, \left[X_1, \right.\right.\right. \tag{9.9}$$

未知量$X_i(\boldsymbol{x}, t), i = 1, 2, 3$和$p(\boldsymbol{x}, t)$的方程（9.6）和（9.9）构成了不可压缩黏滞流体完整的拉格朗日动力学方程组。

存在与运动方程中非线性项对应的力。这些力描述了一个力学系统各个分量之间的相互作用。所以，在纳维-斯托克斯方程（9.8）中，加速度$\frac{du_i}{dt}$的表达式中出现了变量u_i的二次非线性项。这代表了速度场$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$空间不均匀性之间的惯性相互作用，其中压强梯度可以借助方程（1.9'）表示。（让我们强调，黏滞力在方程（9.8）中由一个线性表达式描述。）然而，初始相互作用是相对的，它们在变换到附着在粒子上的参考系中被消除了。在拉格朗日运动方程（9.9）中，变量X_i的非线性表达式仅描述了流体粒子之间真实的相互作用力，也就是说压强和黏滞力。黏滞相互作用这里由变量X_i的五阶非线性项描述。运动方程中非线性项和线性项的典型值之比可以称为相互作用常量。所以对于纳维-斯托克斯方程（9.8），惯性相互作用常量是惯性力和黏滞力典型值之比，也就是雷诺数，Re。对于足够大的Re（充分发展的湍流的特征），惯性相互作用非常强。在拉格朗日描述中，黏滞相互作用常量是黏滞力典型值和典型加速度之比，例如，1/Re。对于大的Re，黏滞相互作用非常弱。

现在让我们写出二维平面平行流动的拉格朗日动力学方程。令流体运动仅发生在平面$x_3 =$ 常量中，故而$X_3 \equiv x_3$，其中X_1和X_2不依赖于x_3。然后使用下面对(x_1, x_2)的雅可比行列式：

$$\frac{\partial(A, B)}{\partial(x_1, x_2)} = [A, B], \tag{9.10}$$

方程（9.6）和（9.9）容易简化为

$$\begin{aligned}
&[X_1, X_2] = 1, \\
&\frac{\partial^2 X_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho}[p, X_2] + \nu \left\{ \left[X_1, \left[X_1, \frac{\partial X_1}{\partial t}\right]\right] + \left[X_2, \left[X_2, \frac{\partial X_1}{\partial t}\right]\right] \right\} \\
&\frac{\partial^2 X_2}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho}[X_1, p] + \nu \left\{ \left[X_1, \left[X_1, \frac{\partial X_2}{\partial t}\right]\right] + \left[X_2, \left[X_2, \frac{\partial X_2}{\partial t}\right]\right] \right\}
\end{aligned}$$

(9.11)

这里黏滞力由变量X_i的三阶非线性表达式描述。

在结束本小节时，让我们注意到，除了使用表达式（9.1），存在另一种方法把流体流动的拉个朗日描述和欧拉描述联系起来。这是通过研究“流体粒子”的任意守恒特征量来实现的，也就是，对于固定流体粒子，在其运动过程中不变的特征量。在拉格朗日描述中，每个这种特征量都可以写为$\Psi(\boldsymbol{x})$的形式，因为对于固定的$\boldsymbol{x}$它不依赖于时间t。然而，在欧拉描述中，这样一个特征量在固定空间点$\boldsymbol{X}$的值ψ可能随时间t变化，也就是$\psi = \psi(\boldsymbol{X}, t)$。拉格朗日描述和欧拉描述之间的关系由这个表达式给出：

$$\Psi(\boldsymbol{x}) = \psi[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t), t]. \tag{9.12}$$

因为$\frac{\partial \Psi(\boldsymbol{x})}{\partial t} = 0$，所以右边对时间的全微分必须也等于零，也就是

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial X_\alpha}\frac{\partial X_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \psi}{\partial X_\alpha} = 0,$$

其中我们使用了方程（9.1）。再使用不可压缩流体的连续性方程$\frac{\partial u_\alpha}{\partial X_\alpha}$，我们得到

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial u_\alpha \psi}{\partial X_\alpha} = 0. \tag{9.13}$$

这个方程是表达式（9.12）的微分版本的类比。所以，流体粒子任意守恒特征量的欧拉场满足*平移方程*（advection equation）（9.13）。

于是，守恒特征量$\Psi(\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$仅对一个流体粒子（也就是对于初始坐标$\boldsymbol{x}_0$）不等于0，而等于无穷大，对应于欧拉场

$$\psi(\boldsymbol{X}, t) = \delta[\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_0, t)], \tag{9.14}$$

这是平移方程（9.13）对初始条件

$$\psi(\boldsymbol{X}, t_0) = \delta(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{x}_0). \tag{9.15}$$

的解。

“守恒特征量”的一般概念当然代表了一种数学上的理想化情形。为了能够真正追踪流体粒子的运动，必须对其进行“标记”，也就是它必须有某些性质区别于周围的介质。这种标记最简单的实现是添加某种独特的由流体运动输运又不影响流动的被动外加物。在这种情形，外加物浓度$\vartheta(\boldsymbol{X}, t)$表现为欧拉守恒特征量$\psi(\boldsymbol{X}, t)$。然而，真实的浓度场也受到分子

扩散影响，于是，它满足扩散方程

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial u_\alpha \vartheta}{\partial X_\alpha} = \chi \nabla^2 \vartheta. \qquad (9.13')$$

这个方程和平移方程（9.13）的不同之处在于右边理想化守恒特征量$\psi(\boldsymbol{X}, t)$与分子扩散系数成比例。现在，扩散方程的拉格朗日形式可以以非常类似于拉格朗日动力学方程推导的方式推导出来[Corrsin (1962)，也参见Okubo (1967)]。这里拉格朗日浓度场

$$\vartheta(\boldsymbol{x}, t) = \vartheta[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)]$$

可能是主要的变量，这个变量依赖于t并且满足方程

$$\frac{\partial \vartheta(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = \chi \left\{ [X_2, X_3, [X_2, X_3, \vartheta]] + [X_3, X_1, [X_3, X_1, \vartheta] + [X_1, X_2, [X_1, X_2, \vartheta]]] \right\},$$

这意味着ϑ在$\chi = 0$时不依赖于t，其中$X_i(\boldsymbol{x}, t), t = 1, 2, 3$是动力学方程（9.6）和（9.9）的解。

9.2 拉格朗日湍流特征量

对于湍流的统计描述，首先必须指明假设哪个特征量有概率分别，也就是说，是某个随机场的实现。在前面章节对湍流的讨论中，我们总是假设随机场是欧拉速度场$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$。然而，在此情形，拉格朗日变量

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{u}[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t), t] \text{和} \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{x} + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t')dt'$$

也是宗量$\boldsymbol{x}$和t的随机函数。此外，对于仍以有限数量n个流体粒子（由时刻$t = 0$它们处于点$\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_n$的事实来辨认），对它们在任意时刻$t_1, ..., t_m$的坐标$\boldsymbol{X}$ 和速度$\boldsymbol{V}$，多维联合概率密度存在。这些多维密度是$3n + m$个变量$x_{11}, x_{12}, x_{13}, ..., x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, t_1, ..., t_m$的函数（其中$x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$是矢量$\boldsymbol{x}_i$的三个分量），是湍流的基本拉格朗日统计特征量。我们还要注意，联合概率分布对变量集合（也就是固定流体粒子的拉格朗日坐标或速度以及固定点的欧拉流动速度）也存在。这些“混合概率”分布有时也很有趣。

我们用下面这类符号表示概率密度：

$$p(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{V}, ...|\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, ...; t_1, t_2, ...),$$

其中括号中竖线坐标的值表示所研究的随机变量，字母和相应的变量本身相同，竖线后面的值是这些变量依赖的参数。如果对应于几个变量的参数一致，并且没有混淆的危险，那么我们只在竖线后面写一遍。

湍流的各种拉格朗日量和混合统计特征量满足很多一般关系，其中一些在这里指出。我们从“平移方程”（9.13）得出的那些关系式开始。取表达式（9.14）为这个方程的解，根据方程（9.1）

$$u_\alpha(\boldsymbol{X},t)\delta[\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)] =$$
$$u_\alpha[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)]\delta[\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)] = \boldsymbol{V}_\alpha(\boldsymbol{x},t)\delta[\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)]$$

我们得到

$$\frac{\partial\delta[\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)]}{\partial t} + \frac{\partial V_\alpha(\boldsymbol{x},t)\delta[\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)]}{\partial \boldsymbol{X}_\alpha} = 0.$$

然而，由概率平均的定义[见方程（3.12）]

$$\overline{\delta[\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)]} = p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x},t)$$
$$\overline{V_\alpha(\boldsymbol{x},t)\delta[\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)]} = \int V_\alpha p(\boldsymbol{X},\boldsymbol{V}|\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}\boldsymbol{V}.$$

于是，对$\delta[\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)]$的方程平均，我们有

$$\frac{\partial p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x},t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X_\alpha}\int V_\alpha p(\boldsymbol{X},\boldsymbol{V}|\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}\boldsymbol{V} = 0, \qquad (9.16)$$

这是平移方程（9.13）的统计类比。

统计特征量之间的另一类关系可以由拉格朗日速度$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$（代表了随机函数$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)$在随机点$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$的值），通过引入依赖于固定点$\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$的随机变量$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{x},t)$得到。这个变量的值是时刻$t=t_0$在点$\boldsymbol{x}$，时刻$t$在固定点$\boldsymbol{X}_1$的那些流体粒子的速度。其概率密度$p(\boldsymbol{V}|\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{x},t)$是变量$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$在条件$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{X}_1$下的条件概率密度。所以，严格来说，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{x},t)$的概率分布既不是纯拉格朗日的，也不是纯欧拉的。然而，可以预期，随着$t-t_0$增大，这个概率分布对$\boldsymbol{x}$一般会变得越来越不重要。对于足够大的$t=t_0$，通过比较拉格朗日关联时间或者拉格朗日积分时标，

$$T=\int_{t_0}^{\infty}\frac{\overline{V_i'(\boldsymbol{x},t)V_i'(\boldsymbol{x},t_0)}}{[\overline{V'^2(\boldsymbol{x},t)V'^2(\boldsymbol{x},t_0)}]^{1/2}}dt$$

这个依赖关系通常可以完全忽略。所以，通常可以认为对于这个$t-t_0$，

随机变量$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{x},t)$等价于欧拉随机变量$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}_1,t)$。然而，让我们强调，把$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{x},t)$替换为$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}_1,t)$对于任意$t-t_0$值不总是合适的。例如，我们后面将看到，在沿$x_3=0$平面的湍流边界层中，对于所有$\boldsymbol{X}_1$和$t$，$\overline{V_3(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{x},t)}>0$，特别是在对数层中$\overline{V_3(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{x},t)}=$ 常量 $\approx bu_*$，其中b是一个普适常数，而$\overline{u_3(\boldsymbol{X}_1,t)}=0$。

不难看到，流体粒子在不同时间$t_1,...,t_n$的n个速度$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}_1,t_1),...\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}_n,t_n)$的联合概率密度可以写为这种形式

$$
\begin{aligned}
&p(\boldsymbol{V}_1,...\boldsymbol{V}_n|\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n;t_1,...,t_n)=\\
&\int...\int p(\boldsymbol{V}_1,...,\boldsymbol{V}_n|\boldsymbol{X}_1,...,\boldsymbol{X}_n;\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n;t_1,...,t_n)\times\\
&p(\boldsymbol{X}_1,...,\boldsymbol{X}_n|\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n;t_1,...,t_n)\mathrm{d}\boldsymbol{X}_1...\mathrm{d}\boldsymbol{X}_n,
\end{aligned}
\tag{9.17}
$$

其中积分号下的第一个因子是流体粒子速度在这个条件下的条件概率密度：假设它们在相应时间的坐标为固定值$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_1,t_1)=\boldsymbol{X}_1,...,\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_n,t_n)=\boldsymbol{X}_n$。如果所有流体粒子都不同，也就是说，初始点$\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n$没有两个是相同的，那么这第一个因子是上面引入的随机变量$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{x}_1,t_1),...,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}_n,\boldsymbol{x}_n,t_n)$的联合概率密度。方程（9.17）积分号下第二个因子是拉格朗日随机变量$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_1,t_0),...,\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}_n,t_n)$的联合概率密度。方程（9.17）和它的推论一样取自Monin (1960)，它是概率论中“全概率定理”的一般形式。如果所讨论的所有流体粒子都不同并且所有差$t_1-t_0,...,t_n-t_0$都足够大，那么方程（9.17）积分号下第一个因子对宗量$\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n$的依赖在一些情形可以忽略。于是这个因子可以被认为是固定点速度$\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}_1,t_1),...,\boldsymbol{V}_n=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}_n,t_n)$的概率密度，故而这里方程（9.17）变为湍流的拉格朗日和欧拉统计特征量之间的一个近似关系。

让我们特别考虑$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_2=...=\boldsymbol{x}_n(=\boldsymbol{x})$时方程（9.17）的特殊情形。这里，这个公式含有单个流体粒子在不同时刻坐标和速度的概率密度。当$n=1$，我们得到

$$
p(\boldsymbol{V}|\boldsymbol{x},t)=\int p(\boldsymbol{V}|\boldsymbol{X},\boldsymbol{x},t)p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}\boldsymbol{X}. \tag{9.18}
$$

如已经注意到的，对于足够大的$t-t_0$，函数$p(\boldsymbol{V}|\boldsymbol{x},t)$有时可以作为固定时空点$(\boldsymbol{X},t)$欧拉速度$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)$的概率密度。从这个意义上说，方程（9.18）可以认为时联系拉格朗日速度和欧拉速度的基本表达式（9.1）的统计类比。现在把方程（9.18）带入平均值$\overline{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)}$（从一般方程（3.12）推

导出来），我们得到

$$\overline{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)}=\int\overline{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{x},t)}p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}\boldsymbol{X}. \tag{9.19}$$

当$t-t_0\to\infty$时$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{x},t)$不依赖于$\boldsymbol{x}$，对于足够大的$t-t_0$，这个方程可以重写为这种形式

$$\overline{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)}=\int\overline{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)}p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}\boldsymbol{X}. \tag{9.20}$$

对于单个流体粒子在连续两个时刻t_0和$t>t_0$的速度$\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t_0)$和$\boldsymbol{V}_2=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$的联合概率分布，方程（9.17）得出表达式

$$p(\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2|\boldsymbol{x},t_0,t)=\int p(\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2|\boldsymbol{X};\boldsymbol{x},t_0,t)p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}\boldsymbol{X}, \tag{9.21}$$

其中积分号下第一个因子时变量$\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X},t_0)=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t_0)$和$\boldsymbol{V}_2=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{x},t)$的联合概率密度。所以由此，对于拉格朗日速度关联函数（也就是分布（9.21）的混合二阶矩$\overline{V_{1i}V_{2j}}$，其中下标i和j时矢量$\boldsymbol{V}_1$和$\boldsymbol{V}_2$的分量指标），我们得到下面的关系：

$$\overline{V_i(\boldsymbol{x},t_0)V_j(\boldsymbol{x},t)}=\int\overline{u_i(\boldsymbol{x},t_0)V_j(\boldsymbol{X},\boldsymbol{x},t)}p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}\boldsymbol{X}. \tag{9.22}$$

对于和拉个朗日关联时间相比足够大的$t-t_0$值，基于上面的论证，可以认为积分号下的速度关联函数就是欧拉时空关联函数$\overline{u_i(\boldsymbol{x},t_0)u_j(\boldsymbol{X},t)}$。然而，对于这些$t-t_0$，实际上已经可以认为$V_i(\boldsymbol{x},t_0)$和$V_j(\boldsymbol{x},t)$值以及$u_i(\boldsymbol{x},t_0)$和$u_j(\boldsymbol{X},t)$值是不相关的。所以，在此情形，这个方程的渐近形式没有太大意义。方程（9.22）坐标不是最一般的拉格朗日速度关联函数，因为在其中一个时刻，即t_0，相应“流体粒子”的坐标具有等于$\boldsymbol{x}$的固定值。拉格朗日速度关联函数$\overline{V_i(\boldsymbol{x},t_1)V_j(\boldsymbol{x},t_2)}$（其中$t_2>t_1>t_0$）更一般，使用方程（9.17），我们可以将其表示为

$$\overline{V_i(\boldsymbol{x},t_1)V_j(\boldsymbol{x},t_2)}=\int\int\overline{V_i(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{x},t)V_j(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{x},t_1,t_2)}p(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2|\boldsymbol{x},t_1,t_0)\mathrm{d}\boldsymbol{X}_1\mathrm{d}\boldsymbol{X}_2, \tag{9.23}$$

其中$V(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{x},t_1,t_2)$表示时刻$t_2$在这个条件下流体粒子的随机速度：在时刻$t_0$、$t_1$和$t_2$，这个粒子分布处于固定点$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{X}_1$和$\boldsymbol{X}_2$。对于足够大的$t_1-t_0$，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{x},t)$通常可以认为近似等于$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}_1,t_1)$。以同样的方式，对于足够大的$t_2-t_1$，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{x},t_1,t_2)$值通常可以认为近似等于$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}_2,t_2)$。

9.3 单个流体粒子的位移特征量；均匀湍流的情形

时刻$t = t_0$处于点$\boldsymbol{x}$的流体粒子的运动完全由矢量函数$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$描述，它给出了这个粒子在任意时刻$t$的位置。也可以使用粒子在时间间隔$\tau$内的位移矢量代替矢量$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$：

$$\boldsymbol{Y}(\tau) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t_0 + \tau) - \boldsymbol{x} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)dt, \tag{9.24}$$

这通常是非常方便的。在这一小节中，我们将研究随机矢量$\boldsymbol{Y}(\tau)$的统计特征。

变量$\boldsymbol{Y}(\tau)$的完整描述需要给出其三维概率密度$p(\boldsymbol{Y}|\tau; \boldsymbol{x}, t_0)$，这依赖于参数$\tau$、$\boldsymbol{x}$和$t_0$。容易看到，对于和典型拉格朗日相关时间给出的时标$T$ 相比足够小的τ，这个概率密度可以用湍流的欧拉统计特征量表示。实际上，当$\tau \ll T$，拉格朗日速度在时间τ内不变，所以这里方程（9.24）可以重写为

$$\boldsymbol{Y}(\tau) \approx \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t_0)\tau = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t_0)\tau.$$

所以这个情形中$\boldsymbol{Y}(\tau)$的概率密度可以变换为

$$p(\boldsymbol{Y}|\tau; \boldsymbol{x}, t_0) \approx \tau^{-3} P\left(\left.\frac{\boldsymbol{Y}}{\tau}\right| \boldsymbol{x}, t_0\right), \tag{9.25}$$

其中$P(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{x}, t_0)$是时刻$t_0$在固定点$\boldsymbol{x}$的欧拉速度$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t_0)$的概率密度。如果湍流是稳态的，那么密度$P(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{x}, t_0)$容易通过分析长时间内点$\boldsymbol{x}$的速度观测来确定。所以，例如，在开口处有方形网格（从而在下游产生强湍流）的风洞的湍流中，Simmons, Salter (1938)和Townsend (1947)的测量数据令人信服地表明，当$\tau \ll T$，分布$P(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{x})$以及$p(\boldsymbol{Y}|\tau, \boldsymbol{x})$ 非常接近正态分布。

对于不非常小的τ，分布$p(\boldsymbol{Y}|\tau; \boldsymbol{x}, t_0)$不一定可以用欧拉统计特征量表示。然而，如果$\tau \gg T$，那么可以使用这个事实，这里方程（9.24）右边可以表示为长度为T的非相交时间间隔的积分的和，是弱依赖随机变量。所以，有可能对这个求和使用所谓*弱依赖随机变量的中心极限定理*，据此，大量这种变量求和的概率分布在某些一般条件下非常接近正态分布。最近，中心极限定理也被直接证明了，尽管对于（9.24）类型的积分有一些温和的限制。例如，见Rozanov (1967)，那里考虑了一个稳态随机函数的积分。对于一些非稳态随机函数的积分也有类似的定理。不幸的是，仍然不可能直接使用这些证明，因为对随机函数的这些温和的限制条件不能

直接在实际过程中验证。[1] 然而，这些条件非常自然，如果位移$\boldsymbol{Y}(\tau)$ 的概率分布在$\tau \gg T$ 时和正态分布有本质不同，那么这会非常显著。在某些情形，$\boldsymbol{Y}(\tau)$的分布，或者至少对于这个矢量的某些分量，可以近似通过测量流动中一个外加物源产生的污染流体的"幔"的各个截面的浓度分布来确定，例如，一个热物体后方热尾流的各个截面中的温度分布。所以，实验成功证明了，在很多湍流中，大τ的$\boldsymbol{Y}(\tau)$ 分布实际上非常接近正态分布，而在网格后的风洞湍流的特殊情形，对于所有τ 值都几乎是正态分布[见，例如，Collis (1948)、Townsend (1951)、Uberoi, Corrsin (1953)]。$\boldsymbol{Y}(\tau)$分布对于所有τ值都几乎是正态分布的事实并不令人惊讶，因为如我们已经看到的，它对于小的和大的τ都一定是正态分布。它对于所有τ值都接近正态仅仅表明，最有中间的τ 值，分布的形式没有剧烈变化。然而，一般来说，没有理由预期$\boldsymbol{Y}(\tau)$的分布对于适中的τ值也接近正态分布。

现在让我们研究随机矢量$\boldsymbol{Y}(\tau)$最重要的数值特征量，其一阶和二阶矩。这个矢量的平均值等于

$$\overline{\boldsymbol{Y}(\tau)} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \overline{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)}dt. \tag{9.26}$$

据此可以证明，在一些重要的特殊情形$\overline{\boldsymbol{Y}(\tau)} = \boldsymbol{U}\tau$，其中$\boldsymbol{U}$是适当定义的平均流动速度（见下面的例子）。然后只剩下研究位移涨落

$$\boldsymbol{Y}'(\tau) = \boldsymbol{Y}(\tau) - \overline{\boldsymbol{Y}(\tau)} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \boldsymbol{V}'(\boldsymbol{x},t)dt$$

的特征量。这个随机矢量的二阶矩张量由这个方程给出：

$$D_{ij}(\tau) = \overline{Y_i'(\tau)Y_j'(\tau)} = \int_{t_0}^{t_0+\tau}\int_{t_0}^{t_0+\tau} \overline{V_i'(\boldsymbol{x},t_1)V_j'(\boldsymbol{x},t_2)}dt_1dt_2, \tag{9.27}$$

它被称为流体粒子位移协方差（或方差）张量。让我们注意到当$\boldsymbol{Y}(\tau)$的概率分布可以认为是正态分布时，矢量（9.26）和张量（9.27）完全表征了这个分布。

[1]所以，例如，很多证明使用了所谓强混合条件。应用到函数$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{x},t)$时，这大致简化为要求存在一个正的函数$\alpha(\tau)$，在$\tau\to\infty$时$\alpha(\tau)\to 0$，并且$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t'), -\infty < t' < t_0$的任意泛函和$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t''), t_0+\tau < t'' < \infty$的任意泛函之间的相关系数的模小于$\alpha(\tau)$。

对于足够小的τ（使得$\boldsymbol{Y}'(\tau) \approx \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}, t_0)\tau$），由方程（9.27）我们得到

$$D_{ij}(\tau) \approx \overline{u_i'(\boldsymbol{x}, t_0) u_j'(\boldsymbol{x}, t_0)} \cdot \tau^2 = B_{ij}\tau^2. \tag{9.28}$$

对于稳态流，系数$B_{ij} = \overline{u_i'(\boldsymbol{x}, t_0) u_j'(\boldsymbol{x}, t_0)}$只依赖于$\boldsymbol{x}$，并且在额外的随机场$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$均匀的假设下，是严格恒定的。对于不太小的$\tau$可以得到函数$D_{ij}(\tau)$形式的具体信息，但仅对某些特殊湍流。

我们首先考虑稳态均匀湍流的理想化情形，其中所有流动变量都是同一时刻三维空间中的均匀随机场，t的稳态随机函数。在此情形，平均速度$\boldsymbol{u}$对空间和时间都是不变的，于是

$$\overline{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)} = \overline{\boldsymbol{u}[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t), t]} = \overline{\boldsymbol{u}}, \overline{\boldsymbol{Y}(\tau)} = \overline{\boldsymbol{u}}\tau.$$

此外，这里流体粒子的涨落速度$\boldsymbol{V}'(\boldsymbol{x}, t)$对于所有$\boldsymbol{x}$具有同样的统计特征量并且是$t$的稳态随机函数，故而

$$\overline{V_i'(\boldsymbol{x}, t_1) V_j'(\boldsymbol{x}, t_2)} = B_{ij}^{(L)}(t_2 - t1) = \left(\overline{u_i'^2 u_j'^2}\right)^{1/2} R_{ij}^{(L)}(t_2 - t_1), \tag{9.29}$$

其中字母L表示相应的函数是拉格朗日关联函数。限制变换为新的变量$s = t_2 - t_1$和$t = \frac{t_1 + t_2}{2}$，方程（9.27）可以重写为

$$\begin{aligned} D_{ij}(\tau) &= \int_0^{\tau} \int_{t_0 + \frac{s}{2}}^{t_0 + \tau - \frac{s}{2}} [B_{ij}^{(L)}(s) + B_{ji}^{(L)}(s)] dt ds \\ &= \left(\overline{u_i'^2 u_j'^2}\right)^{1/2} \int_0^{\tau} \int_{t_0 + \frac{s}{2}}^{t_0 + \tau - \frac{s}{2}} [R_{ij}^{(L)}(s) + R_{ji}^{(L)}(s)] dt ds \end{aligned} \tag{9.30}$$

或者对t积分后得到

$$\begin{aligned} D_{ij}(\tau) &= \int_0^{\tau} (\tau - s)[B_{ij}^{(L)}(s) + B_{ji}^{(L)}(s)] ds \\ &= \left(\overline{u_i'^2 u_j'^2}\right)^{1/2} \int_0^{\tau} (\tau - s)[R_{ij}^{(L)}(s) + R_{ji}^{(L)}(s)] ds. \end{aligned} \tag{9.30$'$}$$

G. I. Taylor (1921)的经典工作中首次得到了$\boldsymbol{V}(\tau)$一个成分方差的类似方

差（9.30）的结果。Kampé de Fériet (1939)在$i = j$的情形以及Batchelor (1949b)在一般情形把它写成了方程（9.30'）的形式。当$i = j$，方程（9.30'）变为

$$D_{ii}(\tau) = 2\int_0^\tau (\tau - s) B_{ii}^{(L)}(s) ds = 2\overline{u_i'^2}\int_0^\tau (\tau - s) R_{ii}^{(L)}(s) ds. \tag{9.31}$$

（这里，正如下文，不假设对i求和！）现在让我们采用这个自然的假设，拉格朗日关联函数$R_{ii}^{(L)}(s)$在$s \to \infty$时趋向于零，并且速度快到使得存在下面的关联时间：

$$T_i = \int_0^\infty R_{ii}^{(L)}(s) ds. \tag{9.32}$$

上面提到的拉格朗日时标T，可以取三个变量$T_i, i = 1, 2, 3$的最大值或平均值。同样假设积分

$$\int_0^\infty s R_{ii}^{(L)}(s) ds = S_i \tag{9.33}$$

有限，对于足够大的τ（也就是说，当$\tau \gg T_i$）有可能的把方程（9.31）替换为渐近表达式

$$D_{ii}(\tau) \approx 2\overline{u_i'^2}\int_0^\infty (\tau - s) R_{ii}^{(L)}(s) ds = 2\overline{u_i'^2}(T_i\tau - S_i). \tag{9.34}$$

对于非常大的τ，τ的线性项扮演了方程（9.34）右边的基本角色。所以，方程（9.34）可以重写为

$$D_{ii}(\tau) \approx 2\overline{u_i'^2} T_i \tau, \tag{9.35}$$

容易看到，这也可以不假设积分（9.33）有限而得到。类似地，对于足够大的τ可以得到下面$D_{ij}(\tau)$的表达式：

$$D_{ij}(\tau) \approx (\overline{u_i'^2 u_j'^2})^{1/2} T_{ij}\tau, \quad T_{ij} = \int_0^\infty [R_{ij}^{(L)}(s) + R_{ji}^{(L)}(s)] ds. \tag{9.36}$$

方程（9.35）表明，粒子位移的方差在足够场的时间τ后变得正比于τ。这个结果完全类似于布朗运动的基本规律，根据这个规律，布朗运动粒子或任何参与分子扩散的粒子位移的平方平均，正比于运动（扩

散）时间。对于非常小的τ，根据方程（9.28），位移方程对τ的依赖是二次方的，对于具有有限速度的任意运动一定都是这样的。对于中等的τ值，$D_{ii}(\tau)$ 对τ的依赖更复杂，依赖于关联函数$R_{ii}^{(L)}(s)$的形式。见，例如Frenkiel (1952, 1953)和Pasquill (1926b)画的对应于一些特殊形式的函数$R_{ij}^{(L)}(s)$的函数$D_{ij}(\tau)$的图。同样，根据Frenkiel和Pasquill的数据，只有我们假设函数$R_{ii}^{(L)}(s)$可以取负值并且随宗量的增大而频繁改变符号，函数$R_{ii}^{(L)}(s)$才会有大的方差$D_{ii}(\tau)$值。对于在任何地方都保持为正的函数$R_{ii}^{(L)}(s)$，$D_{ii}(\tau)$对函数$R_{ii}^{(L)}(s)$具体形式的依赖非常弱，这里对于所有$\tau \leq T_i$渐近公式（9.28）被很好地满足，对于所有$\tau \geq 5T_i$，渐近公式（9.35）被很好地满足。所以，对于非负函数$R_{ii}^{(L)}(s)$，方差$D_{ii}(\tau)$强烈依赖于湍流强度$\overline{u_i'^2}$及其时标T_i，但只是弱依赖于关联函数$R_{ii}^{(L)}(s)$的具体形式。

可以假设，由稳态均匀湍流模型得到的结果没有实际意义。这是因为无界空间中的均匀湍流一般仅仅是数学上的理想化情形，稳态假设令情况更糟，因为能量耗散暗示黏滞流体的稳态流必须有外部能量源，所以不会是均匀的。然而，实际上容易看到，上面公式（9.31）的推导只需要流动对于Ox_i轴是均匀的。于是，我们可以指出几种完全现实的流动，其中可以使用上面得到的结果。特别地，按照G. T. Taylor (1954a)[他的工作在后面详细讨论]，Batchelor注意到这些结果可以直接用于任意不变截面的足够长的直管道中最简单的湍流[[Batchelor, Townsend (1956)、Batchelor (1957)]。实际上，如果管道的方向和Ox_1轴一致，那么沿这个方向，流动是均匀的，尽管这里平均速度$\overline{u}_1(x_2, x_3)$在Ox_2x_3平面上的分布会非常复杂。现在让我们研究流体粒子在τ时刻位移的Ox_1分量$Y_1(\tau)$。一般来说，相应的拉格朗日速度$\frac{dY_1(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = V_1(\boldsymbol{x}, t_0+\tau)$是$\tau$的非稳态随机函数，依赖于粒子$\boldsymbol{x}$在$Ox_2x_3$平面上的初始条件。然而，自然可以预期所讨论的流体粒子在开始时刻t_0之后某个时间几乎感受不到初始位置$\boldsymbol{x}$的影响。所以可以认为函数$V_1(\boldsymbol{x}, t_0+\tau)$不依赖于$\boldsymbol{x}$，并且是稳态的。这里，对于足够大的$\tau$，平均纵向粒子速度$\overline{V_1(\boldsymbol{x}, t_0+\tau)} = U_1$既不依赖于$\tau$也不依赖于$\boldsymbol{x}$，也就是说对时间不变，对在时刻$t_0$或更早占据固定位置的所有流体粒子相同。显然，并且可以借助9.5节的论证严格证明，U_1也与（通过管道的固定截面的）所有流体在给定时间间隔的平均纵向速度相同，也就是说，和平均的整体速度U_{ave}（定义为单位时间来自管道的流体的体积和管道横截面面积的比）相同。所以对于足够大的τ，

$$\overline{Y_1(\tau)} \approx U_{\text{ave}} \cdot \tau. \tag{9.37}$$

此外，基于方程（9.35），对于足够大的τ，

$$\overline{[Y_1(\tau)-\overline{Y_1(\tau)}]^2} \approx 2\overline{u_1'^2}T_1\tau. \tag{9.38}$$

对于稍微小一些的τ，有可能使用$i=1$的更精确的方程（9.34）。方程（9.38）中的特征量$\overline{u_1'^2}$和T_1必须由（管道中湍流统计状态依赖的）参数确定。因为在圆管中，对于足够大的雷诺数，黏滞亚层填满了截面的很大一部分（见上面的5.5节），于是在此情形$\overline{u_1'^2}$和T_1仅依赖于管的半径R和摩擦速度$u_*=\sqrt{\tau_0/\rho}$，其中τ_0是壁面上的剪切应力。基于量纲分析，

$$\overline{u_1'^2}T_1 = cRu_*, \tag{9.39}$$

其中c是一个普适常数，可以由数据估计（见下面10.4节）。这种类型的公式对非圆截面的直管或渠中足够大Re的湍流也成立。这里，对于R，只需要使用管或渠截面的典型线尺度，u_*用壁面剪切应力的平均值确定。

9.4 网格湍流和湍动剪切流中的流体粒子位移

自守湍流的拉格朗日特征量

方程（9.37）-（9.39）的推导相当依赖于这个事实，在管流中，流体粒子在横向平面Ox_2x_3中的运动在任何时候都只在固定的有界部分内进行。很明细这后一个条件仅对某些特殊的湍流满足。例如，在沿平面壁面的湍流边界层的情形或湍动射流的情形，一个粒子距离壁面的平均距离或距离射流轴的平均距离会无极限地随τ的增大而增大。所以，在这样的流动中，拉格朗日速度$\frac{\mathrm{d}Y_1(\tau)}{\mathrm{d}\tau}$不能认为对任意$\tau$是时间的稳态随机函数。所以，方程（9.30）-（9.36）可以直接应用的实际流动的种类非常少。

然而，Batchelor (1957)注意到，还有一类流动，包括一些实际中重要的那些流动，上面的公式在一些修改后可以应用。这类流动包括稳态自守流动，其中平均速度主要沿Ox_1轴方向，并且各种坐标值x_1的湍流结构相似，也就是说，差别仅在于特征长度标度$L(x_1)$和速度标度$U(x_1)$。换句话说，在这样的流动中，湍流在平面$x_1=$常量内的所有欧拉统计特征量通过除以相应的标度L和U组合化简为无量纲形式，不依赖于x_1。在这个情形，一个特定流体粒子在任何时候都处于实际上相同的条件，但是具有变化的速度标度$U(\tau)=U[X_1(\boldsymbol{x},t_0+\tau)]$和变化的时标

$$T(\tau)=\frac{L[X_1(\boldsymbol{x},t_0+\tau)]}{U[X_1(\boldsymbol{x},t_0+\tau)]}.$$

所以，为了研究这个粒子的运动，可取的是用标度$T(\tau)$度量时间（也就是说，用和τ的关系为$\mathrm{d}\eta=\frac{\mathrm{d}\tau}{T(\tau)}$ 的变量$\eta(\tau)$ 代替时间τ），用标度$U(\tau)$度量速度。这里，自然的是假设对于足够大的τ值（初始位置$\boldsymbol{x}$不再有影响），无量纲拉格朗日速度涨落$\boldsymbol{V}'(\boldsymbol{x},t_0+\tau)/U(\tau)$是变量$\eta$的一个稳态随机函数$F(\eta)$：

$$\frac{\boldsymbol{V}'(\boldsymbol{x},t_0+\tau)}{U(\tau)}=F(\eta),\quad \mathrm{d}\eta=\frac{U(\tau)\mathrm{d}\tau}{L(\tau)}. \tag{9.40}$$

确实，还没有这个命题以及湍流欧拉性质的自守性意味着其拉格朗日性质的自守性这个一般事实的严格证明。然而，这是一个非常可信的假设，其结果在许多情况下与现有关于拉格朗日统计特征的（尽管仍然非常不完备的）数据一致。此外，在借助量纲分析确立欧拉湍流特征量的自守性时，通常会使用同样的考虑形成拉格朗日特征量自守性的基础。这样得到的这些结果在所有情形和斜体字假设得出的结论一致。

这里提出的假设可以应用的最简单的例子之一是产生湍流的网格后方风洞中心部分的湍流。在此情形，平均速度$\overline{\boldsymbol{u}}=U_0\boldsymbol{i}_1$（其中$\boldsymbol{i}_1$是沿$Ox_1$轴的单位矢量）严格恒定，因此

$$\overline{Y_1(\tau)}=U_0\tau,\overline{Y_2(\tau)}=\overline{Y_3(\tau)}=0.$$

然而，这里的湍流仍然不是完全均匀的，而是衰减的，因为由于黏滞，速度涨落强度随距离网格的距离增大而缓慢减小。如网格湍流测量所示[本书第2卷第7章]，在衰减初期，具体来说，在距离网格相对小的距离，网格后的湍流通常在$x_1=$ 常量平面是近似均匀的，对于各个x_1值仅相差正比于$(x_1-x_1^0)^{-1/2}$的速度标度和正比于$(x_1-x_1^0)^{1/2}$的长度标度，其中x_1^0是Ox_1轴上的某个虚拟初始参考点。因为这个流动中的平均速度U_0和速度涨落相比总是大的，所以可以假设$X_1(\tau)-x_1^0=U_0\tau$，其中τ是虚拟时间t_0处于平面$x_1=x_1^0$的流体例子的运动时间。可以假设平面$x_1=x_1^0+U_0\tau$内的速度标度$U(\tau)$为任意恒定速度乘以$\tau^{-1/2}$。例如，为了研究初始时刻位于平面$x_1=a$的流体粒子的运动，方便的是假设

$$U(\tau)=U_a\left(\frac{\tau_a}{\tau}\right)^{1/2}$$

其中U_a是$x_1=a$以及$\tau_a=\frac{a-x_1^0}{U_0}$时速度涨落的特征值。在此情形，方程（9.40）的变量η等于$\ln\tau+$常量，所以，可以取$\eta=\ln\frac{\tau}{\tau_a}$。由此得到，命题

（9.40）这里简化为这个假设，拉格朗日速度关联函数具有这种形式

$$\overline{V_i'(\boldsymbol{x}, t_0+\tau_1)V_j'(\boldsymbol{x}, t_0+\tau_2)} = U_a^2\tau_a(\tau_1\tau_2)^{-1/2}S_{ij}\left(\ln\frac{\tau_2}{\tau_a} - \ln\frac{\tau_1}{\tau_a}\right), \quad (9.41)$$

其中S_{ij}是平稳过程

$$F_i(\eta) = \frac{V_i'(\boldsymbol{x}, t_1+\tau)}{U(\tau)} \text{和} F_j(\eta) = \frac{V_j'(\boldsymbol{x}, t_1+\tau)}{U(\tau)}$$

的交叉相关函数。把方程（9.41）带入一般方程（9.27）并把对t_1和t_2的积分替换为对τ_1和τ_2在积分限τ_a和τ之间的积分，通过和方程（9.30'）类似的推导我们得到

$$D_{ij}(\tau) = U_a^2\tau_a^2\int_0^{\ln\frac{\tau}{\tau_a}}\left(\frac{\tau}{\tau_a}e^{-\frac{\theta}{2}} - e^{\frac{\theta}{2}}\right)[S_{ij}(\theta) + S_{ij}(\theta)]\mathrm{d}\theta. \quad (9.42)$$

如果我们自然地假设，关联函数（9.41）随$\tau_1 - \tau_2$增加足够快速地减小，那么由方程（9.42），对于足够大的τ值

$$D_{ij}(\tau) = 2U_a^2\tau_a\Xi_{ij}\tau, \quad \Xi_{ij} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}[S_{ij}(\theta) + S_{ji}(\theta)]e^{-\frac{\theta}{2}}\mathrm{d}\theta. \quad (9.43)$$

同时，我们已经证明了，渐近规律$D_{ij}(\tau) \sim \tau$也可以近似用于风洞中网格后的衰减湍流。

对速度均匀的自由流动中沿Ox_2轴的任意截面的长圆柱或中心在原点的某个有界固体产生的湍动尾流可以进行类似的论证。如在5.9节中已经看到的，在距离产生尾流的物体足够远的距离，在那里，尾流中的湍流速度变得和自由流动速度U_0相比为小，这个尾流中的湍流结构可以认为是自守的，并且对于各个纵向坐标x_1值的不同，仅在于长度标度$L(x_1)$和速度标度$U(x_1)$。此外对于圆柱后方的二维尾流

$$L(x_1) \sim x_1^{1/2}, U(x_1) \sim x_1^{-1/2},$$

对于有界物体后方的三维尾流

$$L(x_1) \sim x_1^{1/3}, U(x_1) \sim x_1^{-2/3},$$

在所讨论的情形，对于合适的时间坐标原点和足够大的τ，$X_(\tau) \approx U_0\tau$。于

是对于二维和三维尾流，

$$\mathrm{d}\eta = \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}, \quad \eta = \ln \frac{\tau}{\tau_a}.$$

因为湍动流体不离开尾流，在任何时候，流体粒子都会在尾流占据的空间中游荡，不离开其边界。所以，自然可以预期对于足够大的τ，这里的假设（9.40）也是对的（分别有$U(\tau) = U_a\left(\frac{\tau_a}{\tau}\right)^{1/2}$或$U(\tau) = U_a\left(\frac{\tau_a}{\tau}\right)^{2/3}$）。然而，这表明对于二维湍动尾流中的流体粒子

$$D_{ij}(\tau) = U_a^2\tau_a^2 \int_0^{\ln\frac{\tau}{\tau_a}} \left(\frac{\tau}{\tau_a}e^{-\frac{\theta}{2}} - e^{\frac{\theta}{2}}\right)[S_{ij}(\theta) + S_{ji}(\theta)]\mathrm{d}\theta \tag{9.44}$$

对于三维尾流

$$D_{ij}(\tau) = \frac{3}{2}U_a^2\tau_a^2 \int_0^{\ln\frac{\tau}{\tau_a}} \left[\left(\frac{\tau}{\tau_a}\right)^{2/3} e^{-\frac{\theta}{3}} - e^{\frac{\theta}{3}}\right][S_{ij}(\theta) + S_{ji}(\theta)]\mathrm{d}\theta \tag{9.45}$$

其中两种情形的$S_{ij}(\theta)$都有和方程（9.42）中相同的意义。所以对于足够大的τ

$$D_{ij}(\tau) \sim \begin{cases} \tau, & \text{对于二维尾流} \\ \tau^{2/3}, & \text{对于三维尾流.} \end{cases} \tag{9.46}$$

在沿Ox_2轴的圆柱后的二维尾流的情形，$\overline{Y_2(\tau)} \equiv 0$。对于二维尾流的变量$\overline{X_3(\tau)}$和三维尾流的变量$\overline{X_2(\tau)}$和$\overline{X_3(\tau)}$，在距离产生尾流的物体很远的距离，二维尾流实际上变为对平面Ox_1x_2对称，三维尾流实际上变为轴对称的。所以，可以预期对于足够大的τ，它们对于给定流体粒子的任意初始位置都接近于零。

我们现在研究流体粒子在平面中或充满流体的空间中沿Ox_1轴的圆形湍动射流中的运动。这里，同样对于足够大的x_1，可以认为统计状态像上面5.9节一样完全由长度标度$L(x_1)$和速度标度$U(x_1)$表征，其中对于二维平面射流

$$L(x_1) \sim x_1, U(x_1) \sim x_1^{-1/2},$$

对于三维轴对称射流

$$L(x_1) \sim x_1, U(x_1) \sim x_1^{-1}.$$

然而，和湍动尾流的情形不同，湍动射流中不存在恒定速度$U_0 \gg u_1'$的基本

运动。所以这里不可能假设$X_1(\tau) \approx U_0\tau$。然而，因为射流中的平均流动也是自守的，可以期望在此情形，具有

$$U(\tau) = U[\overline{X_1(\tau)}], L(\tau) = L[\overline{X_1(\tau)}]$$

的假设（9.40）对于足够大的τ不仅适用于拉格朗日速度涨落，也适用于拉格朗日速度$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t_0 + \tau)$本身。于是

$$\frac{\overline{\mathrm{d}X_1(\tau)}}{\mathrm{d}\tau} = \overline{V_1} = \overline{F_1} \cdot U[\overline{X_1(\tau)}],$$

其中$\overline{F_1} = \overline{F_1(\eta)} =$ 常量，因为$F_1(\eta)$是一个稳态随机过程。考虑到$U(x_1) \sim x_1^{-\alpha}$，其中$\alpha = 1/2$或1，我们由此得到，对于合适地选择的时间原点，

$$\begin{aligned} &\overline{X(\tau)} \sim \tau^{2/3}, U(\tau) \sim \tau^{-1/3}, L(\tau) \sim \tau^{2/3}\text{对于二维射流} \\ &\overline{X(\tau)} \sim \tau^{1/2}, U(\tau) \sim \tau^{-1/2}, L(\tau) \sim \tau^{1/2}\text{对于三维射流} \end{aligned} \tag{9.47}$$

于是在两个情形，$\mathrm{d}\eta = \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau}, \eta = \ln\frac{\tau}{\tau_a}$。此外，通过类似方程（9.42）、（9.44）和（9.45）的推导，我们发现对于二维射流

$$D_{ij}(\tau) = \frac{3}{4}U_a^2\tau_a^2 \int\limits_0^{\ln\frac{\tau}{\tau_a}} \left[\left(\frac{\tau}{\tau_a}\right)^{4/3} e^{-\frac{2}{3}\theta} - e^{\frac{2}{3}\theta}\right][S_{ij}(\theta) + S_{ji}(\theta)]\mathrm{d}\theta, \tag{9.48}$$

对于三维射流

$$D_{ij}(\tau) = U_a^2\tau_a^2 \int\limits_0^{\ln\frac{\tau}{\tau_a}} \left[\frac{\tau}{\tau_a} e^{-\frac{\theta}{2}} - e^{\frac{\theta}{2}}\right][S_{ij}(\theta) + S_{ji}(\theta)]\mathrm{d}\theta, \tag{9.49}$$

其中$S_{ij}(\theta) = \overline{F_i'(\eta + \theta)F_j'(\eta)}$。对于非常大的$\tau$值，这些方程变为渐近表达式

$$D_{ij}(\tau) \sim \begin{cases} \tau^{4/3}, & \text{对于二维射流} \\ \tau, & \text{对于三维射流.} \end{cases} \tag{9.50}$$

用于研究湍动射流中流体粒子运动的推理也适用于被加热的物体上方的二维平面和三维对流射流，以及不同速度U_1和U_2的两个平面平行流动之间湍流混合层。正如从5.9节所知，对于足够大的x_1，对流射流中和混合层

中的湍流运动都是自守的，其中Ox_1 轴对于对流射流垂直于速度，对于混合层中的流动平行于速度。长度标度$L=L(x_1)$在所有情形都正比于x_1，速度标度对于被加热的圆柱上方的二维对流射流和混合层，在所有截面$x_1=$常量相同，对于三维对流射流，$U(x_1)\sim x_1^{-1/3}$。由此得到，在二维对流射流中，平均纵向拉格朗日速度$\overline{V_1}=\frac{\mathrm{d}\overline{X_1(\tau)}}{\mathrm{d}\tau}$，在湍流混合层中为常量。在混合层的情形，它等于$(U_1+U_2)/2$，在三维对流射流中正比于$\overline{X_1}^{-1/3}$。所以，具有$U(\tau)=U[\overline{X_1(\tau)}]$和$L(\tau)=L[\overline{X_1(\tau)}]$的假设（9.40）对于二维对流射流和混合层简化为简单的陈述，$\boldsymbol{V}'(\boldsymbol{x},t_0+\tau)$是变量$\eta=\ln\frac{\tau}{\tau_a}$的一个稳态随机函数。在三维对流射流的情形，其中$\frac{\mathrm{d}\overline{X_1}}{\mathrm{d}\tau}\sim\overline{X_1}^{-1/3}$，也就是说

$$\overline{X_1(\tau)}\sim\tau^{3/4},L(\tau)\sim\overline{X_1(\tau)}\sim\tau^{3/4},U(\tau)\sim\tau^{-1/4},$$

这个假设表明，变量

$$\boldsymbol{V}'(\boldsymbol{x},t_0+\tau)U_a^{-1}\left(\frac{\tau}{\tau_a}\right)^{1/4}$$

是$\eta=\ln\frac{\tau}{\tau_a}$的稳态随机函数。用通常的方法，我们由此发现对于二维对流射流和混合层，

$$D_{ij}(\tau)=\frac{1}{2}U_a^2\tau_a^2\int\limits_0^{\ln\frac{\tau}{\tau_a}}\left[\left(\frac{\tau}{\tau_a}\right)^2e^{-\theta}-e^{\theta}\right][S_{ij}(\theta)+S_{ji}(\theta)]\mathrm{d}\theta,\qquad(9.51)$$

对于三维对流射流，

$$D_{ij}(\tau)=\frac{2}{3}U_a^2\tau_a^2\int\limits_0^{\ln\frac{\tau}{\tau_a}}\left[\left(\frac{\tau}{\tau_a}\right)^{3/2}e^{-\frac{3}{4}\theta}-e^{\frac{3}{4}\theta}\right][S_{ij}(\theta)+S_{ji}(\theta)]\mathrm{d}\theta.\qquad(9.52)$$

特别地，对于非常大的τ

$$D_{ij}(\tau)\sim\begin{cases}\tau^2, & \text{对于二维对流射流和混合层}\\ \tau^{3/2}, & \text{对于三维对流射流.}\end{cases}\qquad(9.53)$$

[渐近方程（9.43）、（9.46）、（9.50）和（9.53）首先出现在Batchelor和Townsend (1956)、Batchelor (1957)和Yaglom (1965) 中。]

现在让我们证明，如果我们接受拉格朗日相似性假设（它说的是湍流的欧拉统计特征量所依赖的物理参数也决定了拉格朗日特征量，换句话说，它们完全决定了整个湍流状态），方程（9.50）和（9.53）也可以

从纯量纲分析不适用特殊假设推导出来。实际上，根据5.9节，对于动力学起源的三维射流，决定性的物理参数是流体密度ρ和单位时间注入的流体总动量$2\pi\rho M$，对于二维动力学射流是密度ρ和单位时间从单位长度狭缝注入的流体动量ρM_1，对于两个平面平行流动自建的混合层是ρ和速度$U_0 = U_2 - U_1$，对于三维对流射流是ρ、c_p、沿射流的总热流Q和浮力参数g/T_0，对于二维对流射流是ρ、c_p、g/T_0和单位长度加热圆柱的比热流Q_1。如果，例如，流体粒子在时间τ的位移$\boldsymbol{Y}(\tau)$的概率分布对于足够大的τ，仅依赖于这些参数，并且如拉格朗日相似性假设所表明的那样依赖于τ，于是，仅有量纲论证，相应的概率密度$p(\boldsymbol{Y}) = p(Y_1, Y_2, Y_3)$在三维动力学射流的情形具有这种形式：

$$p(\boldsymbol{Y}) = \frac{1}{M^{3/4}\tau^{3/2}} P^{(1)} \left(\frac{Y_1}{M^{1/4}\tau^{1/2}}, \frac{Y_2}{M^{1/4}\tau^{1/2}}, \frac{Y_3}{M^{1/4}\tau^{1/2}} \right) \tag{9.54}$$

在二维动力学射流情形

$$p(\boldsymbol{Y}) = \frac{1}{M_1 \tau^2} P^{(2)} \left(\frac{Y_1}{M^{1/3}\tau^{2/3}}, \frac{Y_2}{M^{1/3}\tau^{2/3}}, \frac{Y_3}{M^{1/3}\tau^{2/3}} \right) \tag{9.54$'$}$$

在平面混合层的情形

$$p(\boldsymbol{Y}) = \frac{1}{U_0^3 \tau^3} P^{(3)} \left(\frac{Y_1}{U_0 \tau}, \frac{Y_2}{U_0 \tau}, \frac{Y_3}{U_0 \tau} \right) \tag{9.54$''$}$$

在三维对流射流的情形

$$p(\boldsymbol{Y}) = \frac{1}{\left(\frac{Q}{c_p\rho}\frac{g}{T_0}\right)^{3/4} \tau^{9/4}} P^{(4)} \left(\frac{Y_1}{\left(\frac{Q}{c_p\rho}\frac{g}{T_0}\right)^{1/4} \tau^{3/4}}, \frac{Y_2}{\left(\frac{Q}{c_p\rho}\frac{g}{T_0}\right)^{1/4} \tau^{3/4}}, \frac{Y_3}{\left(\frac{Q}{c_p\rho}\frac{g}{T_0}\right)^{1/4} \tau^{3/4}} \right) \tag{9.54$'''$}$$

对于二维对流射流

$$p(\boldsymbol{Y}) = \frac{1}{\frac{Q_1}{c_p\rho}\frac{g}{T_0}\tau^3} P^{(5)} \left(\frac{Y_1}{\left(\frac{Q_1}{c_p\rho}\frac{g}{T_0}\right)^{1/3} \tau}, \frac{Y_2}{\left(\frac{Q_1}{c_p\rho}\frac{g}{T_0}\right)^{1/3} \tau}, \frac{Y_3}{\left(\frac{Q_1}{c_p\rho}\frac{g}{T_0}\right)^{1/3} \tau} \right). \tag{9.54$''''$}$$

这里$P^{(1)}, ..., P^{(5)}$是五个表征所述五种自守湍流的普适函数。表达式（9.50）和（9.53）可以立即从方程（9.54）-（9.54””）得到。一般来说，随机矢量$\boldsymbol{Y}(\tau) = (Y_1, Y_2, Y_3)$的任意矩量的渐近表达式容易从它们得到。对于拉格朗日速度$\boldsymbol{V}\tau = \frac{d\boldsymbol{Y}(\tau)}{d\tau}$和其他拉格朗日变量的概率密度可以写出类似于（9.54）-（9.54””）的方程。然而，我们在这里不讨论。

具有恒定速度梯度的剪切流种的粒子分散

在整个无界三维空间种理想化的湍流（其欧拉速度涨落$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x},t)$是稳态和统计均匀的，平均速度$\overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$不随时间变化，但线性依赖于空间坐标）中可以确定方差和协方差$D_{ii}(\tau)$ 的渐近行为。后一个条件是必要的，以便可以把速度涨落看作均匀的，因为平均速度梯度对湍流结构有根本的影响。然而，在均匀湍流中，速度梯度一定是恒定的。让我们假设平均速度沿Ox_1轴，并且仅在Ox_3方向变化，例如$\overline{u_1} = \Gamma x_3$，$\overline{u_2} - \overline{u_3} = 0$，其中$Y =$ 常量。不失一般性，可以假设在$t = 0$时刻流体粒子处于$\boldsymbol{x} = 0$点。我们把这个粒子在时间t的速度指定为$\boldsymbol{V}(t)$。在此情形，

$$\boldsymbol{V}(t) = \overline{\boldsymbol{u}}[\boldsymbol{X}(t)] + \boldsymbol{u}'[\boldsymbol{X}(t),t] \tag{9.55}$$

或者用坐标轴上的投影写出为

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \Gamma X_3(t) + V_1'(t), \\ V_2(t) &= V_2'(t), V_3(t) = V_3'(t), \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \int_0^t [\Gamma X_3(t) + V_1'(t)]dt, \\ X_2(t) &= \int_0^t V_2'(t)dt, X_3(t) = \int_0^t V_3'(t)dt. \end{aligned} \tag{9.56}$$

使用这些方程，不难把$D_{ij}(\tau)$也用场$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x},t)$的统计特征量表示出来，其中和上面研究的情形不同，关于拉格朗日自守性没有特殊假设。

因为$\overline{\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x},t)} \equiv 0$，于是也有$\overline{\boldsymbol{V}'(t)} \equiv 0$。于是，基于方程（9.56）也有$\overline{\boldsymbol{X}(\mathrm{t})} \equiv 0$。因为欧拉速度$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x},t)$是均匀和稳态的，所以拉格朗日速度$\boldsymbol{V}'(t)$也是稳态随机函数，其关联张量具有这种形式

$$\overline{V_i'(t_1)V_j'(t_2)} = B_{ij}^{(L)}(t_1 - t_2).$$

现在让我们研究协方差张量$D_{ij}(\tau) = \overline{X_i(\tau)X_j(\tau)}$。沿$Ox_1$轴的平均速度不影响粒子在$Ox_2$和$Ox_3$ 方向的位移。所以，这里方差$D_{22}(\tau)$、$D_{33}(\tau)$和$D_{23}(\tau)$具有（9.30'）的形式，这对于均匀湍流是很平常的，它们对于小和大τ值

的渐近行为由方差（9.28）和（9.35）描述。最有趣的协方差张量的分量$D_{11}(\tau)$和$D_{13}(\tau)$不是这样的。对于前者，我们可以从方程（9.56）第一个公式得到这个表达式

$$\begin{aligned} D_{11}(\tau) &= \overline{X_1^2(\tau)} = \int_0^\tau \int_0^\tau \{\Gamma^2 \overline{X_3(t_1)X_3(t_2)} \\ &+ \Gamma[\overline{X_3(t_1)V_1'(t_2)} + \overline{X_3(t_2)V_1'(t_1)}] + B_{11}^{(L)}(t_1-t_2)\} dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

基于方程（9.56）第三个方程，大括号中第一项可以变换为下面的形式：

$$\begin{aligned} \overline{X_3(t_1)X_3(t_2)} &= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \overline{V_3'(\theta_1)V_3'(\theta_2)}\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2 \\ &= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} B_{33}^{(L)}(\theta_1-\theta_2)\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\theta_2 = \int_0^{t_1}(t_1-\theta)B_{33}^{(L)}(\theta)\mathrm{d}\theta + \\ & \int_0^{t_2}(t_2-\theta)B_{33}^{(L)}(\theta)\mathrm{d}\theta - \int_0^{|t_1-t_2|}(|t_1-t_2|-\theta)B_{33}^{(L)}(\theta)\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

大括号里第二项可以类似地计算：

$$\begin{aligned} & \overline{X_3(t_1)V_1'(t_2)} + \overline{X_3(t_2)V_1'(t_1)} \\ &= \int_0^{t_1} B_{13}^{(L)}(t_2-\theta)\mathrm{d}\theta + \int_0^{t_2} B_{13}^{(L)}(t_1-\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{t_1} B_{13}^{(L)}(\theta)\mathrm{d}\theta + \int_0^{t_2} B_{13}^{(L)}(\theta)\mathrm{d}\theta + \int_0^{|t_1-t_2|}[B_{31}^{(L)}(\theta) - B_{33}^{(L)}(\theta)]\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

使用这些表达式，重复分部积分后，公式$D_{11}(\tau)$可以简化为

$$\begin{aligned} D_{11}(\tau) &= \frac{\Gamma^2}{3}\int_0^\tau (2\tau^3 - 3\tau^2\theta + \theta^3)B_{33}^{(L)}(\theta)\mathrm{d}\theta + \Gamma\int_0^\tau(\tau-\theta)^2 B_{31}^{(L)}(\theta)\mathrm{d}\theta \\ & +\Gamma\int_0^\tau(\tau^2-\theta^2)B^{(L)}(\theta)\mathrm{d}\theta + 2\int_0^\tau(\tau-\theta)B_{11}^{(L)}(\theta)\mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{9.57}$$

非常类似的计算得到下面D_{13}的公式：

$$D_{13}(\tau) = \Gamma\tau\int_0^\tau(\tau-\theta)B_{33}^{(L)}(\theta)\mathrm{d}\theta + \int_0^\tau(\tau-\theta)[B_{13}^{(L)}(\theta)+B_{31}^{(L)}(\theta)]\mathrm{d}\theta. \quad (9.57')$$

由方程（9.57）和（9.57'）得到下面大τ时的渐近方程：

$$D_{11}(\tau) \approx \frac{2}{3}\Gamma^2\overline{u_3'^2}T_3\cdot\tau^3, \quad D_{13}(\tau) \approx \Gamma\overline{u_3'^2}T_3\cdot\tau^2. \quad (9.58)$$

所以，流体粒子沿Ox_1轴在平均流动方向位移的方程对于大的τ渐近正比于τ^3。也就是，它随时间的增长显著快于横向位移方差的增长（正比于τ）。此外，沿Ox_1和Ox_3轴的位移是互相关联的。使用$D_{33}(\tau)$的渐近方程（9.35），我们得到下面变量$X_1(\tau)$和$X_3(\tau)$之间的相关系数值：

$$r_{X_1X_3} = D_{13}(\tau)[D_{11}(\tau)D_{33}(\tau)]^{-1/2} \to \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866... \ . \quad (9.59)$$

这个极限值是普适的，也就是说，它不依赖于参数Γ、$\overline{u'^2}_3$和T_3。

Corrsin (1959b)首先报告了渐近方程（9.58）和（9.59）。然而，由湍动扩散的半经验理论（使用了抛物性偏微分方程描述流体粒子分散）更容易得到等价的表达式。我们将在后面的章节（见10.4节）考虑这个问题。

Högström (1964)的结果非常类似于第一个方程（9.58）。他描述了具有沿OX_2轴严格恒定速度u_2（这使得可以使用坐标$X_2 = u_2\tau$代替时间τ），分量u_1 具有线性分布$u_1 = \Gamma X_3$，湍动速度涨落u_3'仅沿OX_3轴方向的流动中的流体分散。此外，假设$D_{33}(X_2) = CX_2^{2\alpha}$，Högström发现

$$D_{11}(X_2) = \Gamma^2 D_{33}(X_2)X_2^2/2(\alpha+1),$$

这和方程（9.58）一致，如果$\alpha = 1/2$。他随后使用这个关系式尝试解释一些大气扩散现象。后来，Smith (1965)[也参见这篇文章的讨论]研究了同样的问题。他考虑了速度涨落的所有三个分量并特别注意了粒子在给定时间$\tau(= X_2/u_1)$到达特定高度X_3的条件。然而，这里不讨论他的结果。

湍流边界层的拉格朗日特征量

现在让我们考虑湍流边界层中流体粒子位移的问题。如第3章和第4章，考虑流动充满$z > 0$的半空间，具体来说，壁面$z = 0$取为动力学完全粗糙的，粗糙度参数为z_0。Ox轴取为沿平均流动方向。不失一般性，可以假设给定的流体粒子在初始时刻$t = t_0$位于坐标$\boldsymbol{x} = (0, 0, H)$的点。令$[X(\tau), Y(\tau), Z(\tau)]$为这个粒子在时刻$t_1+\tau$的坐标，$\boldsymbol{V}(\tau) = [U(\tau), V(\tau), W(\tau)]$为

它在这个时刻的速度。随机函数$\boldsymbol{V}(\tau)$显然不是稳态的。所以，例如，对于足够大的时间间隔τ，这个粒子最有可能升到很高的高度$Z(\tau)$，从而强烈增大其水平速度$U(\tau)$。一般来说，没有理由预期函数$\boldsymbol{V}(\tau)$可以借助简单的新的长度和时间标度变换为稳态函数。然而，可以自然地假设，除了参数τ和H，边界层中湍流的拉格朗日统计特征量仅依赖于一个小的决定了湍流状态的“外部”参数（也就是进入欧拉统计特征量表达式的那些参数）。Kazanskiy, Monin (1957)[也参见Monin (1959a)]使用了这个从根本上简化了拉格朗日特征量研究的假设的隐式形式计算各种分层条件下大气表面层中烟羽的形式。后来Ellison (1959)和Batchelor (1959)[也参见Batchelor (1964)和Chatwin (1968)]对中性分层或无分层边界层的特殊情形精确写出并详细研究了这个假设。再后来，Gifford (1962)为这个假设补充了一些半经验假设，Yaglom (1965)由此推导出一系列关于热分层流体一般情形的推论。Gifford自己、Malhotra, Cermak (1963)和Cermak (1963)把他的结论和已有数据进行了比较。还需要提到Panofsky, Prasad (1965)、Pasquill (1966)、E. E. O’Brien (1966)、Mandell, O’Brien (1967)和Klug (1968)的工作。这些工作都致力于边界层流动的拉格朗日相似性处理后来的发展及其在大气表面层中扩散问题中的应用。这些应用将在10.5节中考虑。

因为之前讲述的命题包括边界层流体由少量参数描述的陈述，因此在使用它时，宜将我们限制于流体粒子运动不超过恒定应力区域（其中$\tau = \rho u_*^2 =$ 常量，其中τ是应力张量）上边界的情形，或者恒定热流区域的热分层流体（其中$\tau =$ 常量，$q =$ 常量，其中q是垂向热流）的情形。接着Ellison (1959)和Batchelor (1959; 1964)，我们从$q = 0$的中性边界层的情形开始。具体来说，例如，可以认为我们在处理中性分层条件下的大气表面层。在此情形，湍流状态由参数u_*和z_0确定。然而，重要的是，在非常薄的流体层（厚度和z_0同量级，紧靠$z = 0$壁面）外只有一个参数u_*起重要作用。z_0值的变化，也就是其位移z_0'，仅导致流体整体沿Ox轴以恒定速度

$$\frac{u_*}{\kappa}\ln\frac{z_0}{z_0'}$$

的额外水平位移，其中$\kappa \approx 0.4$是von Kámán常数（见上面第3章5.4节）。此外，很明显在足够长的时间τ之后，粒子必须“忘记”其初始高度H，也就是说，对于足够大的τ，高度H几乎不再影响流体粒子运动的统计特征量。由此得到，尽管随机矢量$\boldsymbol{V}(\tau)$的统计特征量一般会依赖于四个参量τ、H、u_*和z_0，但第二个参量和第四个参量的影响非常有限。初始高度H的影响仅在有限的时间内可以感受到，这段时间的长度基于量纲分析，一定是H/u_*的量级。同样，粗糙度参数z_0的值也仅在$H \lesssim z_0$重要，

并且在此情形仅在z_0/u_*的时间间隔内重要。如果$H \gg z_0$或$H \lesssim z_0$但$\tau \gg \frac{z_0}{u_*}$，那么z_0仅通过$-\frac{u_*}{\kappa}\ln z_0$形式的$\overline{U(\tau)}$的表达式作为一个额外的附加常数影响$\boldsymbol{V}(\tau)$ 的统计特征。

现在让我们研究流体粒子在时刻$t_0+\tau$的平均速度

$$\overline{\boldsymbol{V}(\tau)} = (\overline{U(\tau)}, \overline{V(\tau)}, \overline{W(\tau)}).$$

边界层对OXz平面的对称性表明，对于所有τ，$\overline{Y(\tau)} = 0$，于是$\overline{V(\tau)} = \frac{\overline{dY(\tau)}}{\mathrm{d}\tau} = 0$。对于分量$\overline{U(\tau)}$和$\overline{W(\tau)}$，根据上面，当$\tau \gg H/u_*$，或当$\tau \gg z_0/u_*$，如果$H=0$或一般来说，$H \lesssim z_0$，第二个分量仅依赖于$u_*$和$\kappa$，第一个一定等于某个$u_*$和$\tau$的函数以及常速度$-\frac{u_*}{\kappa}\ln z_0$之和。基于量纲考虑，我们得到

$$\overline{U(\tau)} = \frac{\mathrm{d}\overline{X(\tau)}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{u_*}{\kappa}\left(\ln\frac{u_*\tau}{z_0} + \mathrm{d}\right) = \frac{u_*}{\kappa}\ln\frac{cu_*\tau}{z_0}, \tag{9.60}$$

$$\overline{W(\tau)} = \overline{\frac{dZ(\tau)}{\mathrm{d}\tau}} = bu_*, \tag{9.61}$$

其中b和$c=e^d$是无量纲普适常数。这些方程对τ积分，我们发现对于足够大的τ，

$$\overline{X(\tau)} \approx \frac{u_*\tau}{\kappa}\left(\ln\frac{cu_*\tau}{z_0} - 1\right) = \frac{u_*\tau}{\kappa}\ln\frac{cu_*\tau}{ez_0}, \quad (9.60')$$

$$\overline{Z(\tau)} \approx bu_*\tau. \quad (9.61')$$

随着初始高度H增大，方程（9.60'）和（9.61'）随后变得适用，但参数b和c对任意H保持不变。尽管在流动的所有空间点，平均垂向欧拉速度$\overline{w(\boldsymbol{X})}$等于零，粒子有渐近不变的平均垂向速度$\overline{W(\tau)}$，故而，特别地$\overline{W(0)} = \overline{w(0,0,H)}$，这个事实和粒子无法下降到壁面$z=0$以下，但没有什么阻止它无限上升有关。所以，$Z(\tau)$的概率分布随$\tau$越来越向上扩展。于是，粒子的平均位移$\overline{Z(\tau)}$增大，这意味着$b>0$。由此得到，对于固定厚度$h$的$0 \le z \le h$的任意层，我们有一个向考上流体层的恒定质量外流。这一定被从上层向下的相等的质量内流所补偿。（让我们回忆一下，对于欧拉速度$w(\boldsymbol{X})$，不等式$\overline{w(\boldsymbol{X})} \neq 0$意味着质量守恒被破坏！）然而，似乎自然的是假设速度$\overline{W(\tau)}$小于欧拉垂向速度涨落的特征值，例如，小于$\sigma_w = (\overline{w^2})^{1/2}$。所以常数$b$明显小于1，实际上很多研究者提出了很多0.1到1之间的值，见下文。可以努力从近似方程

$$\overline{U(\tau)} \approx \overline{u}[\overline{Z(\tau)}] \tag{9.62}$$

开始计算常数c，其中$\overline{u}(Z)$是高度Z处的平均水平欧拉速度。让我们强调，在方程（9.62）中，不可能替换严格的等号。这是因为左边的平均是对时刻$\tau = 0$处于给定高度H的一组流体粒子进行的，而在右边，是对无论时间，处于固定高度$\overline{Z(\tau)}$的另一组流体粒子进行的。如果所讨论的流体粒子起始于一个给定高度H，但$\tau \gg \frac{H}{u_*}$，那么H对$\overline{U(\tau)}$没有显著影响。然而，即使在此情形，平均拉格朗日水平速度也不会严格等于高度$Z(\tau)$处的平均欧拉水平速度，因为$\overline{W(\tau)} > 0$。于是在表达式

$$\overline{U(\tau)} = \overline{U[X(\tau), Y(\tau), Z(\tau)]}$$

中，平均主要考虑从下方来到高度$Z(\tau)$的粒子。此外，即使可以认为

$$\overline{U(\tau)} = \overline{u[X(\tau), Y(\tau), Z(\tau)]}$$

（其中对于$X(\tau)$、$Y(\tau)$和$Z(\tau)$的固定值，右边对u值的平均是通常对欧拉速度值的平均），方程（9.62）也仍然不是严格的。实际上，$\overline{u}(Z)$增长得比Z慢，于是

$$\overline{\overline{u}[Z(\tau)]} \neq \overline{u}[\overline{Z(\tau)}].$$

让我们同时注意到，这两个原因一定会导致方程（9.62）左边小于右边。然而，我们希望在$\tau \gg \frac{H}{u_*}$时，方程（9.62）两边的差相对较小，使得从方程（9.62）、（9.60）和（9.61'）推导出来的表达式$c \approx b$可以用作一个可接受的或者至少时粗略的一级近似。然而，在某些情形，认为c比b小可能是合适的。（见10.5节，那里给出了c的半经验估计，根据这个估计，$c \approx 0.66$。）

使用量纲分析，也有可能推导矢量

$$\boldsymbol{V}'(\tau) = \boldsymbol{V}(\tau) - \overline{\boldsymbol{V}(\tau)} = (U'(\tau), V'(\tau), W'(\tau))$$

和

$$\boldsymbol{X}'(\tau) = \boldsymbol{X}(\tau) - \overline{\boldsymbol{X}(\tau)} = (X'(\tau), Y'(\tau), Z'(\tau))$$

的二阶和高阶矩。然而，更简单的是立即写下这些矢量概率密度的一般方程，由此得到它们所有统计特征量的表达式。如我们已经看到的，当$\tau \gg \frac{H}{u_*}$和$\tau \gg \frac{z_0}{u_*}$，$\boldsymbol{V}(\tau)$的概率分布只依赖于参数u_*和τ。于是，相应的概率密度一定具有这种形式

$$p(\boldsymbol{V}') = \frac{1}{u_*^3} P_1\left(\frac{U'}{u_*}, \frac{V'}{u_*}, \frac{W'}{u_*}\right), \tag{9.63}$$

其中$P_1(u,v,w)$是三个变量的普适函数。以类似的方式，矢量$\boldsymbol{X}'(\tau)$的概率密度由这种类型的公式确定：

$$p(\boldsymbol{X}') = \frac{1}{u_*^3\tau^3}P_2\left(\frac{X'}{u_*\tau}, \frac{Y'}{u_*\tau}, \frac{Z'}{u_*\tau}\right), \tag{9.64}$$

其中$P_2(x,y,z)$是另一个普适函数。特别地，可以立即由此得到，在对数边界层中，$D_{ij}(\tau) \sim \tau^2$，也就是，$D_{ij}(\tau) = d_{ij}u_*^2\tau^2$，其中$d_{ij}$是普适无量纲常量。根据方程（9.61'），方程（9.64）中的长度$u_*\tau$可以替换为正比于它的长度$\overline{Z} = \overline{Z(\tau)}$。所以，例如，矢量$\boldsymbol{X}(\tau)$的概率密度可以写为

$$p(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{\overline{Z}^3}P_3\left(\frac{X-\overline{X}}{\overline{Z}}, \frac{Y}{\overline{Z}}, \frac{Z-\overline{Z}}{\overline{Z}}\right), \tag{9.65}$$

其中函数P_3从P_2简单变换坐标轴标度得到。

现在让我们考虑更复杂的热分层边界层中流体粒子运动的情形，例如，非中性分层的大气表面层。这里，除了u_*，我们必须考虑这个问题的“外参数”，参数$q/c_p\rho_0$和g/T_0。由这三个变量有可能组成具有长度量纲的组合

$$L = -u_*^3/\kappa\frac{g}{T_0}\frac{q}{c_p\rho_0},$$

这在第4章的推导中起了重要作用。粗糙度参数z_0在此情形仅当$H \lesssim z_0$同时$\tau \lesssim \frac{z_0}{u_*}$时是必要的。如果$H \gg z_0$或$H \lesssim z_0$但$\tau \gg \frac{z_0}{u_*}$，那么把$z_0$换为$z_0'$仅导致空气整体沿$Ox$以恒定速度

$$\frac{u_*}{\kappa}\left[f\left(\frac{z_0'}{L} - f\left(\frac{z_0}{L}\right)\right)\right]$$

的额外运动，其中$f(\zeta)$是第4章中的一个普适速度分布函数。于是，当$\tau \gg \frac{H}{u_*}$和$\tau \gg \frac{z_0}{u_*}$，我们一定有这些表达式

$$\overline{U(\tau)} = \frac{\mathrm{d}\overline{X(\tau)}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{u_*}{\kappa}\left[\psi_1\left(\frac{u_*\tau}{L} - f\left(\frac{z_0}{L}\right)\right)\right], \tag{9.66}$$

$$\overline{W(\tau)} = \frac{\mathrm{d}\overline{Z(\tau)}}{\mathrm{d}\tau} = u_*\psi_2\left(\frac{u_*\tau}{L}\right), \tag{9.67}$$

其中ψ_1和ψ_2是变量$\xi = \frac{u_*\tau}{L}$的普适函数。对第二个表达式积分我们得到

$$\frac{\overline{Z(\tau)}}{L} = \psi_3\left(\frac{u_*\tau}{L}\right), \frac{u_*\tau}{L} = \Psi\left(\frac{\overline{Z(\tau)}}{L}\right), \tag{9.68}$$

其中

$$\psi_3(\xi) = \int_0^\xi \psi_2(\eta)\mathrm{d}\eta,$$

Ψ是ψ_3的反函数。借助方程（9.68），方程（9.66）-（9.67）可以重写为

$$\frac{\mathrm{d}\overline{X(\tau)}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{u_*}{\kappa}\left[\phi_1\left(\frac{\overline{Z(\tau)}}{L}\right) - f\left(\frac{z_0}{L}\right)\right], \tag{9.69}$$

$$\frac{\mathrm{d}\overline{Z(\tau)}}{\mathrm{d}\tau} = bu_*\phi\left(\frac{\overline{Z(\tau)}}{L}\right), \tag{9.70}$$

其中ϕ_1和ϕ是两个普适函数，引入常数b使得可以认为$\phi(0) = 1$。在这个条件下，b的值和方程（9.61）中相同。基于近似方程（9.62），我们也可以预期$\phi_1(\zeta) \approx f(\zeta)$。所以，作为一级近似，我们可以假设

$$\frac{\mathrm{d}\overline{X(\tau)}}{\mathrm{d}\tau} \approx \frac{u_*}{\kappa}\left[f\left(\frac{\overline{Z(\tau)}}{L}\right) - f\left(\frac{z_0}{L}\right)\right]. \tag{9.71}$$

然而，如果需要更高精度，必须认为对所有ζ有$\phi_1(\zeta) < f(\zeta)$。但到目前为止，没有关于$f(\zeta) - \phi_1(\zeta)$的数据。Gifford (1962)以及后来Malhotra, Cermak (1963)和Cermak (1963)使用了表达式（9.70）和（9.71）。此外，他们都提出但没有严格证明，函数$\phi(\zeta)$和方程（7.85）的函数$f_5(\zeta)$（描述了欧拉垂向速度的方均根值）仅相差一个常数因子。于是根据Kazanskiy和Monin的半经验公式（7.95），假设函数$\phi(\zeta)$满足方程

$$\phi(\zeta) = \left[1 - \frac{1}{f'(\zeta)}\right]^{1/4}.$$

当然，这个方程不是严格的，但其使用的正当性可以由这个事实说明，这里满足条件$\phi(0) = 1$，以及描述$|\zeta| \to \infty$时$\phi(\zeta)$行为的渐近规律。

对于三维矢量

$$\boldsymbol{X}(\tau) = (X(\tau), Y(\tau), Z(\tau))\ \text{对于}\ \tau \gg \frac{z_0}{u_*}\text{和}\tau \gg \frac{H}{u_*},$$

的概率密度$p(\boldsymbol{X})$，基于量纲考虑我们一定有这种类型的公式

$$p(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{\overline{Z}^3}P\left(\frac{X - \overline{X}}{\overline{Z}}, \frac{Y}{\overline{Z}}, \frac{Z - \overline{Z}}{\overline{Z}}; \frac{\overline{Z}}{L}\right), \tag{9.72}$$

其中$\overline{X} = \overline{X(\tau)}$和$\overline{Z} = \overline{Z(\tau)}$由方程（9.69）或（9.71）和（9.70）确定，$P(x, y, z; \zeta)$时

一个四变量的普适函数，最后一个变量为确定概率分布形式的参数。代替这个公式，上面引用的Gifford, Malhotra和Cermak的文章使用了较简单的公式：

$$p(\boldsymbol{X})=\frac{1}{\overline{Z}^3}P\left(\frac{X-\overline{X}}{\overline{Z}},\frac{Y}{\overline{Z}},\frac{Z-\overline{Z}}{\overline{Z}}\right);$$

也就是说，它隐含地给出了，概率分布形式对分层参数$\zeta=\frac{\overline{Z}}{L}$的依赖较弱，对于一级近似，可以忽略。然而，这个假设不是从量纲分析得到的。它仅仅被一些非常初步的实验结果证实[见Cermak (1963)]。

当$q>0$，也就是对于不稳定分层，也可以基于自由湍流状态的极限定律得到变量$\overline{W(\tau)}$和$\overline{Z(\tau)}$的一些简单的渐近结果[参见Yaglom (1965)]。实际上，当$\tau\gg\frac{|L|}{u_*}$和$\tau\gg\frac{H}{u_*}$，甚至很有可能当$\tau\gg\frac{0.1|L|}{u_*}$（由第4章第8节的一些经验结果得到），不仅初始高度H不再影响流体粒子的垂向运动，而且也不再影响变量u_*。实际上，在这些条件下，粒子会花费大部分时间在满足“纯”自由对流主导条件的流动区域中，这个条件不依赖于摩擦速度。所以，如果$q>0$或$L<0$，那么对于足够大的$-\xi$，或许甚至对于$-\xi>0.1$，方程（9.67）和（9.68）的函数$\psi_2(\xi)$和$\psi_3(\xi)$一定有下面的渐近形式：

$$\psi_2(\xi)\sim(-\xi)^{1/2}\text{和}\psi_3(\xi)\sim(-\xi)^{3/2}.$$

以完全相同的方式，方程（9.70）的函数$\varphi(\zeta)$可能甚至对于$-\zeta>0.1$也和渐近表达式$\varphi(\zeta)\sim(-\zeta)^{1/3}$相差无几。在此情形，当

$$\tau\gg 0.1|L|/u_*\text{和}\tau\gg\frac{H}{u_*},$$

下面的关系式成立：

$$\overline{Z(\tau)}\approx a\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{g}{T_0}\right)^{1/2}\tau^{3/2},\tag{9.73}$$

$$\overline{W(\tau)}=\frac{\mathrm{d}\overline{Z(\tau)}}{\mathrm{d}\tau}\approx\frac{3}{2}a\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{g}{T_0}\right)^{1/2}\tau^{1/2}\approx\frac{3}{2}a^{2/3}\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{g}{T_0}\right)^{1/3}[\overline{Z(\tau)}]^{1/3},\tag{9.74}$$

其中a是一个普适常数，其值原则上可以由实验确定。方程（9.73）和（9.74）非常类似于上面对于二维和三维对流射流得到的$\overline{X_1(\tau)}$和$\overline{V_1(\tau)}$的方程。方程（9.74）右边非常类似于σ_w的方程（7.87'）右边，这是简单地由这个事实解释的，变量σ_w和$\overline{W(\tau)}$有相同的量纲，几乎依赖于相同的有量纲参量，除了坐标z 的位移由$\overline{Z(\tau)}$解释。于是，方程（9.74）和（7.87'）的类

比不意味着系数C_5'和$(3/2)a^{2/3}$在数值上接近。相反，自然地是预期第二个系数明显小于第一个，也就是，a的值为十分之几。

关于自由对流条件下平均的水平朗格朗日速度

$$\overline{U(\tau)} = \frac{\overline{\mathrm{d}X(\tau)}}{\mathrm{d}\tau},$$

情况更复杂。这是因为这个速度可能依赖于参数u_*的，当$a_* = 0$，显然也有$\overline{U(\tau)} = 0$。然而，显然方程（9.69）中的函数

$$\varphi_1\left(\frac{\overline{Z(\tau)}}{L}\right) = \varphi_1(\zeta)$$

在此情形会随ζ增大（也就是随τ增大）接近常数值$f(-\infty)$。这由这个事实解释，随着时间推移，粒子上升到水平速度实际上恒定的流体层。为了更精确地计算$\overline{U(\tau)}$，可以使用$f(\zeta) = C_2\zeta^{-1/3} +$ 常数的近似公式（9.71）。也有可能在某些情形可以假设$\varphi_1(\zeta) = C_2'\zeta^{-1/3} +$ 常数，其中假设C_2'比方程（7.39）中的系数C_2小。然而，可以自然地假设在$\overline{Z(\tau)} > 0.1|L|$时，参数$u_*$仅影响流体粒子的平均水平位移速度，不影响湍流速度涨落。所以，我们可以预期，对于足够大的τ，对于不稳定热分层，我们有这个表达式：

$$\begin{aligned} p(U',V',W') &= \\ &= \frac{1}{\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{g}{T_0}\tau\right)^{3/2}} P_4\left(\frac{U'}{\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{g}{T_0}\tau\right)^{1/2}}, \frac{V'}{\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{g}{T_0}\tau\right)^{1/2}}, \frac{W'}{\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{g}{T_0}\tau\right)^{1/2}}\right) \\ &= \frac{1}{\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{g}{T_0}\overline{Z}} P_4'\left(\frac{U'}{\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{g}{T_0}\overline{Z}\right)^{1/3}}, \frac{V'}{\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{g}{T_0}\overline{Z}\right)^{1/3}}, \frac{W'}{\left(\frac{q}{c_p\rho_0}\frac{g}{T_0}\overline{Z}\right)^{1/3}}\right), \end{aligned} \tag{9.75}$$

和

$$p(X',Y',Z') = \frac{1}{\overline{Z}^3} P_5\left(\frac{X'}{\overline{Z}}, \frac{Y'}{\overline{Z}}, \frac{Z'}{\overline{Z}}\right),$$

这和湍动对流射流满足的表达式（9.54”'）和（9.54””）有关。特别地，由方程（9.73）和（9.75'）得到，渐近地，当$\tau \to \infty$，对于不稳定分层，$D_{ij}(\tau) \sim \tau^3$或者更精确地，$D_{ij}(\tau) = \delta_{ij}(qg/c_p\rho_0 T_0)\tau^3$，其中$\delta_{ij}$是普适常数。（很明显，所有这些结论都假设了“1/3幂律规律”对欧拉平均速度和温度成立的条件至少保持到高度$\overline{Z(\tau)}$。）

9.5 拉格朗日速度关联函数及其与欧拉统计特征量的关系

在前面一章，我们看到，在研究一个给定流体粒子的运动时，拉格朗日速度关联函数

$$B_{ij}^{(L)}(t_1,t_2;\boldsymbol{x})=\overline{V_i(\boldsymbol{x},t_1),V_j(\boldsymbol{x},t_2)}$$

起到了非常重要的作用。在下一节会讨论和这个函数有关的数据。同时，让我们仅注意到，这些数据非常少，并且不精确，因为缺少可靠的方法测量湍流的拉格朗日统计特征量。于是，值得至少简单在讨论一下理论上（或者直接地，或者从它们与研究得更充分的随机场$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)$的欧拉统计特征量的关系开始）确定这些特征量可能的方法的问题。

本小节的相似性考虑也可以应用于在初始时刻t_0具有固定坐标$\boldsymbol{x}_1$和$\boldsymbol{x}_2$的两个流体粒子相对运动的统计特征量。相对的二-粒子统计特征量和湍流中一团有标记的粒子相对一个粒子或相对这团粒子质心的相对扩散过程紧密相关，这将在本书第2卷第24节详细讨论。这里，我们将仅讨论关于边界层流二-粒子相对位移矢量$\boldsymbol{l}(\tau)=\boldsymbol{X}_2(\boldsymbol{x}_2,t_0+\tau)-\boldsymbol{X}_1(\boldsymbol{x}_1,t_0+\tau)$的特征量。随机矢量$\boldsymbol{l}(\tau)$的概率分布依赖于湍流状态的参数，时间$\tau$和初始坐标$\boldsymbol{x}_1$和$\boldsymbol{x}_2$，或者更准确地，仅依赖于$\boldsymbol{l}_0=\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1$和$z_1$。然而，可以自然地预期，如果$\tau$足够大，不再对粒子初始为止的细节（即$l_0$和$z_1$）有统计上的依赖。所以，渐近概率密度函数和矢量$\boldsymbol{l}(\tau)$的矩量在$\tau\to\infty$时满足和矢量$\boldsymbol{X}'(\tau)=[X'(\tau),Y'(\tau),Z'(\tau)]$同样的方程。特别地，在无分层边界层中，$\overline{l_i(\tau)l_j(\tau)}\sim u_*^2\tau^2$，在不稳定边界层中，$\overline{l_il_j}\sim(qg/c_p\rho_0T_0)\tau^3$[参见E. E. O'Brien (1966)和Mandell, O'Brien (1967)]。

Mandell, O'Brien (1967)也借助本小节引入的普适函数的泰勒级数表达式考虑了一些对渐近结果的更高阶近似。然而，普适函数对宗量零值的泰勒展开不是从量纲考虑出发的，而是取决于宗量特定形式的选择。所以，不能认为这些结果和纯量纲推导有同样的严格性。

由欧拉统计特征量确定拉格朗日统计特征量的问题显然不简单。实际上，由基本方程

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{u}[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t),t],\quad \boldsymbol{X}(\boldsymbol{t},t)=\boldsymbol{x}+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t')dt' \tag{9.76}$$

（这实际上是变量$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$和$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$的定义），时刻$t$的拉格朗日变量依赖于欧拉场$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)$在随机轨迹$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t'),t_0\le t'\le t$上所有点的值。这条轨迹定义

为一个含有场$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)$积分方程组

$$X_i(\boldsymbol{x},t') = x_i + \int\limits_{t_0}^{t'} u_i[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t''),t'']dt'', i = 1,2,3 \tag{9.77}$$

的解。所以，一般来说，每个拉格朗日变量的概率分布依赖于所有可能的矢量场的函数空间中$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)$的整个无穷维概率分布。此外，甚至场$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)$和$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$或$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)$和$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$的函数空间分布之间的关系也非常复杂，对其明确描述得到的结果不能应用于任何具体湍流[见Lumley (1962b)]。

对函数空间中概率分布的研究可以避免，假设函数$u_i(\boldsymbol{X},t), i = 1,2,3$对所有变量是解析的，因此可以展开为泰勒级数。由此可以得到结论，所有拉格朗日变量可以用欧拉速度及其在单个时空点的所有偏导数表示。把$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$和$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$表示为幂级数

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t^n}\bigg|_{t=t_0} (t-t_0)^n \\
&= \boldsymbol{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t^n}\bigg|_{t=t_0} (t-t_0)^n \\
\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t^n}\bigg|_{t=t_0} (t-t_0)^n \\
&= \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t^n}\bigg|_{t=t_0} (t-t_0)^n
\end{aligned} \tag{9.78}$$

有可能使用方程（9.76）把这些级数的系数变换为这种形式

$$\frac{\partial^n \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t^n}\bigg|_{t=t_0} = \frac{\partial^{n-1} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t^{n-1}}\bigg|_{t=t_0}, n = 1,$$

$$\frac{\partial^n \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t^n}\bigg|_{t=t_0} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{u}_i\left(\boldsymbol{X},t\right)\frac{\partial}{\partial X_i}\right)^n \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)\bigg|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x},t=t_0}, n = 0,1,2,... \tag{9.79}$$

也就是把它们用点$(\boldsymbol{x},t_0)$的欧拉变量表示。由方程（9.78）-（9.79）可以得到一些重要的一般性结论。例如，如Lumley (1962a)注意到的，直接得到，如果随机场$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)$是统计均匀的，那么随机场$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t) - \boldsymbol{x}$

和$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$也是统计均匀的。这个事实实际上已经在9.3节使用。然而，如果我们使用这些公式确定拉格朗日统计特征量，这些结果没什么重要性。对于场$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{x},t)$和$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$的矩量，可以得到作为无限数量单点欧拉统计特征量乘以$t-t_0$各次幂求和的非常复杂的表达式。使用这种表达式计算拉格朗日特征量仅对于非常小的$t-t_0$是可能的，此时级数（9.78）中除了头几项的所有项都可以忽略。例如，在应用到拉格朗日速度关联函数时，仅成功计算了阶数不高于$(t-t_0)^2$的项，即使对于$(t-t_0)^2$的项，所得到的估计也非常复杂。

只有在$t-t_0$的零阶项的情形，也就是在t_0时刻，情况简单，因为根据定义，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t_0)$。所以，例如

$$B_{ij}^{(L)}(t_0,t_0;\boldsymbol{x})=\overline{u_i(\boldsymbol{x},t_0)u_j(\boldsymbol{x},t_0)}=B_{ij}(t_0,t_0;\boldsymbol{x}).$$

所以，对于不可压缩流体和统计均匀的场$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)$，以及场$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$，对于拉格朗日速度的单点和单时刻特征量也可以得到类似的结果。这里让我们根据Lumley (1962a)简单给出其证明。在点$\boldsymbol{x}$的空间中，我们选择体积R并研究这种类型的积分

$$\int\limits_R \varphi(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t))\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

其中

$$\varphi(\boldsymbol{V})=\varphi(V_1,V_2,V_3)$$

是某个三变量函数。在这个积分中，我们从变量x_1,x_2,x_3变换为新的变量X_1,X_2,X_3，其中$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$。在不可压缩流体的情形，并且只有在此情形，这样的变换可以由这个事实而极大简化：相应的雅可比行列式

$$\frac{\partial(X_1,X_2,X_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}=[X_1,X_2,X_3]$$

如我们所知，恒等于1[见方程（9.6）]。于是，在此情形

$$\int\limits_R \varphi(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t))\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int\limits_{R_t} \varphi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t))\mathrm{d}\boldsymbol{X}, \tag{9.80}$$

其中R_t是时刻t_0填满区域R的流体在时刻t填满的空间区域。此外，如果场$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$和$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)$是统计均匀的，那么方程（9.80）两边积分号下的函数的概率平均值不依赖于坐标。然而，我们不能简单地对方程（9.80）两边平均并且把函数φ的平均值从积分号下拿出来。这是因为右边的积分区域R_t是

随机的，依赖于场$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)$。然而，因为流体填满的空间是无界的（否则就不是均匀的），对于任意固定时刻t，我们可以把R选为，例如，一个所需半径的球。特别地，我们可以将其半径选得足够大，使得R_t和R仅在相对靠近R的相差不规则形状的区域，并且体积很大概率不超过球R 总体积的足够小的一部分。所以，很大概率我们把方程（9.80）右边对R_t的积分换位类似的对固定区域R的积分仅引入一个非常小的误差。现在，对所得到的近似方程两边平均并除以体积R，我们发现

$$\overline{\varphi(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t))}=\overline{\varphi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t))}, \tag{9.81}$$

其中我们写了严格的等号，因为这里相对误差可以通过选择足够大的R而变得任意小。特别地，如果$\varphi(\boldsymbol{V})=e^{\mathrm{i}\lambda_\alpha V_\alpha}$，那么$\varphi(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t))$是拉格朗日速度$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$的特征函数，$\varphi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t))$是欧拉速度$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$ 的特征函数。所以，*对于不可压缩流体中的均匀湍流，欧拉和拉格朗日速度的概率分布在所有时刻都相同*。所以，在均匀湍流中，不可能有边界层流动情形碰到的那种悖论：

$$\overline{u_3(\boldsymbol{x},t)}\equiv 0,\text{但}\overline{V_3(\boldsymbol{x},t)}\neq 0.$$

显然，我们的所有论证都只针对一点和一时刻概率分布。对于二-时刻概率分布，楷体字的叙述一般来说是不对的。所以，对于拉格朗日速度关联函数$B_{ij}^{(L)}(t_1,t_2;\boldsymbol{x})$，我们对于均匀湍流只能得出结论

$$B_{ij}^{(L)}(t,t;\boldsymbol{x})=B_{ij}(t)=\overline{u_i(\boldsymbol{X},t)u_j(\boldsymbol{X},t)},$$

而得不出关于$B_{ij}^{(L)}(t_1,t_2)$对t_2-t_1的依赖关系。然而，如果速度场$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)$不仅是均匀的，而且是稳态的，那么函数$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X},t)$对$t$是稳态的。我们实际上在上面也使用了这个情况。实际上，用（9.78）-（9.79）形式的泰勒级数代表

$$V_j(\boldsymbol{x},t+\tau)=u_j[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t+\tau),t+\tau]$$

用t代替t_0，$t+\tau$代替t，有可能把关联函数写为在拉格朗日点$(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t),t)$计算的单点欧拉特征量乘以$t$的幂次的和。所以，如果由于场$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$为稳态和均匀的，所有欧拉单点特征量都不依赖于$t$，那么

$$B_{ij}^{(L)}(t,t+\tau)=B_{ij}^{(L)}(\tau).$$

上面对于无界空间中的稳态均匀湍流的理想情形证明了方程（9.81），并且它对于大气表面层湍流近似正确，参见Lumley, Panofsky (1964)，142-

144页。然而，对于无限长直管道重点湍流页可以建立同样类型的等式。所以只需要把R取为截面$x_1 = a$和$x_1 = b$之间足够长的一段管道。对于任意固定的$\tau = t - t_0$，我们可以选择足够大的$b - a$，使得R_t区域和R只相差边缘$x_1 = a$和$x_1 = b$处小的不规则形状的区域，这个区域的体积和总体积R相比非常小。方程（9.80）两边除以体积R并平均，我们在右边得到一个值，基本上是函数$\overline{\varphi(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t))}$对截面$x_1 = a$和$x_1 = b$以及管壁所包围体积的平均。左边是变量$\overline{\varphi(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t))}$，它对于足够大的$t - t_0$ 一般可以认为不依赖于$\boldsymbol{x}$（和9.3节末比较）。特别地，由$\varphi(\boldsymbol{u}) = u_1$，用这种方式我们得到方程（9.37）之前讨论过的$\overline{V}_1 = U_{\text{av}}$。

让我们再次考虑均匀稳态湍流的简单情形。在此情形，$\overline{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{U} =$ 常量，不失一般性，甚至可以考虑$\boldsymbol{U} = 0$，如我们后面将要做的。这等价于简单变换到一个新的惯性系。如果$B_{ij}^{(L)}(\tau) = \overline{V_i(\boldsymbol{x},t)V_j(\boldsymbol{x},t+\tau)}$是这个湍流的拉格朗日速度相关张量，并且

$$B_{ij}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\tau) = \overline{u_i(x_1,x_2,x_3,t)u_i(x_1+\xi_1,x_2+\xi_2,x_3+\xi_3,t+\tau)}$$

是时空欧拉相关张量，那么我们知道$B_{ij}^{(L)}(0) = B_{ij}(0,0,0,0)$。然而，对于$\tau > 0$，$B_{ij}^{(L)}(\tau)$一般来说不能用$B_{ij}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\tau)$的值表示。有用缺少函数$B_{ij}^{(L)}(\tau)$的可靠数据，一些研究者尝试假设$B_{ij}^{(L)}(\tau) = B_{ij}(0,0,0,\tau)$[见，例如Baldwin, Mickelsen (1962)，他们也将这个假设的结果和实验进行了比较]。然而，这个假设没有理论基础。更自然的是假设拉格朗日速度相关系数

$$R_{ii}^{(L)}(\tau) = B_{ii}^{(L)}(\tau)/\overline{V_i'^2}$$

[不对i求和]它描述了给定流体粒子在时刻t的第i个速度分量之间的相关，并且在$t+\tau$随τ的增大的减小比欧拉相关系数（描述了在时刻t和时刻$t+\tau$处于同一空间点的哪些流体粒子的速度之间的相关）

$$R_{ii}(\tau) = \frac{B_{ii}(0,0,0,\tau)}{\overline{u_i'^2}}$$

慢。如果是这样的，那么当$\tau > 0$，下面的不等式对所有$i = 1,2,3$成立：

$$R_{ii}^{(L)}(\tau) > R_{ii}(\tau).$$

由这个不等式，特别地可以得到，拉格朗日相关时间、拉格朗日宏观

时标或拉格朗日积分时标

$$T_i = \int_0^\infty R_{ii}^{(L)}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

一定大于欧拉相关时间、宏观时标或积分时标

$$T_i' = \int_0^\infty R_{ii}(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

而完全相同地，拉格朗日微观时标或微分时标

$$\theta_i = \left[-2/\left\{\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}R_{ii}^{(L)}(\tau)\right\}_{\tau=0}\right]^{1/2}$$

一定大于欧拉微观时标或微分时标

$$\theta_i' = \left[-2/R_{ii}''(0)\right]^{1/2}.$$

不幸的是，有用缺少在接近均匀稳态条件下同时测量欧拉和拉格朗日时标的数据，还不可能直接检验这些结论。然而，如Corrsin (1963)注意到的，比较Favre, Gavigho, Dumas (1953)在产生湍流的网格后的风洞中对欧拉时空速度关联的测量和Uberoi, Corrsin (1953)在类似条件下进行的扩散实验，使得假设在这些条件下$\frac{\theta_i'}{\theta_i} \approx 0.7$是合理的。当平均速度$|\overline{\boldsymbol{u}}| = \overline{\boldsymbol{U}}$不等于零，并且相对较大，可以预期欧拉相关系数

$$R_{ii}(\tau) = B_{ii}(0,0,0,\tau)/\overline{u_i'^2}$$

随τ的增大而减小，比$U = 0$时快得多。这个相关系数描述了时刻t和$t+\tau$以很大速度经过一个给定空间点的流体粒子（也就是它们实际上相距很大距离）的速度之间的关系。实际上，假设

$$R_{22}(\tau) = R_{22}^{(L)}(\beta\tau) \tag{9.82}$$

（其中Ox_2轴的方向沿垂直于平均风的水平方向），Hay, Pasquill (1959)从大气中水平扩散的数据发现，在非常粗略的一级近似下，$\beta \approx 4$。很多研究者接下来在这个领域的研究[见，例如，Lumley, Panofsky (1964) 197－201页、N. Thompson (1965)和Haugen(1966)]表明，β的经验估计弥

散异常大，但是证实了其平均值[见下文，方程（10.11）后面]。由方程（9.82）得到

$$T_2 = \beta T_2' \text{和} \theta_2 = \beta \theta_2',$$

所以，$\beta = 4$的值对应于拉格朗日时标显著超过欧拉时标。

关于拉格朗日和欧拉时间相关函数形式一致性的方程（9.82）经常用于湍流扩散的研究中。这可以认为是可接受的，因为在很多情形下函数$R_{ii}^{(L)}(\tau)$ 的精确形式不特别重要，见，例如方程（9.36）后的讨论。实际上，这个命题没有理论基础。此外，在本书第2卷第8章中会证明，对应足够大的雷诺数，

$$R_{ii}^{(L)}(\tau) \approx 1 - C_i\tau \text{对于} \theta_i^2/T_i \ll \tau \ll T_i,$$

而对于非常大的Re和$\overline{u} \gg \left(\overline{u'^2}\right)^{1/2}$（Hay和Pasquill的实验满足这些条件），欧拉时间相关函数$R_{ii}(\tau)$ 对于这些τ具有这种形式

$$R_{ii}(\tau) \approx 1 - C_i'\tau^{2/3}$$

如果$\overline{u} = 0$它对τ还是线性的，比较Corrsin (1963)，那里由各种时标比对雷诺数的依赖对相关函数进行了近似计算。所以，当$\overline{u} \gg \left(\overline{u'^2}\right)^{1/2}$，方程（9.82）不能对所有$\tau$满足。一般来说，对于和相应相关时间相当的$\tau$值，拉格朗日和欧拉相关函数的行为是未知的。所以，仅在特别的纯经验或半经验假设下，由可能在理论上确定函数$R_{ii}^{(L)}(\tau)$的形式。

Saffman (1963)对于一个特殊形式的欧拉时刻关联函数$R_{ij}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \tau)$（假设表达式（9.22）中所有$t$的速度$V_j(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}, t)$ 可以替换为欧拉速度$u_j(\boldsymbol{X}, t)$）近似计算了函数$R_{ii}^{(L)}(\tau)$。然而，因为我们已经注意到，这个假设是没有根据的，所以我们不进一步讨论。Inoue (1950-1951)和Ogura (1952b)研究了一组各种尺度速度场扰动情形的湍流运动模型，其中拉格朗日关联函数$R_{ii}^{(L)}(\tau), i = 1, 2, 3$都由下面的普适公式给出：

$$R_{ii}^{(L)}(\tau) = 1 - \frac{\tau}{2T_i} \text{对于} 0 \le \tau \le 2T_i \text{和} R_{ii}^{(L)}(\tau) = 0 \text{对于} \tau > 2T_i.$$

然而，Inoue (1952, 1959)后来得到结论，另一个模型更方便，其中$R_{ii}^{(L)}(\tau) = e^{-\tau/T_i}$。Grant (1957)使用了一个特殊的混合长假设来计算函数$R_{ii}^{(L)}(\tau)$，得到了一个更复杂但普适的公式

$$R_{ii}^{(L)}(\tau) = 1 - \frac{\tau}{4T_i} + \frac{\tau}{4T_i} \ln \frac{\tau}{4T_i} \text{对于} 0 \le \tau \le 4T_i \text{和} R_{ii}^{(L)}(\tau) = 0 \text{对于} \tau > 4T_i.$$

后来Matsuoka (1960)略微修改了上面提到的Inoue的第一个模型，得到了同样的结果。Wandel, Kofoed-Hansen (1962, 1967)提出了另一个湍流模型。在他们的模型中，对于拉格朗日关联函数没有得到一个普适公式，但是这个函数可以非常简单地用欧拉时间关联函数表示。Philip (1967)还提出了欧拉和拉格朗日特征量之间关系的另一个假设。由一个简化的涡旋模型（湍流是叠加在平均流动上的圆形涡旋系统）也可以得到其他关系式。然而，实际

上，拉格朗日关联函数不是在所有均匀稳态湍流中都有同样的形式，不能用欧拉时间或时空关联函数唯一表达。所以，这里列举的所有结果只能认为式对实际情形的近似，其精度由于缺乏可靠的数据，还没法估计。

10. 湍动扩散

10.1 湍动扩散描述的问题

在上一节中研究了湍流中单个“流体粒子”的运动。对于“流体粒子”，我们这里指的就是一团很小的流体，在连续理论的框架内可以认为是和周围流体一起运动的一个点。然而，很明显，如果流体中没有粒子以某种方式被“标记”以便跟踪流体的运动，那么所得到的结果就无法和观测结果相比较。换句话说，前一节发展的理论仅当某些流体元有标记（也就是说，具有某些性质可以和周围流体区分开）的时候是适用的。这种性质的不同最经常是由于化学组成的差异，或者在单个体积元中存在和流体本身不同的“外来物质”。然而，它可能和温度差异一样简单。在任何情形，为了提供“被标记的”例子，我们应该说在流动中有一些外加物。这里，关于外加物，我们指的是具有特殊性质、运动可以追踪的流体粒子。

如果我们仅在湍流的特定部分引入外加物，那么由于它在构成流动的无序混杂细丝中输运，它迅速分散到流体占据的整个体积。这个称为*湍动扩散*的线性是湍流的明确特性。在雷诺的经典实验中，湍流的发生被精确定义为这样一种现象，即在加入少量染料后，整个流体快速着色。很明显，除了湍动扩散，外加物通常也参与和湍流无关的分子扩散。然而，这个过程相对要慢得多，所以在湍流中它只起到相对小的作用。湍动扩散主导了重要和著名的现象，例如花粉在大气中的分散、细菌和病毒、放射性物质、火山灰和海盐的分散、特别是在城市中由于工业和交通烟雾和气体造成的空气污染、从地球表面和所有类型的水库蒸发的水汽的输运、水库表面漂浮物的分散等等。所以湍动扩散得到广泛研究并不奇怪，见，例如，Sutton (1953)、Frenkiel, Sheppard (1959)和Pasquill (1962b)以及Batchelor andTownsend (1956)、Ellison (1959)、Monin (1959c)和其他人的综述文章。

为了使被标记的流体粒子可以以上面第9节的意义视为“流体粒子”，只需要标记的外加物是被动的，或者对流体运动没有影响，并且以与相应点的瞬时速度几乎一致的速度运动。特别地，外加物粒子必须足够细，或线尺度小于速度$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)$发生显著改变的距离，密度和周围流体非常接近，外加物的重力沉降或浮力上身都不显著。甚至在这里，外加粒子仍然不能完全等同于理想的“流体粒子”。实际上，任何外加物也可以由分子扩

散或流体分子热运动导致的布朗运动而扩散，而分子运动对“流体粒子”没有影响，流体粒子实际上是连续介质中服从流体动力学方程的“数学点”。尽管在10.2节进行了更详细的讨论，但它不是特别重要，在大部分情形可以完全忽略。

如果外加粒子可以单独观测，那么有可能通过追踪它们的运动来确定单独的拉格朗日轨迹$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}(t)$。于是可以尝试通过对一系列这种轨迹得到的数据进行平均来计算湍流的拉格朗日统计特征量。这个方法在气象学中广泛运用，因为使用了所谓无升力气球（具有特别选择的重量使得它们漂浮在空气中既不网上也不往下）和通常的空气球。[见例如，Pasquill (1962b)，那里可以也可以找到原始工作的参考文献。也进行了使用其他示踪物，例如肥皂泡、蓟种子冠毛等的实验，参见Pasquill (1962b)和Lumley, Panofsky (1964)的综述。]然而，这样得到的结果只能非常初步地估计拉格朗日速度关联函数和大气湍流的其他拉格朗日特征量。这是因为示踪物通常只能追踪一小段时间，通常不能精确跟随空气运动。在最后这方面，气球是最可疑的。

通常，外加物以流体或气体添加剂或大量细的固体颗粒的形式的方式引入流动中。通常，可以完全放心地认为外加物在空间中连续分布，并且由体积浓度的欧拉场$\vartheta(\boldsymbol{X}, t)$表征。（在可压缩流体中，更方便的特征量是质量比浓度ϑ/ρ，但这里我们仅考虑不可压缩流体中的扩散。）对于描述湍动扩散，我们要了解给定初始条件和边界条件（包括外外加物所有来源的分配）的场的统计描述。在存在外加物源的情况下，一般来说，浓度场$\vartheta(\boldsymbol{X}, t)$是非均匀的，其数学期望，*平均浓度*$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)}$是$\boldsymbol{X}$和$t$的某个函数。这个函数的确定是湍动扩散理论中最重要（尽管不是独一无二）的问题。

为了描述湍动扩散，可以从这个事实开始，在湍流的每个实现中，不含外加物源区域的浓度场$\vartheta(\boldsymbol{X}, t)$满足给定边界条件的分子扩散方程

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial u_\alpha \vartheta}{\partial X_\alpha} = \chi \nabla^2 \vartheta. \tag{10.1}$$

因为外加物是被动的，也就是场$\boldsymbol{u}$不依赖于变量ϑ，所以方程（10.1）对ϑ是线性的。通常，边界条件也对ϑ是线性的，通常它们有这种形式

$$\chi \frac{\partial \vartheta}{\partial n} + \beta \vartheta = f(t), \tag{10.2}$$

其中n垂直于边界，β是某个常数。对于限制了流动的固体壁面，边界条件是均匀的，即$f(t) = 0$。这里$\beta = \infty$对应于壁面完全吸收了外加物，$\beta = 0$对应于外加物完全不能穿透壁面，$0 < \beta < \infty$对应于外加物在

边界被部分吸收和部分排斥的情形。在W. Feller, A. D. Wentzel最近的工作和一些其他数学家在马尔可夫随机过程一般理论中的工作中，研究了更一般或者在某种意义上最一般的边界条件。这些条件考虑了外加物到达边界暂时停止及其沿边界扩散的可能性[见，例如，Dynkin (1965)]。然而，因为这类效应在外加物分散中几乎没有实际的重要性，我们不讨论相应的同样为线性的边界条件。对应在任何方向不受限制的流动，无穷远出的边界条件通常取为要求$\vartheta \to 0$的形式。也就是，它们也有方程（10.2）的形式，有$f(t=0)$和$\beta=\infty$。外加物的瞬时源通常用$\vartheta(\boldsymbol{X},t)$初始条件描述。$f(t)\neq 0$的（10.2）类似的非均匀边界条件对应于连续的活动源。（各种类型的源的这些条件的更多细节在下面给出。）

对于均匀边界条件，给定区域中场$\vartheta(\boldsymbol{X},t)$的演化完全由外加物的输运、速度场$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)$和分子扩散决定。原则上，借助流体动力学方程，速度场由初始场$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t_0)=\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{X})$唯一确定。于是，对于给定初始浓度场$\vartheta(\boldsymbol{X},t_0)=\vartheta_0(\boldsymbol{X})$方程（10.1）的解可以写为

$$\vartheta(\boldsymbol{X},t)=A[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{X}),t]\vartheta_0(\boldsymbol{X}), \tag{10.3}$$

其中A是某个依赖于初始速度场$\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{X})$、参数$t$和边界条件形式的某个算符。让我们强调，由于方程（10.1）和边界条件为线性，这个算符是线性的。

对于湍流的统计描述，把初始速度场$\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{X})$考虑为随机的，也就是假设在湍流的实现（所有可能的无散度矢量场）的函数空间中存在某个相应的概率分布。然而，在此情形，依赖于随机场$\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{X})$的算符$A[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{X}),t]$也是一个随机算符，由线性算符（算符$A$所允许的实现）空间的某个概率分布确定。于是，对于固定的$\vartheta_0(\boldsymbol{X})$，浓度场$\vartheta(\boldsymbol{X},t)$在$t>t_0$是随机的，因为它依赖于$A$，也就是说，依赖于$\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{X})$。这里场$\vartheta(\boldsymbol{X},t)$的平均值由这个方程定义：

$$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t)}=\overline{A[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{X}),t]\vartheta_0(\boldsymbol{X})}=\overline{A}(t)\vartheta_0(\boldsymbol{X}), \tag{10.4}$$

其中算符$\overline{A}(t)=\overline{A[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{X}),t]}$是从随机算符$A[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{X}),t]$用概率平均的方法或对在场$\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{X})$的工具的概率测度积分得到的。因为算符$A[\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{X}),t]$对任意$\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{X})$是线性的，并且平均是一个线性操作，所以得到的平均算符$\overline{A}(t)$也是线性的。所以，对于固定的初始浓度场$\overline{A}(t)$，平均浓度$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t)}$满足某个线性方程。使用方程（10.3）也可以得到关联函数以及场$\vartheta_0(\boldsymbol{X})$的高阶矩的方程。然而，这些方程是非线性的，并且复杂得多，此外，对它们的研究很少[但是可以参见Csznady (1967a,b)，那里研究了$\vartheta(\boldsymbol{X},t)$的方差]。已有的大部分描述湍流扩散的方法简化为仅构建平均浓度$\overline{\vartheta}(\boldsymbol{X},t)$的线性方程，或

者等价地，找到理论的、半经验的或纯经验的线性算符$\overline{A}(t)$。

假设为了确定平均浓度，和湍动扩散相比我们可以忽略分子扩散（这个假设正确的条件将在下一小节研究），那么算符$\overline{A}(t)$可以用比之前具体得多的形式代表。实际上，让我们首先研究这个情形，在初始时刻$t=t_0$，整个外加物（物理量Q）集中在一个位于点$\boldsymbol{x}$的“流体粒子”。在此情形

$$\vartheta_0(\boldsymbol{X})=Q\delta(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x}).$$

因为分子扩散可以忽略，外加物在所有时刻保持在同一个流体粒子中，和开始时一样。也就是说，在时刻t它会位于点$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$。于是

$$\vartheta(\boldsymbol{X},t)=Q\delta[\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)].$$

考虑到

$$\overline{\delta[\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)]}=p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x},t),$$

所示“流体粒子”在时刻t坐标的概率密度，我们得到

$$\overline{A}(t)\delta(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{x})=p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x},t).$$

由于算符$\overline{A}(t)$的线性，对于任意初始场$\vartheta_0(\boldsymbol{X})$我们现在可以用叠加原理，于是得到

$$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t)}=\overline{A}(t)\vartheta_0(\boldsymbol{X})=\int p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x},t)\vartheta_0(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{10.5}$$

所以，忽略分子扩散，得到平均浓度$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t)}$简化为确定一个“流体粒子”坐标$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$的概率密度。让我们注意到，基于方程（10.5），函数$p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x},t)$本身可以解释为（在初始时刻$t=t_0$在点$\boldsymbol{x}$镩子一个单位浓度的瞬时外加物点源情形的）浓度场$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t)}$。这样就有可能从9.3节提到的扩散实验数据经验地确定$p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x},t)$。

如果算符$\overline{A}(t)$已知，也就是，如果知道怎么计算对应于给定初始场$\vartheta_0(\boldsymbol{X})$的平均浓度场$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t)}$，那么也容易确定对应于实际中碰到的不同类型外加物源的平均浓度。例如，让我们再一次研究方程（10.5）定义的“纯湍动”扩散的情形，其中为了简单，速度场$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)$考虑为稳态的，这对应于稳态湍流。在此情形，流体粒子（在时刻t_0它处于点$\boldsymbol{x}$）在时刻$t_0+\tau$ 的坐标的概率密度$p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x},t+\tau)$可以方便地记作符号$p_1(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x},\tau)$。于是，和$p_1$不同，函数$p$不依赖于参数$t_0$。输出为$Q$（产生$Q$单位质量的外加物）的瞬时点源的平均浓度等于$Qp_1(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x},t-t_0)$。对于位于点$\boldsymbol{x}$输出为$Q$的持续活跃的稳态点源，也就是单位时间产生$Q$单位质量的外加物，平均浓

度$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t)}=\overline{\vartheta(\boldsymbol{x})}$不依赖于时间，并且由这个方程给出：

$$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X})}=Q\int_{-\infty}^{t}p_1(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x},t-t_0)dt_0=Q\int_{0}^{\infty}p_1(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x},\tau)\mathrm{d}\tau. \qquad (10.6)$$

在实践中通常也必须处理具有恒定平均速度$\overline{u}=U$沿OX_1轴方向流动中的扩散。在此情形，方便的是首先变换到一个随平均流运动的坐标系。这里来自点$\boldsymbol{x}$处持续活跃稳态点源的平均浓度假设为这种形式

$$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X})}=Q\int_{0}^{\infty}p_1(X_1-U\tau,X_2,X_3|\boldsymbol{x},\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad (10.6')$$

其中$p_1(X_1,X_2,X_3|\boldsymbol{x},\tau)$是没有平均运动的流体粒子坐标的概率密度。在沿$OX_2$轴的线源的情形，平均浓度$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t)}$通过$(0,x_2,0)$处的点源浓度对$x_2$的积分得到。于是，对于沿$OX_2$轴方向均匀并且存在沿$OX_1$轴的平均流动速度$U$的稳态湍流，来自$OX_2$轴瞬时线源的平均浓度有这种形式

$$\overline{\vartheta(X_1,X_3,t)}=Q\int_{-\infty}^{\infty}p_1(X_1-U\tau,X_2,X_3|0,t-t_0)dX_2=Qp_1(X_1-U\tau,X_3|0,t-t_0). \qquad (10.7)$$

这里Q是单位长度OX_2轴产生的外加物的量，考虑为常量，也就是不依赖于X_2，并且

$$p_1(X_1,X_3|0,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}p_1(X_1,X_2,X_3|0,\tau)\mathrm{d}X_2$$

是（零平均速度的流动中在时刻t_0位于点$\boldsymbol{x}=0$的）流体粒子在时刻$t_0+\tau$的坐标X_1和X_3的二维概率密度。

以完全相同的方式，对于OX_2轴上持续活跃输出为Q（即单位长度在单位时间产生Q单位质量的外加物）的稳态线源，平均浓度$\overline{\vartheta(X_1,X_3)}$等于

$$\overline{\vartheta(X_1,X_3)}=Q\int_{0}^{\infty}p_1(X_1-U\tau,X_3|0,\tau)\mathrm{d}\tau. \qquad (10.8)$$

使用前一节给出的“流体粒子”坐标的矩量$\overline{X_i}$和$\overline{X_iX_j}$的方程，我们现

在可以用湍流的拉格朗日特征量表达

$$\int X_i\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t)}\mathrm{d}\boldsymbol{X},\int X_iX_j\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t)}\mathrm{d}\boldsymbol{X}$$

和其他类似的量。另一方面，这些量也可以用扩散实验得到的平均浓度$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t)}$确定。这使得有可能得到关于拉格朗日特征量的明确经验信息。作为一个粒子，让我们考虑最简单的情形，平均速度U远远超过涨落速度典型值的流动中位于OX_2轴上持续活跃线源的情形。在此情形，对方程（10.8）右边对$\mathrm{d}\tau$积分的基本贡献来自接近X_1/U的τ值。所以，这里我们可以以很高的精度假设

$$\overline{\vartheta(X_1,X_3)}=\text{常数}\cdot p_1\left(X_3|0,\frac{X_1}{U}\right), \tag{10.9}$$

其中

$$p_1(X_3|0,\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p_1(X_1,X_3|0,\tau)\mathrm{d}X_1$$

是流体粒子坐标X_3的一维概率密度。特别地，基于泰勒的方程（9.31）我们可以得到，对于$U\gg(\overline{u_1'^2})^{1/2}$ 的均匀湍流

$$\frac{\int\limits^{\infty}-\infty X_3^2\overline{\vartheta(X_1,X_3)}\mathrm{d}X_3}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{\vartheta(X_1,X_3)}\mathrm{d}X_3}=\overline{[X_3(X_1)]^2}=2\overline{u_3^2}\int\limits_0^{X_1/U}\left(\frac{X_1}{U}-\tau\right)R_{33}^{(L)}(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{10.10}$$

其中，和第9节中一样，

$$\overline{u_3^2}R_{33}^{(L)}(\tau)=\overline{V_3'(0,t)V_3'(0,t+\tau)}.$$

于是，一个稳态线性外加物源后面尾流的平均宽度（自然地认同为$(\overline{X_3^2})^{1/2}$）在距离源较小的距离处正比于这个距离而增加，因为

$$\overline{X_3^2}\approx\frac{\overline{u_3^2}X_1^2}{U^2}\text{对于}X_1\ll UT_3=U\int\limits_0^{\infty}R_{33}^{(L)}(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

这被Kalinske, Pien (1944)、Uberoi, Corrsin (1953)、Townsend (1954)和其他扩散实验的数据很好地证实。类似地，已经证明，在同样的条件下，稳态点源后的尾流一定首先有坠的形式，然后是旋转抛物面。这也早已被实验室实验和强风中工厂烟囱烟羽的观测很好地证实[参见G. 1. Taylor

(1921)以及Orlob (1959)更近期的实验]。

根据方程（10.10），

$$\frac{\mathrm{d}^2\overline{X_3^2}}{\mathrm{d}X_1^2}=2\frac{\overline{u_3^2}}{U^2}R_{33}^{(L)}\left(\frac{X_1}{U}\right),\tag{10.11}$$

故而原则上也有可能从$\overline{X_3^2(X_1)}$的经验值得到函数$R_{33}^{(L)}(\tau)$。然而，实际上，这样确定的$R_{33}^{(L)}(\tau)$的精度极低。这是因为必须对实验数据求导两次，这在实际中总是非常不确定的。然而，一些研究者，例如，G. I. Taylor (1935b)、Collis (1948)、Barad (1959)和Panofsky (1962)已经尝试用这种方法至少得到了拉格朗日速度关联函数的近似值。其他研究者，特别是Kalinske, Pien (1944)、Uberoi, Corrsin (1953)、Mickelsen (1955)、Hay, Pasquill (1959)、Baldwin, Mickelsen (1962)、Hogstrom (1964)、N. Thompson (1965)和Haugen (1966)主要使用稳态线源或点源后尾流中变量$\overline{X_3^2}$的测量来得到拉格朗日统计量的更多详细信息并估计拉格朗日积分时标

$$T=\int_0^\infty R_{33}^{(L)}(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

所以，假设侧向风分量的欧拉和拉格朗日关联函数彼此相似，Hay和Pasquill用这种方法推导了大气表面从中相应的正比系数β 的粗略值$\beta\approx 4$[见方程（9.32）后的文字，在那里已经提到了这一点]。Kalinske, Pien (1944)和Uberoi, Corrsin (1953)进行了实验室实验，测量稳态线源后的尾流中的函数值$\overline{X_3^2}(X_1)$。由此他们估计了时标T和函数$R_{33}^{(L)}(\tau)$的其他一些参数，然后用这些参数细化了方程（10.11）得到的$R_{33}^{(L)}(\tau)$值。然而，即使这样，函数$R_{33}^{(L)}(\tau)$的形式也很不确定。让我们也注意到，在所提的的大部分实验中，测量是针对热扩散（Taylor、Collis、Uberoi和Corrsin）或空气中外来气体的扩散（Mickelsen、Barad、Thompson、Hauger），故而在这里忽略分子扩散需要特别证明，这在所有这些工作中都没有。类似在Hay和Pasquill的实验中，以及在Högström的实验中研究了石松孢子和烟的大气扩散，原则上粒子的布朗运动有部分贡献。在Kalinske-Pien实验中研究了小液滴（密度和水相同）在水中的扩散，分子扩散几乎没有任何影响，但湍流均匀性的假设在每个情形似乎都不是非常准确。

如9.3节所示，对于均匀湍流，有足够的理由假设“流体粒子”坐标的概率分布对任意扩散时间都非常接近高斯分布。换句话说，如果我们取坐

标轴为流体粒子位移的协方差张量

$$D_{ij}(\tau) = \overline{[X_i(\tau) - x_i][X_j(\tau) - x_j]},$$

的主轴，那么对于任意τ我们可以取

$$p_1(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x},\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}[D_{11}(\tau)D_{22}(\tau)D_{33}(\tau)]^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(X_1 - x_1)^2}{2D_{11}(\tau)} - \frac{(X_2 - x_2)^2}{2D_{22}(\tau)} - \frac{(X_3 - x_3)^2}{2D_{33}(\tau)}\right\} \tag{10.12}$$

其中方程$D_{ii}(\tau)$借助方程（9.31）用赋范的拉格朗日速度关联函数$R_{ii}^{(L)}(\tau)$表示。把这个方程带入一般表达式（10.5）-（10.9），在不总是被完全证明的假设（平均速度方向和张量$D_{ij}(\tau)$的一个主轴重合）下，有可能使这些表达式更具体，有可能考虑他们对各种极限情形的渐近行为，有可能得到一些更简单的近似公式，并且有可能对于具体选择的函数$R_{ii}^{(L)}(\tau)$进行详细的计算[Frenkiel (1952, 1953)、Fleischman, Frenkiel (1954)，也可以比较Hinze (1959)第5.5节和本书第10.4节开头]。

通常外加物不仅可以考虑为在空间连续分布的组分，也可以考虑为一组分立的粒子。有时后一种观点甚至更方便。尽管如此，我们在未来不会使用这个模型，为了完整，让我们在这里给出触及了分立外加物场的数学描述的一些结果。让我们把外加物粒子的总数记作N，总质量取为1。我们考虑粒子之间没有差别并且是统计等价的，意思是对于任意$k \le N$，任意空间区域$V_1, ..., V_k$和任意数$l_1, ..., l_k, 1 \le i_s \le N$，概率

$$P\{\boldsymbol{X}_{i_1} \in V_1, ..., \boldsymbol{X}_{i_k} \in V_k\}$$

（其中$\boldsymbol{X} \in V$表示点$\boldsymbol{X}$属于区域V）不依赖于数$i_1, ..., i_k$。由此，特别地，所有随机矢量$\boldsymbol{X}_i$相同分布的，并且

$$P\{\boldsymbol{X}_{i_1} \in V_1, ..., \boldsymbol{X}_{i_k} \in V_k\}$$

是区域$V_1, ..., V_k$的对称函数。

在固定时刻的分立外加物分布将完全由区域$\mu(V)$的随机函数表征，其值等于在给定时刻在空间区域V所含的外加物质量。这个随机函数在这里起到了和连续分布外加物的随机场$\vartheta(\boldsymbol{X})$相同的作用（更准确地说，$\mu(V)$是变量$\int_V \vartheta(\boldsymbol{X})\mathrm{d}\boldsymbol{X}$的类比）。函数$\mu(V)$显然是区域的可加函数，意思是对于不重叠的区域$V_1$和$V_2$，$\mu(V_1 + V_2) = \mu(V_1) + \mu(V_2)$。取代决定随机场$\vartheta(\boldsymbol{X})$的多维概率分布，我们现在得到所有可能的空间区域$V_1, ..., V_k$的有限集合的概率

$$P_{n_1,...,n_k}(V_1, ..., V_k) = P\left\{\mu(V_1) = \frac{n_1}{N}, ..., \mu(V_k) = \frac{n_k}{N}\right\}. \tag{10.13}$$

在本小节剩下的部分，为了简单，我们仅考虑不重叠的区域$V_1, ..., V_k$的概率（10.13）。在独立统计等价外加物粒子的特殊情形，分布（10.13）退化为所谓的多项式分布

$$P_{n_1 \cdots n_k}(V_1, ..., V_k) = C_N^{n_1 \cdots n_k}[Q_1(V_1)]^{n_1}...[Q_1(V_k)]^{n_k} \times [1 - Q_1(V_1) - ... - Q_1(V_k)]^{n_0},$$

其中

$$n_0 = N - n_1 - ... - n_k, C_N^{n_1 \cdots n_k} = \frac{N!}{n_1!...n_k!n_0!}, Q_1(V) = P\{\boldsymbol{X}_1 \in V\}.$$

所以在独立粒子的情形，函数$\mu(V)$完全由所有区域V的概率$Q_1(V)$值给出。在互相依赖的统计等价粒子的一般情形，分布（10.13）代表多项式分布的某种推广，为了指定它，必须知道所有概率

$$Q_{n_1\ldots n_k}(V_1,...,V_k)=P\left\{\boldsymbol{X}_1\in V_1,...,\boldsymbol{X}_{n_1}\in V_1;...;\boldsymbol{X}_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1}\in V_k,...,\boldsymbol{X}_{n_1+\ldots+n_k}\in V_k\right\}. \tag{10.14}$$

可以证明，随机变量$\mu(V_1),...,\mu(V_k)$的任意矩量可以用概率（10.14）借助公式

$$\overline{\prod_{s=1}^{k}[\mu(V_s)]^{m_s}}=\frac{N!}{N^m}\sum_{n_1+\ldots+n_k\leq m}\frac{a_{n_1}^{m_1}\ldots a_{n_k}^{m_k}}{n_0!}Q_{n_1\ldots n_k}(V_1,...,V_k), \tag{10.15}$$

表示，其中$m=m_1+...+m_k$是矩量的阶数，a_n^m是所谓的Stirling数，仅当$0<n\leq m$时不为零，并且满足边界条件为$a_m^m=a_1^m=1$的差分方程$a_n^m=a_{n-1}^{m-1}+na_n^{m-1}$。所以，特别地，随机函数$\mu(V)$的$m$阶矩完全由$m$个粒子坐标的联合概率分布确定，换句话说，$n_1+...+n_k\leq m$的概率（10.4）以$m$阶矩量的精度定义了随机函数$\mu(V)$。

当$m=1$，由方程（10.15）我们得到

$$\overline{\mu(V)}=Q_1(V), \tag{10.16}$$

这和方程（10.5）类似，更准确地说，和对方程（10.5）两边在区域V对$\boldsymbol{X}$积分得到的方程类似。当$m=2$，由方程（10.15）和（10.16）我们得到

$$\overline{[\mu(V)-\overline{\mu(V)}]^2}=Q_2(V)-[Q_1(V)]^2+\frac{1}{N}[Q_1(V)-Q(V)], \tag{10.17}$$

$$\overline{[\mu(V_1)-\overline{\mu(V_1)}][\mu(V_2)-\overline{\mu(V_2)}]}=Q_{11}(V_1,V_2)-Q_1(V_1)Q_1(V_2)-\frac{1}{N}Q_{11}(V_1,V_2). \tag{10.18}$$

第一个方程表明，在粒子之间统计上存在相互作用或$Q_2(V)\neq[Q_1(V)]^2$时，固定体积V中外加物的量的涨落（平方平均）在$N\to\infty$ 时也不会无限减小。换句话说，在互相依赖的粒子的情形，甚至对于非常大量的N个粒子，$\mu(V)$值对于不同的实现也非常不同。方程（10.18）表明，此外，在此情形两个不同的无重叠区域的外加物的量是相互关联的。重要的是，粒子之间相关依赖是湍动扩散的典型特征。实际上，这里邻近粒子的运动显著受到速度场中同样扰动的影响，因此互相是统计相关的。所以对于湍动扩散，每个体积中外加物浓度有显著的涨落，并且对于邻近但不重叠的体积、对于任意N甚至当$N=\infty$都是互相依赖的。这最后一个情形也由浓度为$\vartheta(\boldsymbol{X})$（连续依赖于$\boldsymbol{X}$）的连续分布外加物的模型描述。

10.2 分子扩散和湍动扩散之间的相互作用

湍动流体中运动的流体粒子输运导致的外加物传播，也就是湍动扩散，通常比分子运动导致的扩散（也就是分子扩散）快。所以，例如，在大气表面层中，被动外加物的虚拟“涡扩散率”，即，外加物的湍动流量和浓度梯度的比，通常具有量级为$10^4-10^5\ \mathrm{cm}^2\ \mathrm{sec}^{-1}$ 的值。换句话说，它比分子扩散系数（对于大部分气体为$10^{-1}\ \mathrm{cm}^2\ \mathrm{sec}^{-1}$的量级）大$10^5-10^6$倍。由于湍动扩散，浓度足以影响人类的嗅觉的香烟烟雾，在数秒内分散到整个房间，而如果仅有分子扩散，达到同样的效果需要许多天。然而，

这是否意味着描述湍动扩散可以完全忽略分子扩散？

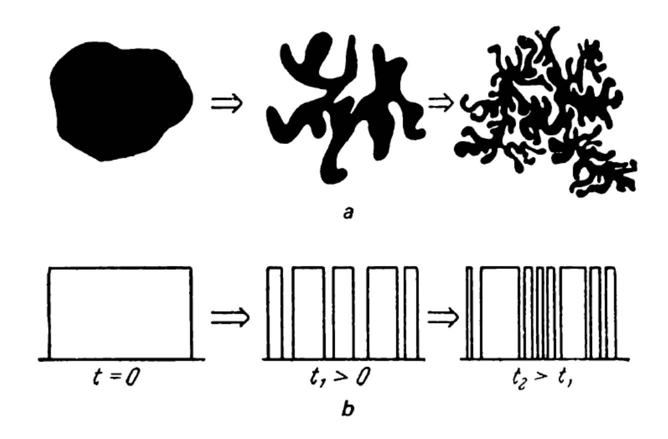


图 77 a-由于湍动扩散导致的外加物占据的空间形态的变化；b-沿与这个空间相交的一条直线的外加物浓度分布的示意形式。

运动流体粒子对外加物的输运显然会导致外加物首先占据的体积在某些方向上扩展，而在另一些方向上被压缩，扭曲得相当混乱。（这将在第2卷第8章中详细讨论。）然而，这种变形不改变外加物的总体积。于是，在湍流的每个实现中，具体的任意时刻在每个点的浓度$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t)}$要么等于外加物浓度$\rho_0$，要么等于0，取决于初始时刻$t=t_0$相应的流体粒子是否含有外加物。[借自Corrsin (1959a)的示意图，见图79。]所以湍动扩散导致在流体中形成高度变形和扭曲的流体层，具有剧烈变化的外加物浓度。相邻流体层中浓度的等化（伴随着外加物占据的体积的增大以及浓度场的平滑，于是函数$\vartheta(\boldsymbol{X},t)$的值通常介于$\rho_0$和0之间）仅仅是分子扩散的结果，较慢，扩散系数$\chi$ 较小。很明显，由此，对于场$\vartheta(\boldsymbol{X},t)$小尺度统计结构的描述，不可能忽略分子扩散。否则当$t$很大，我们得到一个图79右边描绘的非常不自然的浓度分布。然而，像前一小节方程（10.5）的推导中那样在求平均浓度$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t)}$时，分子扩散和湍动扩散相比是否不可能忽略的问题，是非常复杂的。显著我们处理这个问题。

为了研究分子扩散和湍动扩散在产生平均浓度场$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t)}$时的相对作用，为了简单，我们限制于平均速度为零的均匀湍流场中来自单位输出的瞬时点源的外加物的扩散的问题。我们考虑这个源在时刻$t=t_0$放置在点$\boldsymbol{X}=0$。换句话说，我们应该考虑对应方程（10.1）初始条件为$\vartheta(\boldsymbol{X},t_0)=\delta(\boldsymbol{X})$的解的浓度$\vartheta(\boldsymbol{X},t)$。让我们限制于沿某个单一的固定方向的外加物扩散，例如，沿OX_1轴方向。作为分子扩散角色的特征量，我们使用这种扩散对平均浓度分布$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t)}$的弥散的相对贡献。这里必须区

分，一方面，平均浓度分布相对源的位置$\boldsymbol{X}=0$的弥散

$$D_0^2(t)=\int X_1^2\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t)}\mathrm{d}\boldsymbol{X}, \tag{10.19}$$

另一方面，浓度分布$\vartheta(\boldsymbol{X},t)$的引力中心

$$X_c(t)=\int X_1\vartheta(\boldsymbol{X},t)\mathrm{d}\boldsymbol{X}$$

的弥散（也是相对源的位置$\boldsymbol{X}=0$），也就是方差

$$\overline{X_c^2(t)}=\overline{\left[\int X_1\vartheta(\boldsymbol{X},t)\mathrm{d}\boldsymbol{X}\right]^2}. \tag{10.20}$$

此外，浓度分布$\vartheta(\boldsymbol{X},t)$ 相对其引力中心的弥散也很有趣：

$$D_c^2(t)=\overline{\int [X_1-X_c(t)]^2\vartheta(\boldsymbol{X},t)\mathrm{d}\boldsymbol{X}}. \tag{10.21}$$

然而，使用归一化条件

$$\int\vartheta(\boldsymbol{X},t)\mathrm{d}\boldsymbol{X}=1$$

（这表达了外加物质量守恒定律），不难证明

$$D_c^2(t)=D_0^2(t)-\overline{X_c^2(t)}, \tag{10.22}$$

所以只计算$D_0^2(t)$和$\overline{X_c^2(t)}$就足够了。

此外，方便的是从稳态坐标系$\boldsymbol{X}$变换到非稳态非惯性坐标系$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}(0,t)$，其参考原点在每个时刻和时刻$t_0$位于点$\boldsymbol{X}=0$的流体粒子所在的点重合。对于这个新参考系中的浓度场，我们采用这种记号

$$\theta(\boldsymbol{Y},t)=\vartheta[\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{X}(0,t),t]=\vartheta(\boldsymbol{X},t). \tag{10.23}$$

显然

$$\frac{\partial\theta(\boldsymbol{Y},t)}{\partial Y_i}=\left.\frac{\partial\vartheta(\boldsymbol{X},t)}{\partial X_i}\right|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{X}(0,t)}.$$

另一方面，

$$\frac{\partial\theta(\boldsymbol{Y},t)}{\partial t}=\frac{d}{dt}\vartheta[\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{X}(0,t),t]=\frac{\partial\vartheta}{\partial t}+\boldsymbol{V}_\alpha(0,t)\frac{\partial\vartheta}{\partial X_\alpha}, \tag{10.24}$$

其中$\boldsymbol{V}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(0,t)}{\mathrm{d}t}$是时刻$t_0$位于点$\boldsymbol{X}=0$的流体粒子的拉格朗日速度。于是，方程（10.1）在这个移动坐标系中取这种形式

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\{u_i[\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{X}(0,t),t]-V_i(0,t)\}\frac{\partial\theta}{\partial Y_i}=\chi\nabla^2\theta, \tag{10.25}$$

其中∇^2是对变量(Y_1,Y_2,Y_3)的拉普拉斯算符，$\boldsymbol{V}(0,t)$是移动坐标系坐标原点相对初始稳态坐标系的速度。浓度$\theta(\boldsymbol{Y},t)$也满足归一化条件

$$\int\theta(\boldsymbol{Y},t)\mathrm{d}\boldsymbol{Y}=1$$

我们使用的时候不再进一步说明。此外，方程（10.19）和（10.20）在变换到新的坐标系后，假设分布有这些形式

$$D_0^2(t)=\overline{\int[Y_1+X_1(0,t)]^2\theta(\boldsymbol{Y},t)\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}=\overline{X_1^2(0,t)}+2\overline{X_1(0,t)\int Y_1\theta(\boldsymbol{Y},t)\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}+\overline{\int Y_i^2\theta(\mathrm{d}\boldsymbol{Y},t)\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}, \tag{10.26}$$

和

$$\overline{X_c^2(t)}=\overline{\left\{\int[Y_1+X_1(0,t)]\theta(\mathrm{d}\boldsymbol{Y},t)\mathrm{d}\boldsymbol{Y}\right\}^2}=\overline{X_1^2(0,t)}+2\overline{X_1(0,t)\int Y_1\theta(\boldsymbol{Y},t)\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}+\overline{\left[\int Y_1\theta(\boldsymbol{Y},t)\mathrm{d}\right.} \tag{10.27}$$

我们将限于对小的$t-t_0$值计算$D_0^2(t)$和$\overline{X_c^2(t)}$。我们假设所有矩量

$$\langle Y_1^{k_1}Y_2^{k_2}Y_3^{k_3}\rangle=\int Y_1^{k_1}Y_2^{k_2}Y_3^{k_3}\theta(\boldsymbol{Y},t)\mathrm{d}\boldsymbol{Y} \tag{10.28}$$

（其中k_1,k_2,k_3是非负指数）可以用$t-t_0$整数幂的泰勒级数表示。于是弥散$D_0^2(t)$和$\overline{X_c^2(t)}$也可以用$t-t_0$幂级数的形式表示，对于级数前几项的计算，只需要知道级数方程（10.26）和（10.27）中矩量$\langle Y_i\rangle$ 和$\langle Y_i^2\rangle$级数的前几项。

让我们使用方程（10.25）计算矩量（10.28）。这里我们有$u_i[\boldsymbol{X}(0,t),t]=V_i(0,t)$，于是，方程（10.25）左边括号里的速度差可以用这种形式表示：

$$u_i[\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{X}(0,t),t]-V_i(0,t)=Y_\alpha\frac{\partial u_i}{\partial X_\alpha}+\frac{1}{2}Y_\alpha Y_\beta\frac{\partial^2u_i}{\partial X_\alpha\partial X_\beta}+\frac{1}{6}Y_\alpha Y_\beta Y_\gamma\frac{\partial^2u_i}{\partial X_\alpha X_\beta X_\gamma}+..., \tag{10.29}$$

其中$u_i(\boldsymbol{X},t)$的导数都是在点$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(0,t)$取的，也就是说，它们只是$t$的函数。现在让我们把展开式（10.29）带入方程（10.25），然后对所有项乘以$Y_1^{k_1}Y_2^{k_2}Y_3^{k_3}$并对$\boldsymbol{Y}$积分。考虑到$\frac{\partial u_i}{\partial X_i}\equiv0$，在对含有$\theta(\boldsymbol{Y},t)$的空间导数的

项分部积分后，我们得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\langle Y_1^{k_1}Y_2^{k_2}Y_3^{k_3}\rangle &= \chi\sum_{i=1}^{3}k_i(k_i-1)\left\langle\frac{Y_1^{k_1}Y_2^{k_2}Y_3^{k_3}}{Y_i^2}\right\rangle \\
&+\sum_{i=1}^{3}k_i\frac{\partial u_i}{\partial X_\alpha}\left\langle\frac{Y_\alpha Y_1^{k_1}Y_2^{k_2}Y_3^{k_3}}{Y_i}\right\rangle+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}k_i\frac{\partial^2 u_i}{\partial X_\alpha\partial X_\beta}\left\langle\frac{Y_\alpha Y_\beta Y_1^{k_1}Y_2^{k_2}Y_3^{k_3}}{Y_i}\right\rangle \\
&+\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{3}k_i\frac{\partial^3 u_i}{\partial X_\alpha\partial X_\beta\partial X_\gamma}\left\langle\frac{Y_\alpha Y_\beta Y_\gamma Y_1^{k_1}Y_2^{k_2}Y_3^{k_3}}{Y_i}\right\rangle+...,
\end{aligned}
\tag{10.30}
$$

其中含有Y_i负幂次的矩量都取为恒等于零。

从方程（10.28）明显可以看到，零阶矩（$k_1=k_2=k_3=0$）严格等于1，因为$\theta(\boldsymbol{Y},t_0)=\delta(\boldsymbol{Y})$，所有剩下的矩量在$t\to t_0$时接近于零。所以，$t-t_0$的线性项仅在方程（10.30）右边含有一个零阶矩的矩量表达式中出现。不难看出，具有这种形式的矩量仅有$\langle Y_1^2\rangle$，它们的领头项具有这种形式：

$$
\langle Y_1^2\rangle=2\chi(t-t_0)+.... \tag{10.31}
$$

然而，为零确定我们下面所需的矩量$\langle Y_1^2\rangle$的级数的后面的项，我们也必须写出$t\to t_0$时$(t-t_0)^2$阶的所有矩量。

很明显，这些和$\langle Y_i^2\rangle$不同的非零阶矩量（方程（10.30）右边的被加项中含有矩量$\langle Y_i^2\rangle$）对$t-t_0$是二阶的。容易证明，只有矩量

$$
\langle Y_i\rangle,\langle Y_i^4\rangle\text{以及}\langle Y_iY_j\rangle,\langle Y_i^2Y_j^2\rangle\text{对于}i\neq j
$$

是这一类的。此外，它们的领头项具有这种形式

$$
\begin{aligned}
\langle Y_i\rangle &= \frac{1}{2}\chi\Delta u_i(t-t_0)^2+..., \\
\langle Y_iY_j\rangle &= \chi\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}+\frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)(t-t_0)^2+..., \\
\langle Y_i^4\rangle &= 12\chi^2(t-t_0)^2+..., \\
\langle Y_i^2Y_j^2\rangle &= 4\chi^2(t-t_0)^2+...,
\end{aligned}
\tag{10.32}
$$

其中$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)$的所有导数都是在时空点$\boldsymbol{X}=0,t=t_0$取的。

让我们考虑$D_0^2(t)$和$\overline{X_c^2(t)}$的计算，精确到$(t-t_0)^3$阶。因为

$$\boldsymbol{X}(0,t)=\boldsymbol{u}(0,t_0)(t-t_0)+...,\tag{10.33}$$

为此我们必须知道矩量$\langle Y_1\rangle$到$(t-t_0)^2$阶，$\langle Y_1^2\rangle$到$(t-t_0)^3$阶。所以$\langle Y_1\rangle$的方程（10.32）对于我们的目的足够，但$\langle Y_1^2\rangle$必须改进。为零确定缺失的项，让我们对于$k_1=2,k_2=k_3=0$单独写出方程（10.30）：

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle Y_1^2\rangle=2\chi+2\frac{\partial u_1}{\partial X_\alpha}\langle Y_\alpha Y_1\rangle+\frac{\partial^2 u_1}{\partial X_\alpha X_\beta}\langle Y_\alpha Y_\beta Y_1\rangle+\frac{1}{3}\frac{\partial^3 u_1}{\partial X_\alpha\partial X_\beta\partial X_\gamma}\langle Y_\alpha Y_\beta Y_\gamma Y_1\rangle+....$$

考虑这个公式右边不高于$(t-t_0)^2$阶的项，使用方程（10.32）我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\langle Y_1^2\rangle &= 2\chi+2\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\langle Y_1^2\rangle+2\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\langle Y_1Y_2\rangle+2\frac{\partial u_1}{\partial X_3}\langle Y_1Y_3\rangle\\ &\quad+\frac{1}{3}\frac{\partial^3 u_1}{\partial X_1^3}\langle Y^4\rangle+\frac{\partial^3 u_1}{\partial X_1\partial X_2^2}\langle Y_1^2Y_2^2\rangle+\frac{\partial^3 u_1}{\partial X_1\partial X_3^2}\langle Y_1^2Y_3^2\rangle\\ &= 2\chi+2\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\langle Y_1^2\rangle+2\chi\left[\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}+\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)\right.\\ &\quad\left.+\frac{\partial u_1}{\partial X_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3}+\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)\right](t-t_0)^2+4\chi^2\frac{\partial\nabla^2 u_1}{\partial X_1}(t-t_0)^2+....\end{aligned}$$

因为$\frac{\partial u_1}{\partial X_1}=\left.\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right|_{t=t_0}+\left.\frac{d}{dt}\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right|_{t=t_0}(t-t_0)+...$，我们有

$$\begin{aligned}\langle Y_1^2\rangle &= 2\chi(t-t_0)+2\chi\frac{\partial u_1}{\partial X_1}(t-t_0)^2+\frac{2}{3}\chi\left\{2\frac{d}{dt}\frac{\partial u_1}{\partial X_3}+2\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2\right.\\ &\quad\left.+\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}+\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)+\frac{\partial u_1}{\partial X_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3}+\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)+2\chi\frac{\partial\nabla^2 u_1}{\partial X_1}\right\}(t-t_0)^3+...,\end{aligned}\tag{10.34}$$

其中$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)$的所有导数都是$t=t_0$时在点$\boldsymbol{X}=0$取的。

此外，我们只需要矩量$\langle Y_1^2\rangle$的平均值。让我们回想一下，我们在考虑均匀湍流，其中所有仅依赖于单个空间点$\boldsymbol{X}$的变量都是常量。特别地，

$$\overline{\frac{d}{dt}\frac{\partial u_1}{\partial X_1}}=\frac{\partial}{\partial X_1}\overline{\frac{\partial u_1}{\partial t}}+\frac{\partial}{\partial X_\alpha}\overline{u_\alpha\frac{\partial u_1}{\partial X_1}}=0.$$

所以在均匀湍流中

$$\overline{\langle Y_1^2\rangle} = 2\chi(t-t_0)+\frac{2}{3}\chi\left\{\overline{2\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1}\right)^2+\frac{\partial u_1}{\partial X_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2}+\frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right)+\frac{\partial u_1}{\partial X_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3}+\frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right)}\right\}(t-t_0)^3+\ldots.$$

大括号中的表达式容易变换为下面的形式：

$$\overline{\frac{\partial u_1}{\partial X_\alpha}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_\alpha}+\frac{\partial u_\alpha}{\partial X_1}\right)} = \overline{(\nabla u_1)^2}+\frac{\partial}{\partial X_\alpha}\overline{u_1\frac{\partial u_\alpha}{\partial X_1}} = \overline{(\nabla u_1)^2},$$

我们最终得到

$$\overline{\langle Y_1^2\rangle} = 2\chi(t-t_0)+\frac{2}{3}\chi\overline{(\nabla u_1)^2}(t-t_0)^3+\ldots. \qquad (10.35)$$

让我们同时注意到，根据方程（10.22）、（10.26）、（10.27）和（10.32），精确到$(t-t_0)^3$阶项的变量$D_c^2(t)$和$\langle Y_1^2\rangle$相同，于是

$$D_c^2(t) = 2\chi(t-t_0)+\frac{2}{3}\chi\overline{(\nabla u_1)^2}(t-t_0)^3+\ldots. \qquad (10.36)$$

在不运动的流体中，分子扩散把时刻$t=t_0$聚集在一点的单位质量的外加物转变为一团球对称浓度分布，弥散为$2\chi(t-t_0)$。从方程（10.36）可以明显看到，当$t-t_0$非常小，这个方程右边第二项和第一项相比可以忽略，外加物分布$\vartheta(\boldsymbol{X},t)$相对其引力中心$\boldsymbol{X}_c(t)$的平均弥散可以假设为$2\chi(t-t_0)$。换句话说，可以考虑（在任何情形，在一定程度上这和弥散有关）在从点源开始的湍动扩散第一阶段，分子扩散作用下的外加物分散叠加在相应流体粒子的输运上，但和这种输运没有相互作用。然而，对于较大的$t-t_0$值，情况有些不同，因为方程（10.36）右边存在第二项。于是，弥散$D_c^2(t)$开始比不运动流体中的分子扩散要快。这里额外的项不仅依赖于流体分子扩散系数χ，也依赖于湍流运动速度梯度的平方平均。所以，发生分子扩散和湍动扩散之间的相互作用，导致分子扩散加速。也就是外加物占据的体积快速膨胀，并且相应地，最大浓度更快速地减小。这个现象实际的原因显然是湍流中外加物占据的体积强烈变形（如图79所示），本质上增加了分子扩散的作用。所以，毫不奇怪，并没有立即感觉到“分子扩散的加速”，仅在普通的分子扩散将点质量外加物转变为一团云（其体积足以在由$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)$的梯度表征的瞬时速度不均匀性的影响下产生变形）之后一段时间才感觉到。

Townsend (1951)首先注意到由于湍流导致的分子扩散加速的效应。他给出了这个效应初步的估计，给出了证实其存在的特殊实验（测量

湍流中脉冲放电电流产生的热斑的最大温度的逐渐降低）的结果。此外，Townsend指出，（10.36）这样的展开给出了在显著较大的$t-t_0$值时比之前更适当的描述。Townsend (1954)和Batchelor, Townsend (1956)后来得到了由瞬时线源扩散的更完备的方程[数值系数有一些小错误，见Saffman (1960)]。最后，方程（10.35）右边第二项和（具有恒定平均速度梯度的均匀湍动剪切流中流体粒子的纵向坐标方差的）方程（9.58）非常像。这种相似性不是偶然的，对于小的$t-t_0$，所有外加物位于源的小邻域中，其中可以假设速度$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)$线性依赖于坐标$\boldsymbol{X}$，限于相应泰勒级数的第一项，方差（10.35）对应速度场的这个表示。

到目前为止，我们仅考虑了分布$\vartheta(\boldsymbol{X},t)$相对其引力中心的弥散$D_\vartheta^2(t)$。进一步考虑外加物团相对源的位置（和平均引力中心的位置$\overline{X_c(t)}$以及引力中心自己$\overline{X_\vartheta^2(t)}$重合）的弥散$D_\vartheta^2(t)$，我们发现，这里，分子扩散和湍动扩散之间的相互作用导致相反的“减速扩散”效应。实际上，为了根据方程（10.26）和（10.27）计算$D_\vartheta^2(t)$和$\overline{X_c^2(t)}$，只需要确定平均值$\overline{X_1(0,t)\langle Y\rangle}$。对应$X_1(0,t)$和$\langle Y\rangle$使用方程（10.33）和（10.32），我们得到

$$\overline{X_1(0,t)\langle Y_1\rangle}=\frac{1}{2}\chi\overline{u_1\nabla^2u_1}(t-t_0)^3+...$$

或者，因为在均匀湍流中$\overline{u_1\nabla^2u_1}=-\overline{(\nabla u_1)^2}$，

$$\overline{X_1(0,t)\langle Y_1\rangle}=-\frac{1}{2}\chi\overline{(\nabla u_1)^2}(t-t_0)^3+.... \tag{10.37}$$

由此以及方程（10.26）、（10.27）、（10.35）和（10.32）得到

$$D_0^2(t)=\overline{X_1^2(0,t)}+2\chi(t-t_0)-\frac{1}{3}\chi\overline{(\nabla u_1)^2}(t-t_0)^3+..., \tag{10.38}$$

$$\overline{X_c^2(t)}=\overline{X_1^2(0,t)}-\chi\overline{(\nabla u_1)^2}(t-t_0)^3+.... \tag{10.39}$$

Saffman (1960)首先得到了这些方程，也参见Okubo (1967)，他借助拉格朗日扩散方程（9.9’）推导了这些方程。第二个方程表明，外加物引力中心的方差对于小的$t-t_0$小于流体粒子坐标的方差$\overline{X_1^2(0,t)}$（对于小的$t-t_0$几乎完全由流体粒子的初始速度$V_1(0,t_0)=u_1(0,t_0)$的方差决定，即接近$\overline{u_1^2}(t-t_0)^2$）。换句话说，由于分子扩散，平均而言，外加物粒子偏离它们一开始重合的流体粒子，因此分子扩散减慢了湍动扩散。这种减速的

机制容易看到：$\overline{X_1^2(0,t)}$由“流体粒子输运的平均速率”

$$\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} u_1[\boldsymbol{X}(t'),t']dt'$$

的方差决定，分子扩散导致点状流体粒子分散到整个外加物团中。所以，这里，输运速率是速度$u_1(\boldsymbol{X},t')$对某个体积平均，它通常小于点$\boldsymbol{X}(0,t')$的瞬时速度。因为$\overline{X_c^2(t)}$比$\overline{X_1^2(0,t)}$ 小，总的弥散$D_0^2(t)$比湍流单独的贡献和分子扩散的贡献（不考虑它们的相互作用）之和$\overline{X_1^2(0,t)}+2\chi(t-t_0)$ 要小。

分子扩散导致的湍动扩散减速也可以借助Saffman (1962a)引入的“外加物关联函数”$B^{(\vartheta)}(t-t_0)$描述。函数$B^{(\vartheta)}(t-t_0)$可以定义为外加物在$t>t_0$和t_0时刻占据的点处的流体速度的平均协方差：

$$B^{(\vartheta)}(t-t_0)=\overline{\langle u_1(0,t_0)u_1[\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{X}(0,t),t]\rangle}, \qquad (10.40)$$

其中尖括号和上面一样表示对$\boldsymbol{Y}$以权重函数$\vartheta(\boldsymbol{X},t)$平均。Saffman证明了，弥散$D_0^2(t)$可以借助下面的方程用$B^{(\vartheta)}(t-t_0)$表示：

$$D_0^2(t)=2\chi(t-t_0)+2\int_{t_0}^{t}(t-t_0-\tau)B^{(\vartheta)}(\tau)\mathrm{d}\tau. \qquad (10.41)$$

方程（10.41）类似于泰勒的方程（9.31）（这个方程具有这种形式）：

$$\overline{X_1^2(0,t)}=2\int_{t_0}^{t}(t-t_0-\tau)B^{(L)}(\tau)\mathrm{d}\tau. \qquad (10.42)$$

此外，正如$B^{(L)}(t-t_0)$可以表示为

$$B^{(L)}(t-t_0)=\int\overline{u_1(0,t)u_1(\boldsymbol{X},t)\psi(\boldsymbol{X},t)}\mathrm{d}\boldsymbol{X} \qquad (10.43)$$

（其中$\psi(\boldsymbol{X},t)=\delta[\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}(0,t)]$是平移方程$\frac{\partial\psi}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial\psi}{\partial X_\alpha}=0$在初始条件$\psi(\boldsymbol{X},t_0)=\delta(\boldsymbol{X})$条件下的解），$B^{(\vartheta)}(t-t_0)$显然可以写为

$$B^{(\vartheta)}(t-t_0)=\int\overline{u_1(0,t_0)u_1(\boldsymbol{X},t)\psi^{(\vartheta)}(\boldsymbol{X},t)}\mathrm{d}\boldsymbol{X}, \qquad (10.44)$$

其中$\psi^{(\vartheta)}(\boldsymbol{X},t)$是扩散方程

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+u_\alpha\frac{\partial\psi}{\partial X_\alpha}=\chi\nabla^2\psi$$

对于同样初始条件$\psi(\boldsymbol{X},t_0)=\delta(\boldsymbol{X})$的解。如果我们假设$B^{(\vartheta)}(\tau)$ 对于所有τ都是非负的，那么施加于于函数$B^{(L)}(\tau)$的湍动扩散减速效应表示为，对于所有$\tau>0$，$B^{(\vartheta)}(\tau)<B^{(L)}(\tau)$。换句话说，可以说作为分子扩散的结果，外加物粒子比流体粒子更快地“忘记”其初始速度，因为方程（10.40）中额外的对$\boldsymbol{Y}$的平均。基于此，Hinze (1959)提出了下面的纯定性的假设：

$$B^{(\vartheta)}(\tau)=B^{(L)}(\tau)\cdot f(\tau)$$

其中$f(\tau)$是单调减小函数，依赖于参数χ，$f(0)=1$。按照Burgers的建议，Hinze特别研究了$f(\tau)=e^{-\alpha\tau}$ 模型（其中$\alpha=\frac{c\chi}{L^2}$，c是无量纲常数，L是湍流长度标度）。然而，这个假设没有理论基础，处理可能对于非常小Péclet数

$$\mathrm{Pe}=\frac{L\left(\overline{u'^2}\right)^{1/2}}{\chi}$$

的湍流的特殊情形，见Saffman (1962a)。对于非常小的$\tau=t-t_0$，扩散方程的解可以近似为τ幂级数的线性项，有可能从方程（10.44）推导出，函数$B^{(\vartheta)}(\tau)$可以写为这种形式：

$$B^{(\vartheta)}(\tau)=B^{(L)}(\tau)-\chi\overline{(\nabla u_1)^{1/2}}+...,$$

由此可以直接得到方程（10.38）。可以自然地预期，随着$t-t_0$增大，或者随着外加物占据体积的增大，湍动扩散减速的效应被放大。也就是，比例

$$[B^{(L)}(\tau)-B^{(\vartheta)}(\tau)]/B^{(L)}(\tau)$$

随τ的增大而增大。假设当$\tau\to\infty$，这个比例近似为某个常数A，Saffman (1960, 1962a)得到了渐近公式

$$D_0^2(t)=\overline{X_1^2(0,t)}+2\chi(t-t_0)-A\overline{X_1^2(0,t)},\tag{10.45}$$

这对于大的$t-t_0$是对的。Saffman也给出了一些论证，根据这些论证，

$$A\sim(\mathrm{Pr}\cdot\mathrm{Re})^{-1}=(\mathrm{Pe})^{-1}$$

其中Re是所构建的湍流的雷诺数，例如，均方根速度涨落$\left(u_1'^2\right)^{1/2}$和所谓泰勒微尺度

$$\lambda = \left[\overline{u_1'^2}/\overline{\left(\frac{\partial u_1'}{\partial x_1}\right)^2}\right]^{1/2}.$$

这个预言定性符合Mickelsen (1959)的数据，其中在网格湍流中点源的下游测量了氦和二氧化碳平均浓度的分布。然而，还没有在小的$t-t_0$定量证实Saffman假设的渐近方程（10.45）或定性证实方程（10.38）。

为了理解后一种情形的原因，必须估计分子扩散和湍动扩散在平均浓度场$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t)}$形成中的相对重要性以及它们之间的相互作用。为此，必须比较方程（10.38）右边和（10.45）中三项的量级。对于非常小的$t-t_0$，必须使用方程（10.38），在其右边，最大的项是第二项[量级为$t-t_0$]，最小的是第三项[量级为$(t-t_0)^3$]。然而，随$t-t_0$增大，湍动扩散的贡献增长比分子扩散的贡献快，对于超过某个τ_1值的$t-t_0$，湍动扩散的贡献超过$2\chi(t-t_0)$。考虑τ_1和拉格朗日积分时标T_1（即流体粒子速度显著变换的时间）为小的情况，有可能用$\overline{X_1^2(0,t)}$的方程（10.33）的方法计算τ_1。在此情形，我们发现$\tau_1=2\chi/\overline{u_1^2}$。在大部分实际湍流中，这个$\tau_1$值无穷小。例如，在大气表面层中，$\overline{u_1^2}\sim10^2$到$10^3\ \mathrm{cm}^2\cdot\mathrm{sec}^{-2}$，故而在$\chi\sim10^{-1}\ \mathrm{cm}^2\cdot\mathrm{sec}$时$\tau_1\sim10^{-3}\ \mathrm{sec}$。对于大的$t-t_0$值，$\overline{X_1^2(0,t)}$可以借助渐近公式（9.35）估计，然而，分子扩散和湍动扩散贡献的比例量级为

$$\frac{\chi}{\overline{u_1^2}T_1}=\frac{\tau_1}{2T_1}.$$

换句话说，这个比例估计具有$(\mathrm{Pr}\cdot\mathrm{Re}^2)^{-1}$的量级，因为可以证明通常$T_1\sim\lambda^2/\nu$。这两个估计都表明，在实际条件下，这个比例总是极其小的。

此外，对于足够小的$t-t_0$，分子扩散和湍动扩散之间相互作用得出的项对弥散$D_0^2(t)$的贡献可以认为正比于$(t-t_0)^3$，这个贡献比分子扩散的贡献小得多，如果

$$(t-t_0)^2\ll6[\overline{(\nabla u_1)^2}]^{-1}.$$

然而，对于稳态均匀湍流

$$\overline{(\nabla u_1)^2}=\overline{\left(\frac{u_1\nabla u_1}{u_1}\right)^2}\sim\overline{\left(\frac{\mathrm{d}u_1/\mathrm{d}t}{u_1}\right)^2}\sim\tau_\lambda^{-2},$$

其中

$$\tau_\lambda=\left\{B^{(L)}(0)/\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2}B^{(L)}(\tau)\right]_{\tau=0}\right\}^{1/2}$$

是拉格朗日时间微尺度。所以，当$t-t_0 \ll \tau_\lambda$，分子运动和湍流运动相互作用对弥散的贡献和分子扩散的贡献之比很小[量级为$\left(\frac{t-t_0}{\tau_\lambda}\right)^2$]。另一方面，当$t-t_0 \gg \tau_\lambda$，渐近公式（10.45）可以用于证明这个比例的量级为

$$2A\frac{T_1}{\tau_1} \sim \frac{T_1}{\mathrm{Pe}\cdot\tau},$$

也就是说，它不一定小。然而，相互作用的贡献和纯湍动扩散的贡献之比的量级为$A \sim (\mathrm{Pe})^{-1}$，也就是，对于大的Re和$\mathrm{Pr} \sim 1$，它很小。

总结起来，我们可以说，分子扩散确实改变了扩散的外加物团平均直径对$t-t_0$的依赖关系，故而使得更难在用（10.11）类型的方程确定拉格朗日速度关联函数时使用函数$\overline{X_i^2} = \overline{X_i^2(t)}$。然而，这种扩散引起的$D_0^2(t)$值本身的相对变化对于不非常小的$t-t_0$和足够大的雷诺数，通常小得可以忽略。所以，我们可以得出结论，对于实用的目的，在计算平均浓度$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t)}$时，分子扩散可以忽略。所以我们将以这种方式继续讲述本节剩下的小节。

10.3 湍动扩散的半经验方程

现在让我们回到连续分布的外加物的湍动扩散的研究，忽略分子扩散。这里，时刻t的平均浓度$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t)}$和初始浓度$\vartheta_0(\boldsymbol{X})$通过方程（10.5）相联系。由此显然，如果流体粒子坐标的概率密度$p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x},t)$满足某个变量$\boldsymbol{X},t$的线性方程，那么函数$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t)}$满足同样的方程。现在让我们尝试理解这后一个方程会有什么形式。

忽略分子扩散，外加物浓度$\vartheta(\boldsymbol{X},t)$满足平移方程

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + \frac{\partial u_\alpha\vartheta}{\partial X_\alpha} = 0,$$

这是令扩散方程（10.1）右边等于零得到的。对这个方程的所有项平均，我们得到

$$\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial t} + \frac{\partial\overline{u_\alpha}\overline{\vartheta}}{\partial X_\alpha} = -\frac{\partial S_\alpha}{\partial X_\alpha}, S_\alpha = \overline{u'_\alpha\vartheta'}, \tag{10.46}$$

其中$\boldsymbol{S} = (S_1, S_2, S_3)$是扩散的外加物的湍动流量矢量。最简单和最早的G. L. Taylor (1915)和Schmidt (1917, 1925)提出但基本属于Boussinesq (1877, 1887)的湍动扩散理论基于这个假设，流量$\boldsymbol{S}$正比于平均浓度梯度，也就是

$$S_i = -K\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial X_i}, \tag{10.47}$$

其中K是第3、4章中的涡扩散系数K_ϑ。（在本章中我们仅处理它，所以下标ϑ可以方便地去掉。）在更一般的各向异性情形，替代假设（10.47），假设矢量S_i和$\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial X_i}$存在线性依赖关系：

$$S_i = -K_{ij}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial X_j}, \tag{10.48}$$

其中涡扩散张量K_{ij}一般是$\boldsymbol{X}$和t的函数。

由半经验假设（10.48），可以直接得到湍动扩散的半经验方程

$$\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial t} + \frac{\partial\overline{u_\alpha}\overline{\vartheta}}{\partial X_\alpha} = \frac{\partial}{\partial X_\alpha}K_{\alpha\beta}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial X_\beta}. \tag{10.49}$$

因为这个方程在本节后面发挥主要作用，开始时考察和这个方程的推导有关的一些额外的考虑（给出了其适用范围的更多证据）为好。我们以最简单的情形，稳态均匀湍流场中的扩散开始，其所有统计特征量对于时间原点的变化或空间坐标系零点的平移都不变。在此情形，流体粒子在时刻τ的位移的协方差矩阵，即矩阵

$$D_{ij}(\tau) = \overline{Y_i'(\tau)Y_j'(\tau)}$$

由推广的Taylor公式（9.30'）确定。此外，平均位移等于$\overline{Y_i(\tau)} = \overline{u_i}\tau$，其中$\overline{\boldsymbol{u}} = (\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3})$是恒定的（因为稳态性和均匀性）平均流动速度。此外，如我们从9.3节所知，在这种情形，有充分理由假设变量(Y_1, Y_2, Y_3)的联合概率分布对于和典型拉格朗日时标T相比小的和大的τ，都非常接近高斯分布，并且显然对于所有τ值一般不会和高斯分布有显著不同。所以，这里概率密度$p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x}, t)$可以近似用（4.23）形式的三维高斯分布表示，平均值$a_j = x_j + \overline{u}_j(t - t_0)$，协方差矩阵$||D_{ij}(\tau)||$（密度表达式中矩阵$||g_{ij}||$的逆）由方程（9.30'）确定。（特别地，在平均速度为零以及$j \neq j$时$D_{ij}(\tau) = 0$的假设下，我们再次得到方程（10.12）。）不难验证，这样的函数$p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x}, t)$是系数$K_{ij}$为

$$K_{ij} = \frac{1}{2}\frac{dD_{ij}(t - t_0)}{dt} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{t-t_0}[B_{ij}^{(L)}(\tau) + B_{ji}^{(L)}(\tau)]\mathrm{d}\tau \tag{10.50}$$

的方程（10.49）的解[见Batchelor (1949b)]。在此情形，平均浓度$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)}$也满足同样的方程。所以，对于稳态均匀湍流场中的扩散假设（10.49）类型的方程[但系数K_{ij}由方程（10.50）定义，也就是，依赖于外加物传播时

间$\tau = t - t_0$]完全等价于假设任意时刻τ 流体粒子位移矢量的概率分布是正态（高斯）分布。然而，如果按照半经验假设（10.48），我们希望平均浓度分布在所有$t = t_0 + \tau$由系数K_{ij}不依赖于τ的（10.49）类型的方程描述，那么根据方程（10.50），必须限制于与拉格朗日时标T相比为大的τ值。这里，基于方程（10.50）

$$K_{ij} = \frac{1}{2}\left(\overline{u_i'^2 u_j'^2}\right)^{1/2} T_{ij}, T_{ij} = \int\limits_0^\infty [R_{ij}^{(L)}(\tau) + R_{ji}^{(L)}(\tau)]\mathrm{d}\tau \qquad (10.51)$$

和作为湍流速度标度和长度标度乘积的涡扩散系数的半经验表示完全一致。

我们已经看到，对于均匀稳态湍流场中的扩散，恒定扩散系数K_{ij}的半经验方程（10.49）仅在$t \gg t_0 + T$时成立，对于这些t，根据$\boldsymbol{Y}$概率分布的高斯形式（基于中心极限定理是很可能的）可以很有说服力地证明，见上面的9.3节。然而，让我们注意到，在此情形，方程（10.49）的使用非常有局限，因为这里$\overline{\vartheta \boldsymbol{X}, t}$的一般表达式可以不依赖于这个方程直接写出，例如，从方程（10.5）和（10.12）开始。所以，半经验理论的基本价值在于它能应用于我们将要考虑的更一般的非均匀或非平稳湍流。

首先，让我们证明，一般地，严格来说方程（10.49）也是适用的，仅当扩散时间$\tau = t - t_0$大大超过拉格朗日时标。为此，我们考虑这个方程的统计意义。方程（10.49）是t的一阶方程，于是，它的解由初始值$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t_0)} = \vartheta_0(\boldsymbol{X})$唯一确定，其中提前固定边界条件。让我们临时把概率密度$p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x}, t)$记作$p(\boldsymbol{X}, t|\boldsymbol{x}, t_0)$以强调它对初始时刻$t_0$的依赖。在此情形，表达式（10.5）可以重新写为

$$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)} = \int \overline{\vartheta(\boldsymbol{x}, t_0)} p(\boldsymbol{X}, t|\boldsymbol{x}, t_0)\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

这里假设$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t_0)} = \delta(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{x})$，我们得到，对于任意$t > t_0$，$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)} = p(\boldsymbol{X}, t|\boldsymbol{x}, t_0)$。我们将对于$t_1 < t$使用这个结果，并对从$t_1$到$t$的时间区间，对于初始条件$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t_1)} = p(\boldsymbol{X}, t_1|\boldsymbol{x}, t_0)$ 再次求解方程（10.49）。我们得到

$$p(\boldsymbol{X}, t|\boldsymbol{x}, t_0) = \int p(\boldsymbol{X}, t|\boldsymbol{X}_1, t_1) p(\boldsymbol{X}_1, t_1|\boldsymbol{x}, t_0)\mathrm{d}\boldsymbol{X}_1, \qquad (10.52)$$

其中$t_0 < t_1 < t$。然而，随机函数$\boldsymbol{X}(t)$的转换概率密度$p(\boldsymbol{X}, t|\boldsymbol{x}, t_0)$的这个方程仅当它为马尔可夫过程时成立。这意味着这个函数在时刻t的值在其值在任意$t_n < t_{n-1} < ... < t_0$（其中$t_0 < t$）时刻的值已知的条件下的条件概率

仅依赖于最后一个值$\boldsymbol{X}(t_0)$，而不依赖于$t_i < t_0$的$\boldsymbol{X}(t_i)$值。（在马尔可夫随机过程理论中，方程（10.52）通常称为Smoluchowski方程。）实际上，对于任意但不一定为马尔可夫随机函数的函数$\boldsymbol{X}(t)$，当$t_0 < t_1 < t$，显然有下面的方程：

$$p(\boldsymbol{X}, t|\boldsymbol{x}, t_0) = \int p(\boldsymbol{X}, t|\boldsymbol{X}_1, t_1; \boldsymbol{x}, t_0) p(\boldsymbol{X}_1, t_1|\boldsymbol{x}, t_0) \mathrm{d}\boldsymbol{X}_1,$$

其中积分号下的第一个因子时$\boldsymbol{X}(t)$在$\boldsymbol{X}(t_1) = \boldsymbol{X}_1$和$\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{x}$固定的条件下的条件概率密度。这个方程是全概率定理的特殊例子。后一个公式可以变换为方程（10.52）仅当所示概率密度不依赖于$\boldsymbol{X}(t_0) = \boldsymbol{x}$，这表明随机函数$\boldsymbol{X}(t)$是马尔可夫随机函数。让我们再次强调，我们的结论不使用方程（10.49）的明显形式，而仅基于这个方程对t为一阶的事实。

另一方面，如果随机函数$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$是马尔可夫随机函数，那么在非常一般的条件下，对于概率密度

$$p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x}, t) = p(\boldsymbol{X}, t|\boldsymbol{x}, t_0)$$

可以得到一个（10.49）类型的微分方程，因此，根据方程（10.5），也可以得到平均浓度$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t)}$的微分方程。这个重要的数学定理是被Kolmogorov (1931, 1933)证明的[特殊情形更早已经由物理学家A. Einstein、A. D. Fokker和M. Planck给出]。具体来说，Kolmogorov证明了，施加于转换概率$p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x}, t)$上的某些宽泛的正规性条件保证了所研究的马尔可夫随机函数$\boldsymbol{X}(t)$是连续的，使得下面的导数存在：

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t_0)} &= \left[\frac{\partial}{\partial t}\overline{\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{x}, t)}\right]_{t=t_0}, \\ 2K_{ij}(\boldsymbol{x}, t_0) &= \left[\frac{\partial}{\partial t}\overline{Y_i'(\boldsymbol{x}, t) Y_j'(\boldsymbol{x}, t)}\right]_{t=t_0} \end{aligned} \tag{10.53}$$

其中，和通常一样，$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{x}$以及$\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{Y} - \overline{\boldsymbol{Y}}$，概率密度$p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x}, t)$满足方程

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X_\alpha}\left[\overline{V_\alpha(\boldsymbol{X}, t)} p\right] = \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}[K_{\alpha\beta(\boldsymbol{X}, t)} p]. \tag{10.54}$$

[也参见Gendenko (1962)的教科书。]这个方程显然和方程（10.49）相同，如果我们假设$\overline{V_i} - \frac{\partial K_{ij}}{\partial X_j} = \overline{u}_i$。后一个方程意味着变量$V_i$（根据方程

（10.53）第一个公式，是外加物例子的平均速度）一般等于对流速度$\overline{u}_i$和额外的速度$\frac{\partial K_{ij}}{\partial X_j}$之和，这和这个事实有关：在非均匀湍流场中，即使没有平均流动，外加物粒子也可能趋向于沿某个方向运动。让我们强调，在这里只引入了平均粒子速度的概念，没有引入瞬时粒子速度的概念。“马尔可夫模型”中的瞬时速度不存在。实际上，基于方程（10.53）第二个方程，标记了粒子在时刻t_0 的瞬时速度平方平均的极限

$$\lim_{t\to t_0}\left|\frac{\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{x},t)}{t-t_0}\right|^2$$

在$K_{ii}(\boldsymbol{x},t_0)\neq 0$时不会是有限的。这是因为，根据方程（10.53），粒子在t_0和$t_1=t_0+\tau$之间穿过的路径长度的平方平均在$\tau\to 0$时是τ阶的，不是τ^2。让我们也注意到，方程（10.53）的第二个方程给出了“涡扩散系数”的统计解释：K_{ij}和我们在9.3节中考虑的粒子位移方差的变化速率仅相差1/2的因子。

不存在瞬时速度$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$表明，随机函数$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$是不可微的。所以，在湍动扩散的半经验理论中，一个给定“流体粒子”的轨迹$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$解释为一个随处不可微的马尔可夫函数。湍流中真实流体粒子的轨迹显然没有这些性质,函数$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$随处对$t$可微，此外还满足含有$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$对$x_i$以及对$t$的一阶和二阶导数的拉格朗日动力学方程（9.6）和（9.9）。知道导数

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$$

或拉格朗日速度的统计性质对于很多关于湍流中粒子分散的问题很重要，见，例如流体粒子位移协方差张量的方程（9.27）。流体粒子位移的方差在小的时间τ实际上正比于τ而不是τ^2[见方程（9.28）]是一个相关的现象。最后，函数$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$也不是一个马尔可夫随机函数。例如，变量$\boldsymbol{X}(t)$的概率密度$p(\boldsymbol{X},t|\boldsymbol{x},t_0)$和$p(\boldsymbol{X},t|\boldsymbol{x},\boldsymbol{V}_0,t_0)$对于固定的$\boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{x}$值和固定的

$$\boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{x}\text{以及}\left.\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t}\right|_{t=t_0}=\boldsymbol{V}_0$$

（它们对于马尔可夫函数一定是相等的）实际上是不同的，特别对于小的$\tau=t-t_0$，其中第二个概率密度仅当$\boldsymbol{X}\approx\boldsymbol{x}+\boldsymbol{V}_0\tau$时才不等于零，而第一个概率密度没有这种性质。

然而，如果我们仅在分立的时刻$t=t_n=t_0+n\tau$考虑函数$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$（其中时间步长$\tau$和拉格朗日积分时标$T$相比较长），那么实际中有可能把随机序列$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t_n)$看作马尔可夫的。函数$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$在长度$\tau\gg T$的非重叠时间

间隔的增量实际上是没有关联的，自然可以预期它们也几乎是独立的，具有独立增量的随机序列当然是马尔可夫的。让我们也注意到，根据方程（9.35），函数$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$在$\tau \gg T$的时间间隔内增量的方差正比于$\tau$，正如马尔可夫函数的情形（根据方程（10.53））。所以，如果我们不考虑微分方程（10.53）而是考虑一个相关的描述马尔可夫序列$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t_n)$的时间差分方程，这会很好地对应于湍流中流体粒子运动的实际性质。因此，湍动扩散的半经验方程（10.49）可能是重要的，但仅作为步长$\tau \gg T$的时间的差分方程的微分类比。所以，方程（10.49）可以用于描述固定时刻t（其中$t-t_0 \gg T$）的场$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t)}$。换句话说，由方程（10.49）的解得到的外加物平均浓度$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t)}$的方程可以认为是渐近的，并且在$t-t_0 \gg T$时成立。例如，在和大气中外加物扩散有关的实际问题中，通常对描述远超过拉格朗日积分时标T（在大气表面层中的值通常为1秒的量级）的时标上的扩散感兴趣。所以通常有可能在这些问题中使用湍动扩散的半经验公式。顺便说一句，即使对于大的$t-t_0$值，半经验公式在距离外加物源非常大的距离处也可能导致错误的结果。这是因为这个理论实际上假设了外加物传播速率时无限大的（见下文10.6节）。

在下面，我们将经常处理在平面$X_3 = Z =$ 常量内均匀的、平均速度$\overline{u} = U$每个地方沿$OX_1 = OX$轴方向的稳态湍流的情形。在此情形，涡扩散系数K_{ij}和所有其他湍流特征量一样，只能依赖于坐标Z。此外，由对这个问题的粗略考察来看，似乎可以自然地假设坐标轴$OX_1 = OX, OX_2 = OY$和$OX_3 = OZ$和张量K_{ij}的主轴重合，因为OX, OY和OZ显然是流动的首选轴。所以可以假设，在此情形湍流扩散的半经验方程（10.49）取下面这种形式：

$$\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial t} + \overline{u}(Z)\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial X} = K_{xx}(Z)\frac{\partial^2\overline{\vartheta}}{\partial X^2} + K_{yy}(Z)\frac{\partial^2\overline{\vartheta}}{\partial Y^2} + \frac{\partial}{\partial Z}K_{zz}(Z)\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}. \quad (10.55)$$

这个形式非常标准。很多教科书和专著[见，例如Sutton (1953)、Haltiner, Martin (1957)或Pasquill (1962b)]以及数百篇文章对其进行了阐述和应用。然而，有一些最近的论证指出标准的和通常采用的扩散方程（10.55）形式不严格[见，例如，Calder(1965)和Yaglom (1969)，那里可以找到更多参考文献]。我们将在下面10.5节讨论这些论证。然而，我们将首先考虑借助方程（10.55）得到的一些结果。

如果必须考虑相对较重的扩散粒子的重力沉降（以恒定速度w沉降），那么必须在方程（10.55）左边加$-w\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}$项。以完全相同的方式，外加物辐射或其他方式衰变[半衰期为$(\ln 2)/\alpha$]的可能性导致左边产生额外的一项$\alpha\overline{\vartheta}$。如果流动区域沿某个方向延伸到无穷远，那么相应的边界条件通常

是$\overline{\vartheta}(\boldsymbol{X},t)$在点$\boldsymbol{X}$变得距离所有外加物远无穷远时减小得足够快。固体壁面上的边界条件必须从对这些壁面上发生的物理过程的分析中选择，但得到的解必须在任何情况下都对应于马尔可夫随机函数$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$[方程（10.2）后面提到的Feller和Wentzel的工作的主题是列举所有这些条件]。和10.1节开头的论述一致，固体壁面$Z=0$上足够一般以实际描述所遇到的所有情形的边界条件是下面这种条件：

$$K_{zz}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}+w\overline{\vartheta}=\beta\overline{\vartheta}, \text{当}Z=0, \tag{10.56}$$

其中β是速度两个的常量。（为了一般性，这里我们假设存在速度w的重力沉降，导致在垂向湍动外加物流量$-K_{zz}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}$加上的流量$-w\overline{\vartheta}$。）$\beta=0$的情形对应于外加物从壁面上反射，$\beta=\infty$的情形对于外加物吸收，$0<\beta<\infty$的情形对应部分反射部分吸收的中间解。关于条件（10.56）更详细的讨论见Monin (1956a, 1959b)和Calder (1961)。

10.4 均匀湍流场和简单剪切流中的扩散

来自均匀湍流中源的扩散

我们现在考虑最简单的情形，理想化的均匀稳态湍流（具有恒定平均速度$\overline{u}=U$，和通常一样，我们假设这个速度指向$OX_1=OX$轴方向）模型中的扩散。令坐标轴$OX_1=OX, OX_2=OY$和$OX_3=OZ$沿协方差张量$D_{ij}(\tau)=\overline{Y_i'(\tau)Y_j'(\tau)}$主轴，考虑$OX_1$轴为其中一个主轴，和湍动扩散相比忽略分子扩散。最后，我们使用这个实验事实，概率密度$p(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{x},t)$在均匀湍流的情形对应所有$\tau=t-t_0$接近多维高斯分布，其中，这个情形对于大的$\tau$值有理论证明。所以我们可以写出平均浓度场$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t)}$的方程

$$\begin{aligned}\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t)} \;=\; & \frac{1}{[8\pi^3D_{xx}(\tau)D_{yy}(\tau)D_{zz}(\tau)]^{1/2}}\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\vartheta_0(x,y,z)\\ & \exp\left\{-\frac{(X-x-U\tau)^2}{2D_{xx}(\tau)}-\frac{(Y-y)^2}{2D_{yy}(\tau)-\frac{(Z-z)^2}{2D_{zz}(\tau)}}\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\end{aligned} \tag{10.57}$$

对应于初始值$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t_0)}=\vartheta_0(\boldsymbol{X})$。于是，为了在任意问题中得到平均浓度$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t)}$的解，只需要知道时刻$\tau$流体粒子位移分量的方差$D_{xx}(\tau), D_{yy}(\tau)$和$D_{zz}(\tau)$，它们由方程（9.31）用相应的拉格朗日速度关联函数$B_{xx}^{(L)}(\tau), B_{yy}^{(L)}(\tau)$和$B_{zz}^{(L)}(\tau)$表

示。特别地，当

$$t - t_0 = \tau \gg T = \max(T_x, T_y, T_z)$$

（其中T_x, T_y和T_z是三个拉格朗日积分时标），可以假设

$$\begin{aligned} D_{xx}(\tau) &= 2\overline{u'^2}T_x\tau = 2K_{xx}\tau, D_{yy}(\tau) = 2\overline{v'^2}T_y\tau = 2K_{yy}\tau \\ D_{zz}(\tau) &= 2\overline{w'^2}T_z\tau = 2K_{zz}\tau. \end{aligned}$$

于是方程（10.57）右边和抛物型偏微分方程

$$\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial t} + U\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial X} = K_{xx}\frac{\partial^2\overline{\vartheta}}{\partial X^2} + K_{yy}\frac{\partial^2\overline{\vartheta}}{\partial Y^2} + K_{zz}\frac{\partial^2\overline{\vartheta}}{\partial Z^2} \tag{10.58}$$

的解相同，这个方程是方程（10.55）对于初始条件$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X}, t_0)} = \vartheta_0(\boldsymbol{X})$的特殊情形。如果$\vartheta_0(\boldsymbol{X}) = Q\delta(\boldsymbol{X}) = Q\delta(X)\delta(Y)\delta(Z)$（瞬时点源位于$\boldsymbol{X} = 0$点的情形），那么分布（10.57）描述一个椭球形外加物团，浓度随与中心的距离按高斯函数下降。这个外加物团的中心位于点$(U\tau, 0, 0)$，也就是说，它偏离流动平均速度，中心处的最大浓度正比于

$$[D_{xx}(\tau)D_{yy}(\tau)D_{zz}(\tau)]^{-1/2}.$$

（特别地，当$\tau \gg T$，它随τ增大而减小，正比于$\tau^{-3/2}$。）如果$\vartheta_0(\boldsymbol{X}) = Q\delta(X)\delta(Z)$，沿$OY$轴的瞬时线源的情形，对于任意$\tau$外加物团是一根轴在$X = U\tau, Z = 0$上的椭圆截面的柱体。在此情形，最大浓度正比于$[D_{xx}(\tau)D_{zz}(\tau)]^{-1/2}$，或者对于大的$\tau$值，它正比于$\tau^{-1}$地减小。对于点$\boldsymbol{X} = 0$处具有恒定输出$Q$的稳态连续活跃点源，必须使用方程（10.6'）和（10.12），在此情形，当$X \gg UT$，我们可以在后一个方程中把$D_{ii}(\tau)$替换为$2K_{ii}\tau$而不引入显著的误差。进行了这个替换后，方程（10.6'）对τ的积分容易显式地给出，我们得到

$$\begin{aligned} \overline{\vartheta(X, Y, Z)} \approx &\frac{Q}{4\pi(K_{yy}K_{zz}X^2 + K_{xx}K_{zz}Y^2 + K_{xx}K_{yy}Z^2)^{1/2}} \\ &\exp\left\{-\frac{U}{2K_{xx}}\left[K_{xx}^{1/2}\left(\frac{X^2}{K_{xx}} + \frac{Y^2}{K_{yy}} + \frac{Z^2}{K_{zz}}\right)^{1/2} - X\right]\right\}. \end{aligned} \tag{10.59}$$

方程（10.59）描述了具有方位沿OX轴的椭圆抛物面形式的外加物射流。

当$X \gg \sqrt{Y^2+Z^2}$，这个公式可以变换为

$$\overline{\vartheta(X,Y,Z)} \approx \frac{Q}{4\pi(K_{yy}K_{zz})^{1/2}X}\exp\left\{-\frac{U}{4X}\left(\frac{Y^2}{K_{yy}}+\frac{Z^2}{K_{zz}}\right)\right\}. \qquad (10.60)$$

方程（10.60）表明，对于固定的Y和Z，在距离源很远处，外加物浓度近似以X^{-1}减小，对于固定的X，它随与轴距离的增大而指数减小。以完全相同的方式，对于OY轴上（单位长度）输出为Q的稳态线源，当$X \gg UT$，也就是，在可以假设

$$D_{xx} = 2K_{xx}\tau, D_{zz} = 2K_{zz}\tau$$

时，由方程（10.8）和（10.12）得到方程

$$\overline{\vartheta(X,Z)} \approx \frac{Q}{2\pi(K_{xx}K_{zz})^{1/2}}K_0\left[\frac{U}{2}\left(\frac{X^2}{K_{xx}^2}+\frac{Z^2}{K_{xx}K_{zz}}\right)^{1/2}\right]\exp\left(\frac{UX}{2K_{xx}}\right), \qquad (10.61)$$

其中$K_0(z)$是所谓的Basset（或Macdonald）函数（第三类修正贝塞尔函数）。当$UX \gg K_{xx}$且$Z \ll X$，方程（10.61）可以简化为这种形式

$$\overline{\vartheta(X,Z)} \approx \frac{Q}{2(\pi K_{zz}UX)^{1/2}}\exp\left(-\frac{UZ^2}{4K_{zz}X}\right). \qquad (10.62)$$

由此很明显，对于稳态线源，具有恒定平均速度的均匀湍流场中的外加物浓度在$X \to \infty$时（对于固定的Z）近似正比于$X^{-1/2}$。

直管或渠中的纵向外加物分散

现在让我们考虑复杂得多的具有速度梯度的流动中的湍动扩散的问题。这里只能对少数特定类型的流动得到有趣的结果。我们从实践中重要的长的直管（或直渠）中外加物的纵向扩散的问题开始。这种扩散的重要性特别地和这个事实有关，管中外加物的纵向输运速度的测量通常是测量湍流甚至层流平均流动速度最可接受的方法。因此纵向分散在很久以前就受到了关注。例如，G. I. Taylor (1953)研究了血管和玻璃毛细管中层流阶段的分散，Allen, E. A. Taylor (1923)相对较早的工作研究了湍动管流中的分散。这些工作中描述的实验是在某个时刻t_0，某个质量的外加物被引入到管中某点，或者换句话说，激发了一个瞬时点源。然后在这点下游某个距离$\boldsymbol{X}$，测量管的某个截面上平均外加物浓度随时间的变化$\vartheta_m(t)$。自然地，在把外加物引入管中一段时间后，其在点$\boldsymbol{X}$的浓度会等于零。令$t_0' = t_0+\tau_0$为在点$\boldsymbol{X}$ 首次探测到外加物的时刻。于是比例$u_{\max} = X/\tau_0$等于管中流动的最大速率，或者在轴对称管的情形，等于管轴处的流动速度。平均流动速率$u_{\rm av}$可以用$u_{\rm av} = X/\tau_1$定义，其中$t_0+\tau_1 = t_1$是对应于函

数$\vartheta_m(t)$首选点的时刻。

根据直圆管中得到的数据，纵向外加物分散具有下面的独特特征：1)对应于和管半径R相比足够大距离X的曲线$\vartheta_m(t)$ 近似对于它们的极大值对称，尽管纵向流动速度在管截面上的空间分布$\overline{u}_x(r)$[其中r是径向坐标]对于平均速度u_{av} 不对称；2)如果时刻$t_1 = t_0 + \frac{X}{u_{\mathrm{av}}}$对应于曲线$\vartheta_m(t)$的极大值，那么$u_{\mathrm{av}}$和整体平均速度$U_{\mathrm{av}}$（定义为单位时间从流出管道的流体的体积和横截面积的比）相同。换句话说，纵向浓度分布的重心向下游位移的速度等于平均整体速度U_{av}；3)曲线$\vartheta_m(t)$的宽度定义为

$$\sigma^2_{\vartheta_m} = \int_{t_0}^{\infty} (t-t_0)^2 \vartheta_m(t)dt / \int_{t_0}^{\infty} \vartheta_m(t)dt$$

的平方根，随距离X的增大而增大，或者等价地，随时间$\tau_1 = X/U_{\mathrm{av}}$的增大而增大，正比于$X^{1/2}$（或$\tau_1^{1/2}$）。也就是说，方差$\sigma^2_{\vartheta_m}$具有$\sigma^2_{\vartheta_m} = 2K_1\tau_1$的形式，其中$K_1$是某个常量；4)变量$K = K_1 U^2_{\mathrm{av}}$显然扮演了"等效纵向涡扩散系数"的角色，其值超过外加物的径向（湍动或分子）扩散系数很多倍。第二个特征特别有趣，因为它展示了，曲线$\vartheta_m(t)$极大值的定义使得可以测量整体平均速度U_{av}，这对于大部分液压和其他工程应用是最重要的；第三个特征也重要，因为它展示了，对点$X = U_{\mathrm{av}}\tau_1$对称、含有例如90%（或95% 或99%）扩散外加物的管道片段的长度以$\tau_1^{1/2}$随时间增大，故而它和外加物源平均距离$X = U_{\mathrm{av}}\tau_1$的比值持续减小。因为外加物充满的截面以平均速度$U_{\mathrm{av}}$运动，这个截面上游管轴上的流体以超过该速度的速度移动，并随着时间推移通过这个截面。G. I. Taylor (1953, 1954a, b)的优秀工作（其中两个工作致力于层流，另外一个工作（1954a）致力于湍流）理论上分析并在实验上检验了管中纵向外加物分散的特殊性质。这些工作激发了人们对这些现象的兴趣，促进了一些新的理论和实验研究[参见Batchelor, Binnie, Phillips (1955)、Aris (1956)、Elder (1959)、Ellison (1960)、Saffman (1962b)、Philip (1963)、Tyldesley, Wallington (1965)和其他工作]，改进了Taylor的结果，扩展了它们的应用范围。特别是，人们发现上述纵向外加物分散的一般性质（1）-（4）可以简单根据直管和渠中的流体粒子运动的一般性质来解释。如9.3末注意提到的，直管或直渠中流体粒子在足够长运动时间$\tau = t - t_0$的纵向分散符合具有恒定平均速度$\overline{u} = U_{\mathrm{av}}$的均匀湍流同样的规律。于是，对于大的$\tau$，在时刻$t_0$离开点$X = 0$的流体粒子的纵向坐标的平均值$\overline{X(t_0+\tau)}$可以用$\overline{X(t_0+\tau)} \approx U_{\mathrm{av}}\tau$非常精确地确定，坐标$X(t_0+\tau)$的方差具有这种形式

$$\overline{(X-\overline{X})^2} \approx 2K\tau, \text{其中} K = \text{常数}.$$

（在9.3节中这个常数写为$\overline{u_1'^2}T_1$形式。）对于$X(t_0+\tau)$值的概率密度$p_1(X|\tau)$，概率论的中心极限定理给出了充分理由假设，对于大的τ，概率密度接近正态分布。因此在很长的时间τ之后，来自一个瞬时点源的外加物团的纵向分布具有钟形的高斯形式，平均值为$U_{\rm av}\tau$，方差为$2K\tau$。如果我们不固定$\tau = t - t_0$，而是固定X 值，$\tau(X)$是一个流体粒子穿过距离源X处一个截面所需时间，于是$\tau(X) = \frac{X}{V_{\tau(X)}}$，其中$V_{\tau(X)}$是这个流体粒子从$t_0$到$t_0+\tau(X)$的平均拉格朗日速度。因为随着$X$增大，通过时间$\tau(X)$的涨落变得相对不那么重要，$\overline{\tau(X)}$近似为$X/U_{\rm av}$，对于足够大的$X$，平均拉格朗日速度$\tau(X)$的概率分布以足够高的精度和在时间间隔$X/U_{\rm av}$上的平均拉格朗日速度

$$V_{X/U_{\rm av}} = X\left(t_0 + \frac{X}{U_{\rm av}}\right)\cdot\frac{U_{\rm av}}{X}$$

的概率密度相同。然而，

$$\overline{X\left(t_0 + \frac{X}{U_{\rm av}}\right)} = X, \text{也就是} X\left(t_0 + \frac{X}{U_{\rm av}}\right) = X + X';$$

于是，对于足够大的X

$$\tau(X) \approx \frac{X}{U_{\rm av}}\frac{X}{X+X'} = \frac{X}{U_{\rm av}}\left[1 - \frac{X'}{X} + \left(\frac{X'}{X}\right)^2 - \right]. \tag{10.63}$$

忽略具有量级为$1/X$平均值的分量$\left(\frac{X'}{X}\right)^2$以及更高阶的项，我们发现对于大的$X$值，

$$\tau(X) \approx \frac{X}{U_{\rm av}} - \frac{X'}{U_{\rm av}}, \tag{10.64}$$

其中X'是平均值为零，方差为$2K\frac{X}{U_{\rm av}}$的正态分布的随机变量。于是，变量$\tau(X)$也有正态概率分布，平均值$\overline{\tau} = \frac{X}{U_{\rm av}}$，方差为$2K_1\overline{\tau}$，其中$K_1 = \frac{K}{U_{\rm av}^2}$。这些推论显然符合通过经验建立的纵向外加物分散的性质（1）-（3）。上面提到的性质（4）也可以简单解释。在此情形，外加物团的纵向分散很大程度是由于横向平均速度梯度的影响。具体来说，它是由速度差$\overline{u}(r) - U_{\rm av}$产生的，这个速度差显著超过了产生湍动扩散的纵向速度的涨落$u' = u(r) - \overline{u}(r)$，以及导致分子扩散的分子涨落。

然而，在估计系数K和K_1的数值时，上面关于流动的拉格朗日描述的论证帮助很小。实际上，涡扩散系数K用拉格朗日积分时标T_1表达。然而，这个时标由拉格朗日速度关联函数确定，这个函数非常难和直接测量的欧拉统计特征量相联系，通常仅从扩散实验数据计算。在管或渠中纵向外加物扩散的情形，K值可以非常精确地使用欧拉浓度场$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t)}$的半

经验扩散方程得到。这个方法也用于Taylor有影响力的工作中。因为我们对大τ（或X）的渐近规律的研究感兴趣，我们可以预期这个半经验方程非常精确。其使用也有重要的优势：同样的理论可以应用于湍流和层流中的扩散。对于后者，近似的半经验方程替换为一个严格的分子扩散方程（10.1）。按照G. I. Taylor (1953, 1954a)，我们假设平均浓度$\overline{\vartheta}$不依赖于角变量φ，我们可以把直圆管中扩散的方程（10.55）或（10.1）写为这种形式

$$\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial t}+\overline{u}_x(r)\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial X}=K_{xx}\frac{\partial^2\overline{\vartheta}}{\partial X^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rK_{rr}(r)\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial r}. \tag{10.65}$$

此外，方便的是变换到一个以流动平均速度运动的坐标系，也就是把纵向坐标X替换为坐标$x=X-U_{\mathrm{av}}(t-t_0)$。此外，我们引入无量纲径向变量$z=\frac{r}{R}$替换$r$，其中$R$是管道半径。基于上面关于管中纵向外加物分散的第四个性质（通过实验确立），我们可以尝试在方程（10.65）中忽略描述宙线外加物扩散的项$K_{xx}\frac{\partial^2\overline{\vartheta}}{\partial X^2}$。（考虑这一项几乎不改变论证，而知识对最终结果进行小的修正，这将在下面提到。）于是假设变量x,z,t的方程（10.65）为这种形式

$$\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial t}+\left[\overline{u}_x(z)-U_{\mathrm{av}}\right]\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial x}=\frac{1}{R^2}\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}zK_{rr}(z)\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial z}. \tag{10.66}$$

我们将使用这个方程描述浓度分布$\overline{\vartheta(x,z,t)}$，对应于在时刻$t=t_0$在点$x=z=0$存在一个瞬时外加物点源。让我们首先比较时间区间$\tau_c$和$\tau_d$，其间管中给定点的外加物浓度仅由于流动（对流）平均速率和横向扩散速率而显著变化。我们可以令$\tau_c=\sigma_{\vartheta_m}$，其中$\sigma_{\vartheta_m}(t)$是对管道截面平均的外加物浓度分布$\vartheta_m$的标准差。另一方面，$\tau_d$是横向扩散抹平管道截面上浓度分布不均匀性的时间，可以假设$\tau_d=\frac{R^2}{K_0}$，其中K_0是横向扩散系数的典型值（标度）。显然，根据理论论证和实验数据，σ_{ϑ_m} 值以及τ_c 随外加物传播时间τ增大，渐近正比于$\tau^{1/2}$。然而，τ_d不随时间变化。所以，对于足够大的τ，或x，下面的不等式成立：$\tau_c\gg\tau_d$，也就是说

$$\sigma_{\vartheta_m}\gg\frac{R^2}{K_0}. \tag{10.67}$$

让我们把我们的研究限制于足够大的τ（此时不等式（10.67）成立），计算通过$x=$ 常量的管道截面的总外加物流量Q_1。（我们必须回想一

下，$x = X - U_{\rm av}\tau$，故而截面$x =$ 常量以速度$U_{\rm av}$沿管道运动。）显然

$$Q_1 = \int\limits_S\int [\overline{u}_x(r) - U_{\rm av}]\overline{\vartheta}dS = 2\pi R^2 \int\limits_0^1 [\overline{u}_x(z) - U_{\rm av}]\overline{\vartheta}zdz, \qquad (10.68)$$

其中S是管道的截面积。于是，Q_1仅在存在浓度$\overline{\vartheta}$的径向不均匀性时不等于零。在条件（10.67）下这些径向不均匀性被强烈平滑掉。所以在足够长的时间后只可能存在非常弱的不均匀性，也就是说，外加物不均匀对流输运不断产生的那些不均匀性，它们适应了这种输运，意思是说，对流和横向扩散对于它们来说是平衡的。这种不均匀性满足方程

$$[u_x(z) - U_{\rm av}]\frac{\partial\vartheta_m}{\partial x} = \frac{1}{R^2}\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}zK_{rr}(z)\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial z}. \qquad (10.69)$$

（这里左边我们已经把$\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial x}$替换为$\frac{\partial\vartheta_m}{\partial x}$，因为径向不均匀性$\overline{\vartheta} - \vartheta_m$非常小。）由方程（10.69）我们得到

$$\overline{\vartheta}(z) = \overline{\vartheta}(0) + R^2\frac{\partial\vartheta_m}{\partial x}\int\limits_0^z \frac{dz'}{z'K_{zz}(z')}\int\limits_0^{z'}[\overline{u}_x(z'') - U_{\rm av}]z''dz''.$$

使用这个方程，（10.68）容易简化为这种形式

$$Q_1 = -\pi R^2 K\frac{\partial\vartheta_m}{\partial x},$$

其中

$$\begin{aligned} K &= -2R^2\int\limits_0^1[\overline{u}_x(z) - U_{\rm av}]zdz\int\limits_0^z\frac{dz'}{z'K_{zz}(z')}\int\limits_0^{z'}[\overline{u}_x(z'') - U_{\rm av}]z''dz'' \\ &= 2R^2\int\limits_0^1\frac{dz}{zK_{zz}(z)}\left[\int\limits_z^1[\overline{u}_x(z') - U_{\rm av}]z'dz'\right]^2. \end{aligned} \qquad (10.70)$$

把Q_1的表达式带入描述外加物质量守恒定律的方程

$$\pi R^2\frac{\partial\vartheta_m}{\partial t} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} = 0$$

（这个方程也可以通过将扩散方程（10.66）所有项对管道截面积分推导出

来），我们得到

$$\frac{\partial \vartheta_m}{\partial t} = K\frac{\partial^2 \vartheta_m}{\partial x^2}.$$

所以很显然，除了方程（10.70）定义的扩散系数K，外加物相对以平均速度U_{av}沿管道运动的平面的纵向分散非常类似于分子扩散，故而导致浓度在Ox方向为高斯分布。于是，纵向外加物分布的空间方差等于$2K(t-t_0)$，这意味着

$$\sigma^2_{\vartheta_m} = 2K_1\tau, \text{其中} K_1 = K/U^2_{\text{av}}, \tau = t - t_0.$$

此外，考虑得，根据方程（10.70），K为$\frac{U^2_{\text{av}}R^2}{K_0}$的量级，我们可以把条件（10.67）（我们对它的论证是正确的）简化为这种形式

$$\tau \gg \frac{R^2}{K_0}. \tag{10.71}$$

剩下只需要计算层流和湍流的K值。在K的方程（10.70）的前一种情形，根据方程（1.23），我们必须假设$\overline{u}_x(z) = 2U_{\text{av}}(1-z^2)$，$K_{rr} = \chi$，其中$\chi$是特定外加物的分子扩散系数。于是$K$的方程（10.70）容易简化为这种形式

$$K = \frac{R^2U^2_{\text{av}}}{48\chi}, \tag{10.72}$$

故而

$$\frac{K}{\chi} \approx \left(\frac{1}{\chi}\frac{RU_{\text{av}}}{\chi}\right)^2.$$

除了在特别细的毛细管中异常缓慢的流动，$\frac{1}{7}\frac{RU_{\text{av}}}{\chi}$都显著超过1，故而$K \gg \chi$。不难看出，同时考虑分子扩散，也就是保留方程（10.65）中的$\chi\frac{\partial^2\overline{\vartheta}}{\partial X^2}$项，替代方程（10.72）我们会得到

$$K = \frac{R^2U^2_{\text{av}}}{48\chi} + \chi,$$

这通常和方程（10.72）难以区分。

显然，如果速度$u(z)$恒定，那么纵向扩散仅由分子扩散系数χ确定。所以，横向速度梯度导致纵向外加物分散急剧增大。有趣的是注意到，另一方面，横向扩散延迟了纵向外加物分散。根据方程（10.72），随着χ增大，K减小。如果没有横向扩散，那么外加物分布首先集中在非常小的长度δX的管段中，在这段管道中均匀分布，在时间τ中变换为一个均匀分布，其中在一个长度$U_{\max}\tau$的管段中$\vartheta_m(X) =$ 常量，在这个管段之外$\vartheta_m(X) = 0$。[这个结果容易从平移方程（9.13）得到。]在存在横向扩散

时，它变为一个高斯分布，对于足够大的τ（和$U_{\max}\tau$相比非常小），其中几乎所有外加物集中在一个长度$L \sim \sqrt{K\tau}$的管段中。

因为K值不难从实验确定，使用浓度$\vartheta_m(t)$或$\vartheta_m(X)$的测量，方程（10.72）有可能从这些数据中得到分子扩散系数χ的值。G. I. Taylor (1953)测试了这个测量χ值的方法，他对高锰酸钾在玻璃毛细管中的扩散进行了实验研究，从而得到了这种物质的分子扩散系数χ，和其他测量得到的数据符合得很好。Taylor (1954b)也对这个测量χ的方法进行了广泛讨论。

在具有足够大雷诺数的湍流中，黏滞亚层厚度和半径R相比小得可以忽略，平均速度$\overline{u}_x(r)$可以有速度缺陷定律（5.41）给出：

$$\frac{\overline{u}_x(0) - \overline{u}_x(r)}{u_*} = f_1\left(1 - \frac{r}{R}\right),$$

其中u_*是由管壁上的剪切应力定义的摩擦速度。考虑到圆管中的湍流剪切应力具有$\tau = \rho u_*^2 \frac{r}{R}$的形式[见方程（5.17'）]，并假设涡扩散系数严格等于涡黏滞系数，使用5.7节中的雷诺类比，可以把径向涡扩散系数表示为这种形式

$$K_{rr}(r) = \frac{\tau}{-\rho \frac{\partial \overline{u}_x}{\partial r}} = \frac{u_* r}{-f_1'\left(1 - \frac{r}{R}\right)}.$$

使用通过处理Nikuradse以及其他研究者的测量数据得到的函数$f_1(\eta)$值，G.I. Taylor (1954a)使用方程（10.70）得到了$K = 10.06Ru_*$[故而在方程（9.36）中$c \approx 10$]。不难通过计算通过一个管道截面的外加物流量

$$Q_1' = -\int\limits_S\int K_{xx}(r)\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial x}dS = -2\pi R^2\frac{\partial\vartheta_m}{\partial x}\int\limits_0^1 K_{xx}(z)zdz. \qquad (10.73)$$

来估计纵向湍动扩散导致的对K 值的修正。对于粗略估计，可以简单假设

$$K_{xx}(r) = K_{rr}(r)\text{于是}Q_1' = -\pi R^2 K'\frac{\partial\vartheta_m}{\partial x},$$

其中对于K'，数值积分给出$K' = 0.052Ru_*$。物理量K'和K相比非常小，但是因为在任何情形对于K/Ru_*只能得到一个近似数值，所以把K'加道上面得到的K值是合理的，也就是使用公式

$$K = 10.1Ru_*. \qquad (10.74)$$

（用于计算K'的假设中的不精确性没什么重要影响，因为整个被加量K'相

对较小。）

结果（10.74）和足够长的直圆管中外加物的纵向传播数据符合得很好。所以，例如，Allen, E. Taylor (1923)关于盐在不太长的直圆管中水流中扩散的数据得出对于一系列实验$K/Ru_* = 10.6$，对于另一系列实验$K/Ru_* = 11.7$[见G. I. Taylor (1954a)]。$K/Ru_* = 10.0$是在与上面的理论几乎完全相同的条件下得到的。在使用非常粗糙壁面的管道时，$K/Ru_* = 10.5$。在所有实验中，在距离外加物源足够远的地方，浓度ϑ_m对时间的依赖紧密对应于高斯曲线，见例如图80，其中重新给出了来自Taylor的一个实验的数据。在弯管的情形，或者例如通常不严格笔直的工业油管的情形，K/Ru_*值自然和上面直管道的理论值有些不同，在这里的一些情形，假设K/Ru_*值接近20[G. I. Taylor (1954a)]。

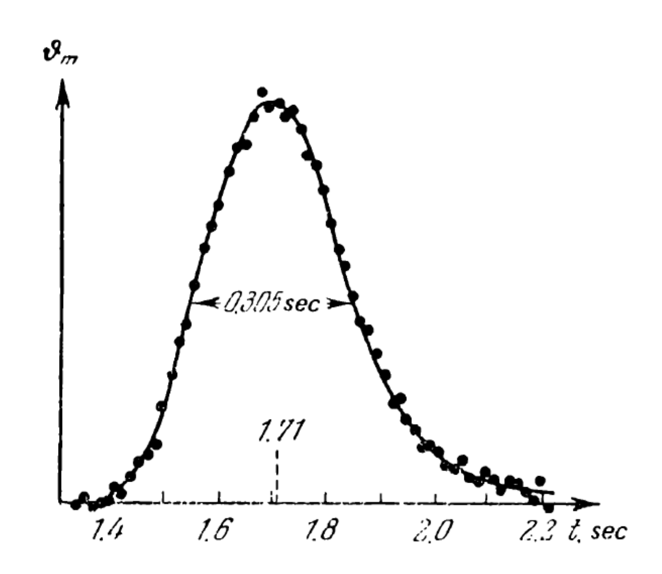


图 78 一个直管道的一个固定截面上盐浓度作为时间的函数，来自Taylor (1954a)的数据。

宽的直渠中的纵向外加物分散受壁面$Z = 0$和$Z = H$限制。（流体的自由表面也可以扮演上壁面的角色。）Elder (1959)、Ellison (1960)、Saffman (1962b)和Tyldesley, Wallington (1965)研究了这个问题。Elder使用Taylor的方法（上面讨论过），而Saffman 使用Aris (1956)优雅的方法。Tyldesley和Wallinton数值求解了半经验扩散方程（10.55）。[2]在Aris 的方法中，首先由半经验扩散

[2]Tyldesley和Wallington得到了（10.55）形式方程（在左边加额外的一项$\nu(z)\partial\vartheta/\partial y$，去掉正比于$K_{xx}$的项）的数值解。他们对一些具体垂向速度和扩散系数分布模型描述了源自持续稳态点源或线源的扩散，以及源自流体层$0 \leq Z \leq H$中一个瞬时线源的扩散。所得结果和多个大气扩散实验的数据进行了比较。然而，我们这里不再进一步讲述他们的工作。

方程（10.55）或者分子扩散方程（10.1）推导矩量的方程：

$$\theta_{nm}(Z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\vartheta(X,Y,Z,t)X^nY^m\mathrm{d}X\mathrm{d}Y. \tag{10.75}$$

例如，当$m=0,n=0,1$或2，使用方程（10.55），容易看到这些方程有下面的形式：

$$\frac{\partial\theta_{00}}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial Z}\left(K_{zz}\frac{\partial\theta_{00}}{\partial Z}\right)=0, \tag{10.76}$$

$$\frac{\partial\theta_{10}}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial Z}\left(K_{zz}\frac{\partial\theta_{10}}{\partial Z}\right)=\overline{u}(Z)\theta_{00}, \tag{10.76$'$}$$

$$\frac{\partial\theta_{20}}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial Z}\left(K_{zz}\frac{\partial\theta_{20}}{\partial Z}\right)=2K_{xx}(Z)\theta_{00}+2\overline{u}(Z)\theta_{10}, \tag{10.76$''$}$$

矩量$\theta_{01},\theta_{11},\theta_{02}$和更高阶矩量的方程看起来一样。所得方程可以依次对从浓度$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t)}$的初始条件和边界条件得到的初始条件和边界条件求解。所得的的解的渐近行为描述了对于大的t，平面$Z=$ 常量上（或者具体来说，高度Z附近的一个薄层中）外加物的平均分布，精确道变量（10.75）的方程组截断时同阶的矩量。类似地，变量

$$\Theta_{nm}(t)=\int_0^H\theta_{nm}(Z,t)dZ \tag{10.77}$$

的渐近行为以同样的精度描述了流体占据的整个三维空间中外加物的平均分布。以这种方法得到的最终结果和使用Taylor方法的结果相同。根据这些结果，如果外加物在时刻$t=t_0$在$(0,0,Z)$（其中$0\leq Z\leq H$）引入流动，并且不被壁面吸收，那么外加物团在时刻$t=t_0+\tau$的重心对于大的τ，渐近地具有坐标

$$\left(U_{\mathrm{av}}\tau,0,\frac{H}{2}\right),\text{其中}U_{\mathrm{av}}=\frac{1}{H}\int_0^H\overline{u}(Z)dZ,$$

也就是说，它会盐X轴以速度U_{av}水平位移。沿垂向，外加物会渐近地达到均匀分布，意思是对应大的τ，任意固定厚度ΔZ的流体层含有等量的外加物，其中每一层中的外加物的重心也以渐近恒定的速度U_{av}移动。然而，对于不同的流体层，外加物重心的坐标对于大的τ会相差一个依赖于相应Z值和分布$\overline{u}(Z)$以及$K_{zz}(Z)$的形式的常量。时刻$t_0+\tau$在平面$X=$ 常量内的外

加物分布接近平均值为零，方差

$$\sigma_{\vartheta_y}^2 = 2K_y\tau + 常量, \quad K_y = (K_{yy})_{\text{av}} = \frac{1}{H}\int_0^H K_{yy}(Z)dZ. \tag{10.78}$$

的高斯分布。平面$Y=$常量内的外加物分布接近平均值$\overline{X} \sim U_{\text{av}}\tau$，方差

$$\sigma_{\vartheta_x}^2 = 2K_x\tau + 常量, \quad K_x = K + (K_{xx})_{\text{av}} \tag{10.79}$$

的高斯分布，其中

$$K = \frac{1}{H}\int_0^H \frac{dZ}{K_{zz}(Z)}\left[\int_Z^H [\overline{u}(Z') - U_{\text{av}}]dZ'\right]^2,$$

$$(K_{xx})_{\text{av}} = \frac{1}{H}\int_0^H K_{xx}(Z)dZ \tag{10.80}$$

[见方程（10.70）]。在固定高度Z附近一个薄层中外加物分布在OX方向的分散也具有渐近形式（10.78），但这里恒定分量一般依赖于Z。

Saffman研究了两面固体墙之间的二维渠中的纵向扩散，将其考虑为逆温层下的大气表面层中（它在某个固定高度H阻止外加物进一步上升）外加物传播的一个可能模型。因为这个模型非常粗糙，仅对风速分布$\overline{u}(Z)$进行示意性描述。除了最简单的层流库埃特流的情形，其中

$$\overline{u}(Z) = \frac{2Z}{H}U_{\text{av}}, \quad K_{zz} = \chi = 常量$$

以及根据方程（10.78）-（10.79），

$$K_x = \frac{U_{\text{av}}^2 H^2}{30\chi} + \chi, \tag{10.81}$$

Saffman仅分析了这种情形：

$$\overline{u}(Z) = (a+1)\left(\frac{Z}{H}\right)^a U_{\text{av}}, 其中a = 常量,$$

并且根据雷诺类比，

$$K_{zz}(Z)=\frac{u_*^2}{\mathrm{d}\overline{u}/\mathrm{d}Z}.$$

在最后一种情形，方程（10.79）第一个公式中的积分可以显式地给出。我们得到

$$K_x=\frac{a^3}{(a+2)(3a+2)}\frac{U_{\mathrm{av}}^3H}{u_*^2}+(K_{xx})_{\mathrm{av}}. \tag{10.82}$$

Elder分析了在高度$z=H$有一个自由表面的渠中的扩散，并且将得到的结果和他研究一滴高猛酸钾溶液在略微倾斜的渠（水可以沿这个渠自由流动）中的扩散的实验数据进行了比较。这里需要选择一种平均速度分布，该形式很好地对应于倾斜渠上的真实流动。结果表明，即使这种形式的微小变化，结果也相当敏感。Elder提出，开放渠中的速度分布由冯·卡门常数$\kappa=0.41$的对数形式的速度缺陷定律（5.43）给出。于是，如果K_{zz}用雷诺类比定义，并且假设$K_{xx}=K_{yy}=K_{zz}$，可以得到

$$\begin{aligned}(K_{yy})_{\mathrm{av}} &= (K_{xx})_{\mathrm{av}}=0.068Hu_*,\quad K=5.86Hu_*,\\ K_x &= (5.86+0.068)Hu_*=5.93Hu_*.\end{aligned} \tag{10.83}$$

根据Elder的测量数据，$\frac{K_y}{Hu_*}=\frac{(K_{yy})_{\mathrm{av}}}{Hu_*}\approx0.23$，近似超过方程（10.82）中相应值的两倍。这种不一致性的一个解释可能是三个涡扩散系数K_{xx},K_{yy}和K_{zz}相等的假设不正确。如果替代这个假设，我们假设$K_{xx}=K_{yy}>K_{zz}$，并且回想一下$\overline{w'^2}$通常小于$\overline{u'^2}$和$\overline{v'^2}$[见方程（5.27）下面的讨论]，那么有效纵向扩散系数变为

$$K_x=(5.86+0.23)Hu_*=6.1Hu_*.$$

这个值与从实验得到的$\frac{K_x}{Hu_*}=6.3$符合得非常好。实际上，这种符合比预期的更好，考虑道实验是对相对小的Re数和小的τ，在不能得到高精度数据的条件下进行的。根据Ellison (1960)，必须认为所得到的符合很大程度上是巧合，因为在自由表面附近，对数形式的速度分布不是一个好的近似。于是，Ellison重复了Elder的计算，假设速度分布由方程（5.49"）给出。根据他的结果，K/Hu_*值强烈依赖于方程（5.49"）中系数b的值，$b=1.4$和Elder的数据符合得最好。

自由湍流中的扩散

刚才研究的外加物在直管道或直渠中纵向扩散的情形是非常特殊的，因为保留了一些均匀湍流场中扩散的特征性质。由此观点，湍动射流或固态物体后的湍动尾流是剪切流中扩散更典型的例子。然而，使用半经验扩

散方程的射流或尾流中湍动扩散的理论研究不采用额外的半经验假设确定涡扩散系数以及平均速度$\overline{u}$对空间坐标的依赖是不可能的。这些额外假设通常基于5.9节中讨论的混合长方法。以这种方法得到的结果从实用的观点看通常非常令人满意[见，例如，Hinze (1959)、Abramovich (1963)]，但理论基础不牢靠，不在此赘述。

在研究位于一个持续稳态点源或线源下游、与长度标度$L = UT$（其中U是典型平均速度标度，T是拉格朗日积分时标）相比较小距离处的平面$X =$ 常量 中的外加物分布时，如果我们把拉格朗日速度展开为泰勒级数（9.78），通过变换到拉格朗日变量可以得到一些结果。特别地，如Hinze (1951, 1959)注意到的，在很多情形，一级近似是有用的，根据这个近似，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t) = \overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t_0) + \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x},t_0)$。所以，$X(\boldsymbol{x},t) = x + (\overline{u}+u')\cdot(t-t_0)$并且$Z(\boldsymbol{x},t) = w'\cdot(t-t_0)$，其中$\overline{u}, u'$和$w'$是时空点$(\boldsymbol{x},t_0)$的值。由此得到，在平均速度沿$OX$轴的稳态流中，时刻$t_0$起始于$\boldsymbol{x} = 0$点的流体粒子的在达到$X =$ 常量平面（其中$X \ll L$）时的坐标$Z(t)$在一级近似中等于

$$Z(X) \approx \frac{w'}{\overline{u}+u'}X. \tag{10.84}$$

如果$|u'| \ll \overline{u}$，那么根据这个方程，$Z(X) \approx (w'/\overline{u})X$，所以这里$Z(X)$的概率分布和$w'(0)$的概率分布差一个常数因子。然而，如果$u'$值小于$\overline{u}$，但不是小的可以忽略，那么

$$\frac{Z(X)}{X} \approx \frac{w'}{\overline{u}} - \frac{u'w'}{\overline{u}^2} + \frac{u'^2w'}{\overline{u}^3} - \dots. \tag{10.85}$$

于是，容易把随机变量$Z(X)$的矩量表示为点$\boldsymbol{x} = 0$处欧拉速度涨落$\boldsymbol{u}' = (u', w')$的矩量，我们通常可以限制于序列（10.84）的前几项。当所得方程含有$\boldsymbol{u}'$的四阶矩，显然也可以把它们替换为二阶矩的组合，假设相应的积累量小得可以忽略[见Batchelor, Townsend (1956)和Hinze (1959)]。尽管这些近似明显很粗糙，但它们令人满意地描述了沿OX方向的湍动射流（其中在固定平面$X = 0$放置了一个加热的导体）在$X =$ 常量平面温度分布的主要奇异特征[Hinze, Van der Hegge Zijnen (1951)和Corrsin, Uberoi (1950, 1951)]。作为一个例子，图81展示了Hinze和Van der Hegge Zijnen得到的温度分布。它们在从一个窄喷口喷出的平面射流中距离喷口100 mm、射流轴下方6 mm处引入了一根用电流加热到400 °C 的细线。图81中的OX轴取为平行于细线处的平均速度方向，经过细线，距离X从这里开始测量。不同符号用于标记不同X值的测量。与均匀湍流的类似数据不同，这里温度分布时对称的，或者向正Z方向延展（对应于比负Z更大的平均速度）。所得

结果和方程（10.84）一致，因为在此情形可以取$\overline{w'}=0$和$\overline{u'w'}<0$。图81所示分布的平均值等于0.036。在这个实验中，$-\frac{\overline{u'w'}}{\overline{u}^2}$有相同的值。所以，为了计算平均值

$$\overline{Z(X)}=\frac{\int\overline{\vartheta(X,Z)}ZdZ}{\int\overline{\vartheta(X,Z)}dZ},$$

我们可以忽略方程（10.84）右边第三项。让我们也注意到，如果我们尝试用具有恒定系数K_{zz}的半经验扩散方程描述射流中的温度分布，那么对应图81的条件，我们会得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\vartheta(X,Z)}ZdZ<0,$$

这和数据矛盾。

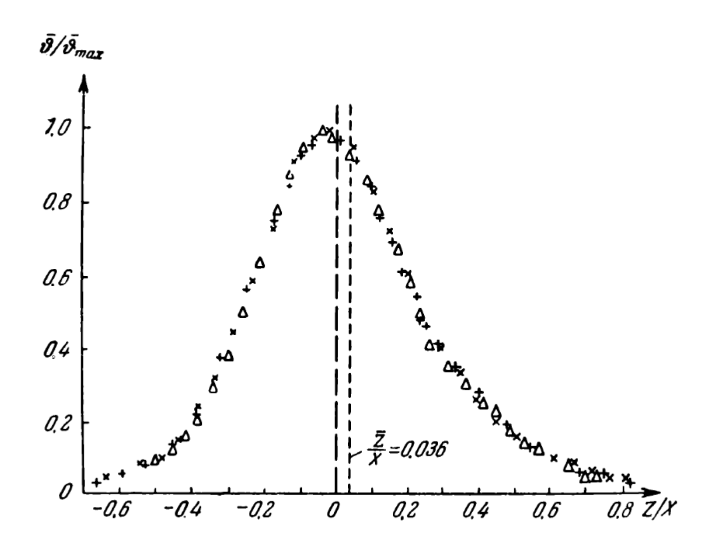


图 79 放置了加热细线的二维湍动射流的几个截面上的温度分布（根据Hinze和Van der Hegge Zijnen的工作）。

在另一个极端情形，也就是对于非常大的X，或者换句话说，非常大的扩散时间$\tau=t-t_0$，使用5.8节和9.4节中讨论的自守性论证可以得到一些结果。由这些论证立即得到，对于位于产生尾流的物体或发出射流的喷口附近的稳态持续外加物源，任意两个平面$X=$常量的平均浓度分布，对于足够大的X值（其中X是从源开始沿平均流动速度方向计算的）是相似的。以完全相同的方式，对于也位于物体或喷口附近在时刻$t=t_0$产生作用的瞬时源，三维空间中的平均浓度分布在足够远离时刻t_0的两个时刻t将是相似的。基于相似性论证，可以自然地假设

相应的分布是对称的，对于距离轴或点$(\overline{X(\tau)},0,0)$（其中$\overline{X(\tau)}$由9.4节对于瞬时源的方程给出）足够近的持续源，分布的极大值位于射流的轴上，或者尾流的$X=$ 常量 平面上。这里5.8节和9.4节的结果可以简单地确定相应的最大浓度$\vartheta_m(X)$或$\vartheta_m(\tau)$对X或τ的依赖，尽管不可能给出分布$\overline{\vartheta(Y,Z)}$或$\overline{\vartheta(X,Y,Z)}$的严格形式。

让我们从持续活跃稳态外加物源的情形开始，使用这个事实，由于扩散过程是稳态的，通过任意平面$X=$ 常量的外加物流量一定为常量。在湍动尾流中，远离物体处外加物沿OX方向输运的速度显然近似等于自由流动速度。同时，点$\boldsymbol{x}=0$在平面$X=$ 常量平面产生可观的外加物流量的面积，在有限大小物体后三维尾流的情形正比于$L^2\sim X^{2/3}$ 增加，对于圆柱后的二维尾流正比于

$$L(X)[D_{22}(\tau)]^{1/2}\sim X^{1/2}\left[D_{22}\left(\frac{X}{U}\right)\right]^{1/2}\sim X.$$

在圆柱和平行于圆柱轴的线状外加物源后的尾流的第三种情形，单位OY轴长度的外加物流量一定为常量。在$X=$ 常量中，单位长度的OY对应于一个其中浓度$\overline{\vartheta}$明显不等于0的矩形，其面积正比于$L(X)\sim X^{1/2}$。然而，因为平面$X=$ 常量中的外加物浓度正比于$\vartheta_m(X)$，我们得到

$$\vartheta_m(X)\sim\begin{cases}X^{-2/3}, & \text{对于三维尾流中的点源,}\\ X^{-1}, & \text{对于二维尾流中的点源,}\\ X^{-1/2}, & \text{对于二维尾流中的线源.}\end{cases}\tag{10.86}$$

类似的论证也可以应用于两个平面平行流动的平面混合层中的扩散和湍动射流中的扩散，包括对流产生的射流中的被动外加物的扩散。然而，现在通过平面$X=$ 常量的外加物输运的平均速率$\overline{u}$每个地方都不等于固定的速度U_0，而是X,Y 和Z的函数。然而，重要的是当参数X改变时，Y和Z的函数$\overline{u}(X,Y,Z)$仍然是相似的，或者自守的，其最大值对于平面混合层和二维对流射流保持恒定，对于（进入充满了同样流体的空间的）动力学三维射流正比于X^{-1}减小，对于动力学二维射流正比于$X^{-1/2}$，对于三维对流射流正比于$X^{-1/3}$。此外，$X=$ 常量平面上浓度$\overline{\vartheta(X,Y,Z)}$明显不等于的部分的面积对于三维射流中的外加物点源正比于$L^2(X)$增大，对于二维射流的线源或平面混合层正比于$L(X)$，在二维射流中点源的情形，正比于$L(X)[D_{22}(\tau_x)]^{1/2}$（其中$\tau_x$由方程（9.47）定义或者借助等式$\overline{X(\tau_x)}=X$由相关的方程定义）。因为外加物流量正比于浓度、速度和面

积的乘积，上面得出方程（10.85）的论证现在得到下面的关系式：

$$\vartheta_m(X) \sim \begin{cases} X^{-1/2}, & \text{对于二维射流中的线源,} \\ X^{-1}, & \text{对于三维射流中的点源和混合层或二维对流射流中的线源,} \\ X^{-3/2}, & \text{对于二维射流中的点源,} \\ X^{-3/3}, & \text{对于三维对流射流中的点源,} \\ X^{-2}, & \text{对于混合层或二维对流射流中的点源.} \end{cases} \qquad (10.85')$$

这里及下面，如果没有迹象表明射流是对流的，那么我们假设它是进入充满同样流体的空间中的正常动力学射流。

在瞬时外加物源的情形，外加物的总质量必须保持恒定，或者如果源是线状的，那么单位长度OY轴的外加物质量必须保持恒定。然而，在时间τ中，来自瞬时源的外加物团沿OX轴的长度由长度标度$[D_{ii}(\tau)]^{1/2}$表征，和$L[\overline{X(\tau)}]$符合到相差一个常量。根据9.4节的结果，我们由此得到下面的源自瞬时点源、在释放后时间τ的外加物团最大浓度$\vartheta_m(\tau)$的方程：

$$\vartheta_m(\tau) \sim \begin{cases} \tau^{-1/2}, & \text{对于三维尾流中的点源和二维尾流中的线源,} \\ \tau^{-4/3}, & \text{对于二维射流中的线源,} \\ \tau^{-3/2}, & \text{对于二维尾流和三维射流中的点源,} \\ \tau^{-2}, & \text{对于二维射流中的点源和二维对流射流和混合层中的线源,} \\ \tau^{-9/4}, & \text{对于三维对流射流中的点源.} \\ \tau^{-3}, & \text{对于二维对流射流和混合层中的点源.} \end{cases} \qquad (10.87)$$

方程（10.85）-（10.86）的大部分结果属于Batchelor (1957)，剩下的是Yaglom (1965)给出的。

无界均匀湍动剪切流中的扩散

我们通过考虑具有恒定横向平均速度梯度$\mathrm{d}u_x(Z)/\mathrm{d}Z = \Gamma$和稳态涨落场$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{X},t)$的无界剪切流中的外加物扩散来结束本小节。在9.4节中我们已经看到，速度梯度和横向“垂直”湍动扩散的相互作用导致纵向分散规律的质变，不再是管流或渠流中这种相互作用导致的有效水平扩散系数的简单增大。具体来说，这种相互作用意味着纵向分散渐近变得正比于τ^3，而不是τ，和通常的情形一样。所以，假设这种流动中初始为球形的外加物团形成沿OX伸长的椭球形纺锤，其主轴相对平面$Z=0$略微倾斜。因为我们假设涨落场$\boldsymbol{u}'$是均匀和稳态的，所以这里使用涉及涡扩散系数对坐标的依赖的半经验扩散方程并不困难。这些扩散系数可以自然地考虑为空间和时间的常量。所以，有理由预期，在此情形扩散过程的所有基本特征可以通过

研究初始条件为$\overline{\vartheta(\boldsymbol{X},t_0)}=\delta(\boldsymbol{X})$的微分方程

$$\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial t}+\Gamma Z\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial X}=K_{xx}\frac{\partial^2\overline{\vartheta}}{\partial X^2}+K_{yy}\frac{\partial^2\overline{\vartheta}}{\partial Y^2}+K_{zz}\frac{\partial^2\overline{\vartheta}}{\partial Z^2} \tag{10.88}$$

的解来解释。不难看出，所需的方程（10.87）的解在时刻$t=t_0+\tau$是平均值为零、二阶矩

$$\left.\begin{array}{l} D_{xx}=\frac{2}{3}\Gamma^2K_{zz}\tau^3+2K_{xx}\tau, D_{yy}=2K_{yy}\tau, D_{zz}=2K_{zz}\tau, \\ D_{xy}=D_{yz}=0, D_{xz}=\Gamma K_{zz}\tau^2, \end{array}\right\} \tag{10.89}$$

的三维高斯分布，也就是它具有这种形式：

$$\begin{aligned}\overline{\vartheta}(\boldsymbol{X},t_0+\tau) \;=\; & \frac{1}{(4\pi r)^{3/2}[(K_{xx}+\Gamma^2K_{zz}\tau^2/12)K_{yy}K_{zz}]^{1/2}} \\ & \exp\left\{-\frac{(X-\Gamma Z\tau/2)^2}{4K_{xx}\tau+\Gamma^2K_{zz}\tau^3/3}-\frac{y^2}{4K_{yy}\tau}-\frac{Z^2}{4K_{zz}\tau}\right\}.\end{aligned}$$

Novikov (1958)得到了这个结果和它的一些推广。后来Elrick (1962)也对其进行了更详细的讨论。Smith (1965)基于方程（10.76）、（10.76'）、（10.76"）等的研究，将Aris (1956)的矩量方法应用于同样的问题（但令$K_{xx}=0$）。他发现，对于大的$\tau=t-t_0$，某个给定高度Z的外加物分布中心位于点$(\Gamma Z\tau/2,0)$，方差$\sigma^2_{\vartheta_x}=\Gamma^2K_{zz}\tau^3/6$、$\sigma^2_{\vartheta_y}=2K_{yy}\tau$。这些结果和方程（10.88'）完全一致。

方程（10.88）展示了$\Gamma=0$和$\Gamma\neq0$之间的巨大不同。它们也符合方程（10.53），根据这些方程，扩散系数K_{ij} 等于$\tau=0$的协方差$D_{ij}(\tau)$的一半。这些方程和严格的拉格朗日方程（9.57）、（9.57'）和（9.58）的比较非常清楚地表明，我们的新结果是方差$D_{11}=D_{xx}$和$D_{13}=D_{xz}$的严格方差在$\tau\gg T_3$时的渐近形式，其中，和通常一样，$K_{zz}=\overline{w'^2}T_3$，$K_{xx}=\overline{u'^2}T_1$。然而，半经验扩散理论不能计算适中$\tau$值的方差$D_{ij}$。所以，我们再一次验证了这个理论近描述了对大的扩散时间正确的渐近规律。

多维高斯密度函数的最大值显然反比于协方差矩阵的行列式的平方根。所以在具有速度梯度的均匀湍流场中，在时刻$t=t_0$由一个瞬时点源产生的外加物团中心的浓度$\vartheta_m(t)$会正比于$\tau^{-3/2}$随着$\tau=t-t_0$渐近减小，而不是具有恒定平均速度的均匀湍流情形的$\tau^{-5/2}$。以完全相同的方式，OY轴上瞬时线源产生的外加物浓度最大值会正比于τ^{-2}减小，而不是τ^{-1}。知道了对应于瞬时点源的解，并使用方程（10.6）和（10.8），也可能得到对应于稳态点源和线源的浓度分布。然而，我们不在这里讨论。

我们现在考虑具有比线性分布更复杂的平均速度分布$\overline{u}(Z)$以及不依赖

于坐标Z的涡扩散系数的无界湍流。在此情形，对应于瞬时点源的扩散方程（10.55）的严格解不能显式地给出。然而，如果平均速度和扩散系数对Z的依赖由足够简单的方程给出，或者如果函数$\overline{u}(Z)$、$K_{xx}(Z)$、$K_{yy}(Z)$和$K_{zz}(Z)$是幂函数，那么半经验方程（10.55）描述的扩散过程的基本特征可以用（10.76）、（10.76'）、（10.76"）等矩量$\theta_{nm}(Z,t)$的方程研究。这里，平均速度梯度和扩散系数K_{zz}描述的垂向湍动扩散的相互作用导致水平分散，这对于大的扩散时间$\tau = t - t_0$通常远超过没有剪切的普通的水平湍动扩散。此外，和管道或渠中的水平分散相比，在无界空间中额外的水平分散通常不会简化为简单增加到某个新的水平扩散系数$K > K_{xx}$，而是得出水平方差$\sigma^2_{\vartheta_x}$正比于τ某个高于1次的幂次。这会在接下来研究实践中更重要的半空间$Z > 0$中的扩散的重要情形（其中保留了无界空间中这类扩散的所有特殊特征）的那些小节详细讨论。

10.5 大气表面层中的扩散

在10.1节开头提到的湍动扩散最重要的例子无疑是那些和大气中外加物扩散有关的例子。因此，毫不奇怪，在湍动扩散的文献中，致力于大气扩散的工作占主导地位，特别是10.1节开头提到的所有文献。

大气扩散研究中最有趣的是和人类生命和生活最直接相关的空气表面层中的扩散。这里，问题主要在于扩散发生在一个通常有热分层的湍流边界层中，填满固体或流体下垫面上方的半空间，我们假设下垫面是均匀的，位于$Z = 0$平面。所以，前一小节的结果（其中假设流体在管或渠的壁面之间流动或者充满所有无界空间）不能直接用于大气扩散。然而，顺便注意到，$Z = 0$和$Z = H$之间的平面渠在某种程度上可以应用于在高度H存在强逆温层的大气表面层中的扩散。在这种逆温层中，温度随高度升高，从而导致垂向交换在H处急剧减小，见，例如Rounds (1955)、Saffman (1962b)、Tseytin (1963)、Tyldesley和Wallington (1965)。显然，我们对大气扩散理论的主要兴趣不在于这个模型，而在于整个$Z > 0$半空间中的扩散，我们将在下面研究。

均匀风情形的半经验扩散方程的解

我们从使用半经验扩散方程的最简单方法开始。和通常一样，我们作不严格的假设：坐标系$OXYZ$的轴[其中OX方向和平均风速$\overline{u} = \overline{u}(Z)$的方向一致] 是涡扩散张量$K_{ij} = K_{ij}(Z)$的主轴。在此情形，假设半经验扩散方程为方程（10.55）的形式。于是，尾流把扩散理论的所有基本问题转化为明确的数学物理问题，我们只需要给出风速$\overline{u}$和扩散系数K_{xx}、K_{yy}和K_{zz}对高度的依赖关系。

方程（10.55）只能在其系数对高度依赖的一些特殊假设下显式求

解。对应于不同类型外加物源的解的定性特征可以在方程（10.58）（也就是常系数$\overline{u}, K_{xx}, K_{yy}$和$K_{zz}$的（10.55）形式的方程）最简单的例子中找到。Roberts (1923)研究了最简单的半经验扩散方程。这里，对应于在点$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$存在一个输出为$Q$的瞬时点源的无界空间的解可以从方程（10.12），把X_1替换为$X_1 - \overline{u}\tau$，$D_{ii}(\tau)$替换为$2K_{ii}\tau$而得到。使用这个事实容易看到，对于半空间$Z > 0$中、$Z = 0$的边界条件为“反射边界条件” $\frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial Z} = 0$ 的扩散，对应于时刻$t = t_0$时在点$(0, 0, H)$的瞬时点源的解由公式

$$\vartheta(X, Y, Z, t) = \frac{Q}{[4\pi(t-t_0)]^{3/2}(K_{xx}K_{yy}K_{zz})^{1/2}} \exp\left\{-\frac{[X-\overline{u}(t-t_0)]^2}{4K_{xx}(t-t_0)} - \frac{Y^2}{4K_{yy}(t-t_0)}\right\}\left[e^{-\frac{(Z-H)^2}{4K_{zz}(t-t_0)}} + e^{-\frac{(Z+H)^2}{4K_{zz}(t-t_0)}}\right] \tag{10.90}$$

给出。对于“吸收”边界条件（也就是$\overline{\vartheta}(X, Y, 0, t) = 0$），方程（10.58）的解和方程（10.89）的差别仅仅在于中括号中第二项是负号而不是正号。类似地，方程（10.59）和（10.61）可以用于得到方程（10.58）在半空间$Z > 0$中、在$Z > 0$的吸收或反射条件下、对应于在高度$Z = H$处的一个稳态点源或线源的解。通常，这些解可以使用这个事实进行简化：$\overline{u}\overline{\vartheta} \gg \overline{u'\vartheta'}$，所以对流项$\overline{u}\frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial X}$几乎总是远超过相应的扩散项

$$-K_{xx}\frac{\partial^2 \overline{\vartheta}}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X}\overline{u'\vartheta'},$$

见，例如，Karol’(1960)、Walters (1964)和Yordanov (1967)关于某些特殊的扩散问题的估计。所以，$K_{xx}\frac{\partial^2 \overline{\vartheta}}{\partial X^2}$在方程（10.55）中通常可以忽略。在方程（10.59）和（10.61）中这对应于$K_{xx} \to 0$ 的极限。在这个条件下，假设对应于点$(0, 0, H)$处输出为Q的稳态点源和$Z = 0$的反射边界条件的解具有这种形式

$$\overline{\vartheta}(X, Y, Z) = \frac{Q}{4\pi X\sqrt{K_{yy}K_{xx}}} e^{-\frac{\overline{u}Y^2}{4K_{yy}X}} \left[e^{-\frac{\overline{u}(Z-H)^2}{4K_{zz}X}} + e^{-\frac{\overline{u}(Z+H)^2}{4K_{zz}X}}\right]. \tag{10.91}$$

对于$Z = 0$的吸收边界条件，我们再一次只需要把方程（10.90）方括号中的加号换成减号。根据方程（10.90），沿垂直于风的方向的$X =$ 常量$, Z =$ 常量线的外加物分布对于任意X和Z，由具有正比于$X^{1/2}$、反比于$\overline{u}^{1/2}$ 的标准差$\left(\frac{2K_{yy}X}{\overline{u}}\right)^{1/2}$的高斯函数给出。当$X$增大并且$Y$和$Z$固定，浓度$\overline{\vartheta}$渐近正比于$X^{-1}$减小，类似于无界空间中均匀湍流场中的扩散。对于外加物的反

射边界条件，最大表面浓度

$$\overline{\vartheta}_{\max} = \frac{Q}{\pi e \overline{u} H^2} \left(\frac{K_{zz}}{K_{yy}} \right)^{1/2}$$

反比于源高度的平方。这是在$Y=0$时在距离源$X=\frac{\overline{u}H^2}{4K_{zz}}$的距离（直接正比于$H^2$）达到的。对于吸收边界条件，容易证明下垫面吸收外加物的速率

$$\sigma(X,Y) = K_{zz} \left. \frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial Z} \right|_{Z=0}$$

渐近正比于X^{-2}减小。在此情形，最大吸收速率

$$\sigma_{\max} = \frac{4QK_{zz}}{\pi e^2 \overline{u} H^3} \left(\frac{K_{zz}}{K_{yy}} \right)^{1/2}$$

反比于源的高度的立方，在$Y=0$和$X=\frac{\overline{u}H^2}{8K_{zz}}$时取得。对于单位长度单位时间产生质量$Q$的外加物的沿直线$X=0, Z=H$ 的稳态线源的解，在反射边界条件下具有这种形式

$$\overline{\vartheta}(X,Z) = \frac{Q}{2(\pi \overline{u} X K_{zz})^{1/2}} \left[e^{-\frac{\overline{u}(Z-H)^2}{4K_{zz}X}} + e^{-\frac{\overline{u}(Z+H)^2}{4K_{zz}X}} \right] \tag{10.92}$$

（在地球表面外加物吸收的情形，我们必须再次把加号换为减号。）根据方程（10.91），来自线源的面浓度在大的距离处正比于$X^{-1/2}$减小。方程（10.58）对应于更一般边界条件

$$K_{zz} \left. \frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial Z} \right|_{Z=0} = \beta \overline{\vartheta}|_{Z=0}, \text{其中} 0 < \beta < \infty$$

的解也可以显式给出，但它们具有更复杂的形式，所以不在这里讨论。

第一眼看，上面列举的用浓度$\overline{\vartheta}$的方程（10.58）得到的结果看起来非常有可能，然而，它们和大气表面层扩散的各此野外研究得到的数据更不不符合。例如，实验表明，中性分层大气中稳态点源产生的外加物面浓度随与源的距离近似正比于X^{-2}减小[根据Sutton (1952)，正比于$X^{-1.8}$]，不可能正比于X^{-1}；中性分层大气中稳态线源产生的面浓度正比于X^{-1}或$X^{-0.9}$减小[Sutton (1953), Pasquill (1962b)]，而不是$X^{-1/2}$。稳定或不稳定分层的数据比中性分层的数据少，但它们也表明没有什么情形，面浓度减小会符合方程（10.90）和（10.91）推导出的简单规律[见，例如，Deacon (1949)]。所以，一定可以得出结论，方程（10.58）不适于定量

描述表面层中的大气扩散。

理论上，缺乏对应关系可以用这个事实解释：半经验扩散方程无法严格推导且不精确。显然，没有足够的基础得出结论，半经验扩散方程不适用于大气外加物分散。实际上，所有前面的结论的推导都是基于非常粗糙的模型，其中完全忽略风速和涡扩散系数对高度的依赖。然而，众所周知，在真实大气中，风速和扩散系数都随高度增大（见上面的第4章）。所以，自然的是首先尝试推广这个模型，对函数$\overline{u}(Z), K_{xx}(Z), K_{yy}(Z)$和$K_{zz}(Z)$的形式进行一些合理假设。（后面会考虑加入张量$K_{ij}$ 的非对角分量的令一类推广。）很多研究者进行了这些努力，因为具有变化系数的扩散方程的求解碰到了巨大的分析上的困难，这些努力产生了大量文献，主要有应用上的吸引力。

让我们首先注意到，目前在风速$\overline{u}(Z)$随高度变化的任何情形还没有得到半空间$Z>0$非稳态扩散问题（容易简化为找到源自一个瞬时点源的扩散的方程）的显式解析解。所以，为了求解源自一个瞬时点源的外加物团的扩散问题，总是使用一些近似假设。通常，首先仅考虑垂向扩散过程，也就是，确定某个高度Z处总浓度对时间的依赖，它等于

$$\theta_{00}(Z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int\overline{\vartheta}(X,Y,Z,t)\mathrm{d}X\mathrm{d}Y$$

[见上面的方程（10.75）]，随后近似考虑水平扩散。如我们所知，函数$\theta_{00}(Z,t)$满足方程（10.76）

$$\frac{\partial\theta_{00}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial Z}\left[K_{zz}(Z)\frac{\partial\theta_{00}}{\partial Z}\right].$$

对于时刻$t=t_0$位于高度$Z=H$的瞬时点源和边界$Z=0$处的外加物被反射，相应的初始条件和边界条件具有这种形式

$$\theta_{00}(Z,t_0)=Q\delta(Z-H), K_{zz}\left.\frac{\partial\theta_{00}}{\partial Z}\right|_{Z=0}=0, \theta_{00}(Z,t)\to 0\text{对于}Z\to\infty. \tag{10.93}$$

各个水平面$Z=$ 常量之间的外加物分布依赖于风速分布，而不是水平扩散系数，由函数$K_{zz}(Z)$和源的高度H唯一地确定。例如，Laykhtman在20世纪40年代得到了方程（10.76）在函数$K_{zz}(Z)$的条件（10.92）下（合适地近似了大气表面层中各种气象条件下垂向涡扩散系数的分布）的解。后来，很多其他研究者也对它们进行了研究[见，例如，Monin (1956a)]。当$K_{zz}=K_1Z$，这个解具有这种形式

$$\theta_{00}(Z,t)=\frac{Q}{K_1(t-t_0)}e^{-\frac{Z+H}{K_1(t-t_0)}}I_0\left[\frac{2\sqrt{HZ}}{K_1(t-t_0)}\right], \tag{10.94}$$

其中I_0表示一个虚宗量贝塞尔函数，或者说零阶第一类修正贝塞尔函数。因为对于中性分层，$K_{zz}=\alpha\kappa u_*Z$，其中$\alpha=\frac{K_\vartheta}{K}=$ 常数 ≈ 1.1[见方程（5.29）和5.7节]，在没有显著垂向温度梯度时使用方程（10.93）是很自然的。在面源的情形，或者当$H=0$，方程（10.93）被极大地简化。这里

$$\theta_{00}(Z,t)=\frac{Q}{K_1(t-t_0)}e^{-\frac{Z}{K_1(t-t_0)}} \tag{10.93'}$$

在更一般的涡扩散系数对高度的依赖为幂律的情形（$K_{zz} = K_1 Z^n$，其中$0 < n < 2$）[3]，在（10.92）条件下方程（10.76）的解如下

$$\begin{aligned} \theta_{00}(Z,t) &= \frac{Q}{(2-n)K_1(t-t_0)H^{n-1}} \left(\frac{Z}{H}\right)^{\frac{1-n}{2}} e^{-\frac{Z^{2-n}+H^{2-n}}{(2-n)^2 K_1(t-t_0)}} \\ & I_{-\frac{1-n}{2-n}} \left[\frac{2(ZH)^{\frac{2-n}{2}}}{(2-n)^2 K_1(t-t_0)}\right]. \end{aligned} \tag{10.95}$$

当$H \to 0$，我们得到

$$\theta_{00}(Z,t) = \frac{Q}{(2-n)^{\frac{n}{2-n}} \Gamma\left(\frac{1}{2-n}\right) [K_1(t-t_0)]^{\frac{1}{2-n}}} e^{\frac{Z^{2-n}}{(2-n)^2 K_1(t-t_0)}}. \tag{10.94'}$$

在使用含有“拐折”（即由覆盖不同区间的两个解析表达式组成）的函数$K_{zz}(Z)$时会得到$\theta_{00}(Z,t)$的更复杂的公式。然而，当

$$K_{zz}(Z) = \begin{cases} K_1 Z, & \text{对于 } 0 < Z < H_1, \\ K_1 H_1 = \text{常量}, & \text{对于 } Z \geq H_1, \end{cases} \tag{10.96}$$

Monin (1956a)给出并数值研究了贝塞尔函数积分形式的函数$\theta_{00}(Z,t)$的复杂解析表达式。Yordanov (1966, 1968a)研究了$K_{zz}(Z)$的两层模型，由两个幂函数组成，更复杂。

根据第4章大气表面层的相似性理论，在选择函数$K_{zz}(Z)$的解析形式之前，变换为无量纲变量是有利的：

$$\zeta = \frac{Z}{|L|}, \tau = \frac{\kappa u_* t}{|L|}, \eta = \frac{H}{|L|}, K(\zeta) = \frac{K_{zz}(Z)}{\kappa u_* |L|}, \Theta = \frac{|L|\theta_{00}}{Q} \tag{10.97}$$

其中L是方程（7.12）定义的表面层中的自然标高。如果和往常一样，我们假设热量的涡扩散系数等于任何被动外加物的涡扩散系数，那么方程（7.21）显然表明方程（10.96）中的物理量K与Richardson数Ri，或者在不稳定分层的情形与其模仅相差一个$\alpha^2 = \left(\frac{K_\vartheta}{K}\right)^2$的因子，这个因子显然在很多情形和1相差不大。然而，极端不稳定或稳定情形是例外。函数$\Theta(\zeta,\tau) = \Theta(\zeta,\tau|\eta)$现在由这些条件定义：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \zeta} K(\zeta) \frac{\partial \Theta}{\partial zeta}, K(\zeta) \left.\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=0} = 0 \\ \Theta &\to 0 \text{对于} \zeta \to \infty, \Theta(\zeta,0) = \delta(\zeta - \eta), \end{aligned} \tag{10.98}$$

这是普适的，也就是，不含有任何气象学参数。从理论上来说，这里我们只需要考虑对应于两个不同函数$K(\zeta)$的不稳定和稳定分层的情形，我们就得到了可以用于所有真实情形的公式。从实用的观点看，加上中性分层的第三种情形是方便的，尽管原则上它可以从前两种情形中任意一种在$|L| \to \infty$时得到。在这第三种情形，如我们已经注意到的，最好假设$K(\zeta) = \zeta$，或者更准确地，$K(\zeta) = \alpha\zeta, \alpha \approx 1.1$，并且应用到方程（10.93）和

[3]可以证明，方程（10.76）没有解满足当$K_{zz} = K_1 Z^n, n \geq 2$时，在$t \to t_0$时$\theta_{00}(Z,t) \to \delta(Z-H)$的条件。然而，这个事实在大气扩散理论中不重要，因为$n \geq 2$的情形在大气的应用中没碰到。

（10.93'）。对于稳定和不稳定分层，如果足够精确地知道相应的普适函数$K(\zeta)$，那么就可以一劳永逸地数值求解（10.97）的两个问题，不需要实用$K(\zeta)$的任何解析近似，建立相应的三个变量的函数$\Theta(\zeta,\tau|\eta)$的表格。然而，我们由第8节知道，对于不稳定分层以及特别是稳定分层，只知道函数$K(\zeta)$的一般特征。此外，在真实条件下使用相似性理论总是伴随着具有相当大弥散的实验数据。于是，我们总是限于使用$K(\zeta)$的近似表达式，其选择使得我们可以得到$\Theta(\zeta,\tau|\eta)$的显式公式。特别地，对于弱稳定分层或当L很大并且仅对相对小的ζ感兴趣，可以按照Laykhtman (1944)和Deacon (1949)把$K(\zeta)$近似为$K_1\zeta^n$的幂函数，其中指数n小于1。对于强稳定性，或者当我们对很宽范围的ζ感兴趣，我们可以使用这个事实

$$K(\zeta)=\alpha_0\zeta \text{对于}\zeta\to 0\text{以及}K(\zeta)\to\frac{\alpha_\infty}{R}=\text{常量 对于}\zeta\to\infty$$

（见第7节）并使用（10.95）形式的函数$K(\zeta)$。类似地，对于弱不稳定分层，可以近似假设$K(\zeta)=K_1\zeta^n$，其中n比1大。对于更强的不稳定性，从方程（7.51）推导出来的下面形式的两层公式

$$K(\zeta)=\begin{cases}\alpha_0|\zeta|, & \text{对于 } 0\le-\zeta\le\zeta_1^*=\left(\frac{C_2\alpha_0}{3\alpha_{-\infty}}\right)^3,\\ \frac{3\alpha_{-\infty}}{C_2}|\zeta|^{4/3}, & \text{对于 } -\zeta>\zeta_1^*,\end{cases} \tag{10.99}$$

更适合：Yordanov (1966, 1968a)研究了这种情形。最后，对于特别强的不稳定性，当我们对超过0.05的$|\zeta|$值特别感兴趣，可以假设$K(\zeta)=K_1\zeta^{4/3}$并使用$n=4/3$的方程（10.94）-（10.94'）。

上面提到的结果可以对于任意热分层，非常精确地半经验地描述的大气表面层中的垂向扩散。然而，对于水平扩散，这里最简单（但非常粗糙的）方法是把风速$\overline{u}(Z)$和系数$K_{xx}(Z)$和$K_{yy}(Z)$近似替换为常量$U_{\rm av}$、$(K_{xx})_{\rm av}$和$(K_{yy})_{\rm av}$（等于相应的Z的函数在外加物团上下界之间的流体层中的平均值）。（这可以事先由函数$\theta_{00}(Z,t)$计算。）于是，时刻$t=t_0$在点$(0,0,H)$出、输出为Q的瞬时点源产生的浓度$\overline{\vartheta}(X,Y,Z,t)$在一级近似下可以表示为

$$\begin{aligned}\overline{\vartheta}(X,Y,Z,t)\quad\approx\quad & \frac{1}{4\pi[(K_{xx})_{\rm av}(K_{yy})_{\rm av}]^{1/2}(t-t_0)}\\ & \exp\left\{-\frac{[X-U_{\rm av}(t-t_0)]^2}{4(K_{xx})_{\rm av}(t-t_0)}-\frac{Y^2}{4(K_{yy})_{\rm av}(t-t_0)}\right\}\theta_{00}(Z,t),\end{aligned} \tag{10.100}$$

其中$\theta_{00}(Z,t)$是相应方程（10.76）在条件（10.92）下的解。因为系数$K_{xx}(Z)$和$K_{yy}(Z)$通常知之甚少，方程（10.99）的实际应用经常非常困难并且可能对于这些系数的各个值，得出非常不同的结果。然而，更重要的是，对任意选择的具有恒定平均风速的K_{xx}和K_{yy}使用（10.99）形式的方程时，我们完全丢失了垂向混合和风剪切之间相互作用的重要效应。上面我们已经看到，在管和渠以及无界空间中的湍动剪切流中，对于足够大的扩散时间，这个效应在水平外加物分散中起到了主要作用。所以很明显，方程（10.99）在大气表面层中也只能用于相对较小的$t=t_0$值。

风剪切水平大气分散中的效应

Saffman (1962b)使用Aris的方法近似计算了风剪切对水平分散的影响。这里，$Z=$常量平面上的外加物分布由方程（10.75）给出的一些一级矩量$\theta_{nm}(Z,t)$描述。对于$\theta_{00},\theta_{10},\theta_{2,0}$等矩量，我们由半经验扩散方程

（其中，10.4节中使用的渠的上边界$Z = H$的边界条件$\frac{\partial\theta_{nm}}{\partial Z}\big|_{Z=H} = 0$现在必须替换为当$Z \to \infty$，$\theta_{nm}(Z,t) \to 0$）得到了类似的方程（10.76）。因为我们主要感兴趣于时刻t_0的瞬时源产生的外加物团在$t - t_0 \to \infty$的渐近行为，所以我们限制于位移坐标原点（即点$(0,0,0)$）的一个面源，因为可以自然地假设源的高度H只会影响分散过程一段有限的时间。为了研究风剪切和垂向混合之间相互作用产生的基本的定性奇异性，让我们首先考虑最简单的情形，其中$\overline{u}(Z) = \Gamma Z$，$K_{zz}(Z) = K =$ 常量。（$\overline{u}(Z) = U_0 + \Gamma Z, K_{zz} =$ 常量的情形（对于处于有限高度H的源有意义）容易由此借助变换到一个新的惯性坐标系而得到。）于是，所需的$\theta_{00}(Z,t)$的方程（10.76）的解为

$$\theta_{00}(Z,t) = \theta_{00}(Z,t_0+\tau) = \frac{Q}{(\pi K\tau)^{1/2}} e^{-\frac{Z^2}{4K\tau}}.$$

（这里以及后面，符号τ表示差值$t-t_0$。）方程（10.76'）在$K_{zz} = K, \overline{u}(Z) = \Gamma Z$时的函数$\theta_{10}(Z,t)$ 以及$\theta_{00}(Z,t)$ 的解更复杂。然而，很明显它一定正比于$Q\Gamma$，于是，基于量纲分析它一定具有这种形式

$$\theta_{10}(Z,t) = \theta_{10}(Z,t_0+\tau) = Q\Gamma\tau \cdot \varphi_{10}\left(\frac{Z}{(K\tau)^{1/2}}\right). \tag{10.101}$$

这里$\varphi_{10}(\xi)$是一个单变量普适函数，在$\xi \to \infty$时，$\varphi_{10}(\xi) \to 0$。借助方程（10.76'），这个函数可以简单地用$\exp(-\xi^2)$和数学物理中所谓的抛物柱函数表示[见Saffman (1962b)]。这对于最重要的函数$\theta_{20}(Z,t)$（描述了平面$Z =$ 常量上的外加物分布沿OX轴方向的方差）也成立。根据方差（10.76"），这个函数也依赖于水平涡扩散系数K_{xx}。更准确地说，它时两项之和，第一项仅依赖于$\overline{u}(Z)$和$K_{zz} = K$，而不依赖于K_{xx}，第二项依赖于$K_{xx}(Z)$和$K_{zz} = K$而不依赖于$\overline{u}(Z)$。这些项的第一项显然正比于$Q\Gamma^2$，所以基于量纲分析一定可以写为乘积的形式

$$Q\Gamma^2 K^{-2} (K\tau)^{5/2} \varphi_{20}(Z/(K\tau)^{1/2}).$$

第二项的一般形式也容易写出，如果我们假设K_{xx}是Z的幂函数。特别地，如果$K_{xx} = K_1 =$ 常量或者$K_{xx} = K_1^* Z$，其中$K_1^* =$ 常量，那么我们所需的方程（10.76）的解可以写为

$$\theta_{20}(Z,t_0+\tau) = \frac{Q\Gamma^2}{K^2}(K\tau)^{5/2}\varphi_{20}\left(\frac{Z}{\sqrt{K\tau}} + \right)$$

$$\begin{cases} QK_1\sqrt{\frac{\tau}{K}}\varphi_{20}^{(1)}\left(\frac{Z}{\sqrt{K\tau}}\right), & \text{对于}K_{xx}=K_1, \\ QK_1^*\tau\varphi_{20}^{(2)}\left(\frac{Z}{\sqrt{K\tau}}\right), & \text{对于}K_{xx}=K_1^*Z. \end{cases} \tag{10.102}$$

这里$\varphi_{20}(\xi)$、$\varphi_{20}^{(1)}(\xi)$和$\varphi_{20}^{(2)}(\xi)$是新的函数，在无穷远处衰减，它们也可以用函数$\exp(-\xi^2)$和抛物柱函数表示。对于更高阶的矩量$\theta_{nm}(Z,t)[n+m>2]$也可以得到类似但更复杂的表达式。

根据（10.100）、（10.101）等方程，$t=t_0+\tau$时刻平面$Z=$常量上的外加物分布是τ的幂函数乘以$\xi=\frac{Z}{\sqrt{K\tau}}$的函数（容易证明在$\xi=0$时具有有限值）。所以，在固定高度$H$的任意$0<Z<H$层中，所有$Z=$常量平面上的外加物分布的矩量在$\tau\to\infty$时有相同的渐近形式。各$Z=$常量平面之间的总外加物分布由函数

$$(Z,t_0+\tau)=Q\Gamma\tau\cdot\varphi_{10}\left(\frac{Z}{(K\tau)^{1/2}}\right)$$

描述。这个函数不依赖于$\overline{u}(Z)$和$K_{xx}(Z)$，它表明对于固定的τ，外加物团的厚度为$\sqrt{K\tau}$的量级。此外，如果$H\ll\sqrt{K\tau}$，那么在厚度H的层中外加物在垂向的分布几乎时均匀的，具有恒定的垂向密度$\theta_{00}=\frac{Q}{\sqrt{\pi K\tau}}$。根据Saffman，矩量$\theta_{10}(Z,t_0+\tau)$和$\theta_{20}(Z,t_0+\tau)$在$Z\ll\sqrt{K\tau}$的方程（在方程（10.100）和（10.101）中带入相应超越函数$\varphi_{10}(\xi)$、$\varphi_{20}(\xi)$、$\varphi_{20}^{(1)}(\xi)$和$\varphi_{20}^{(2)}(\xi)$的显式形式并取$\xi\to0$的极限）具有下面的形式：

$$\theta_{10}=\frac{Q\Gamma\tau}{4},\theta_{20}=\frac{7}{30\sqrt{\pi}}\frac{Q\Gamma^2}{K^2}(K\tau)^{5/2}+\begin{cases} \frac{2QK_1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\tau}{K}\right)^{1/2}, & \text{对于}K_{xx}=K_1, \\ \frac{QK_1^*\tau}{2}, & \text{对于}K_{xx}=K_1^*Z. \end{cases} \tag{10.103}$$

所以，厚度$H\ll\sqrt{K\tau}$的低层中外加物分布的重心的坐标X和这个分布在OX方向的方差$\sigma_{\vartheta_x}^2$具有如下形式：

$$\langle X\rangle=\frac{\theta_{10}}{\theta_{00}}=\frac{\Gamma}{4}\sqrt{\pi K\tau^3},\sigma_{\vartheta_x}^2=\frac{\theta_{20}}{\theta_{00}}-\left(\frac{\theta_{10}}{\theta_{00}}\right)^2$$

$$=\left(\frac{7}{30}-\frac{\pi}{16}\right)\Gamma^2K\tau^3+\begin{cases} 2K_1\tau, & \text{对于}K_{xx}=K_1, \\ \frac{K_1^*}{2}\sqrt{\pi K\tau^3}, & \text{对于}K_{xx}=K_1^*Z. \end{cases} \tag{10.104}$$

我们看到，低层外加物团的重心随平均流动以不断增大的速度$\frac{s\sqrt{\pi}}{8}\Gamma\sqrt{K\tau}$（正比于速度梯度$\Gamma$和垂向涡扩散系数的平方根）沿$OX$ 轴移动。这个分布的方差由两个分量组成。第一个正比于$\Gamma^2K\tau^3$，或仅和无界剪切流中外加物

团扩散的水平方差相差一个因子。显然，它时由垂向湍动混合和速度梯度相互作用产生的。然而，这个分量的数值系数$7/30-\pi/16\approx 0.036$只等于相应系数的五分之一，而对于无界流动区域的情形仅为六分之一，见前一小节。于是，壁面的存在极大地压制了水平分散。$\sigma^2_{\vartheta_x}$表达式的第二个分量描述了水平速度的湍动涨落（也就是系数为K_{xx}的湍动扩散）产生的普通水平分散。这第二个分量在$K_{xx}=K_1$时具有普通形式$2K_1\tau$，但当$K_{xx}=K_1^*Z$，它也依赖于$K_{zz}=K$，也就是它表达了水平和垂向扩散的相互作用，正比于$\tau^{3/2}$。然而，在任何情形，对于足够大的τ 值，它和量级为τ^3的第一个分量相比必须小得可以忽略。让我们注意到，在所有Z的平均速度沿OX轴方向的假设下，$\theta_{02}(Z,t)$ 的方程不同于方程（10.76"），没有$\overline{u}(Z)$的项。所以，方差$\sigma^2_{\vartheta_y}$仅由方程（10.103）的$\sigma^2_{\vartheta_x}$的第二项描述，显然是把K_{xx}换成K_{yy}，也就是说，对于大的τ值它比$\sigma^2_{\vartheta_x}$小得多。显然在点$\langle X\rangle,0$点取得的面浓度最大值$\overline{\vartheta}_m=\overline{\vartheta}_m(\tau)$在$\tau\to\infty$时会渐近正比于$\tau^{-5/2}$减小（如果$K_{yy}=$ 常量），正比于$\tau^{-11/4}$（如果$K_{yy}\sim Z$）。显然，所有这些事实不可能符合简化的方程（10.99）。此外，这个方程在此种意义下也是不正确的：平面$Z=$ 常量上的外加物分布对于足够大的$\tau=t-t_0$值不是高斯分布。实际上，使用类似矩量θ_{30}的方程（10.100）-（10.102）的表达式，可以证明对于足够大的τ，

$$\theta_{30}\approx\frac{21}{256}Q\Gamma^3K\tau^4.$$

于是，可以得到，外加物分布在OX方向是不对称的，对于固定的Z和$\tau\to\infty$，不趋向于0，而趋向于1。

这些结果针对的是$\overline{u}(Z)=\Gamma Z, K_{zz}=K=$ 常量的模型。然而，在其他情况下，如果风速依赖于高度，自然也会存在类似的情况。研究

$$\overline{u}(Z)=\frac{u_*}{\kappa}\ln\frac{Z}{Z_0}, K_{zz}=\alpha\kappa u_* Z$$

的情形是相当有趣的，也就是对数层中的扩散，以及$u(Z)$和$K_{zz}(Z)$由第4章对热分层边界层推导的方程定义的情形。然而，这种基于湍动扩散的半经验方程的研究在有严重的分析上的困难。所以，我们限于简单考虑中性分层边界层中的扩散[按照Chatwin (1968)]。

让我们写出$\overline{\vartheta}(X,Z,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{\vartheta}(X,Y,Z,t)dY$，其中$\overline{\vartheta}(X,Y,Z,t)$是时刻$t_0$在点$(0,0,H)$输出速率为$Q$的瞬时点源产生的平均浓度。$\overline{\vartheta}(X,Z,t)$是时刻$t_0$沿直线$X=0,Z=H$、单位长度输出速率为$Q$的瞬时线源产生的平均浓度。于是半经验扩散方程（其中纵向湍动扩散项和对流项相比小得可以忽略）

表明有下面的$\overline{\vartheta}(X,Z,t)$的方程：

$$\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial t}+\frac{u_*}{\kappa}\log\frac{Z}{Z_0}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial X}=\frac{\partial}{\partial Z}\left[\kappa' u_* Z\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}\right],\kappa'=\alpha\kappa. \tag{10.105}$$

显然，函数$\theta_{00}(Z,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{X,Z,t}\mathrm{d}X$一定有（10.93）的形式，其中$K_1=\kappa' u$。所以

$$\langle Z\rangle=\int\limits_0^\infty Z\theta_{00}(Z,t)dZ=\kappa' u_*\left(\tau+\frac{H}{\kappa' u_*}\right),\tau=t-t_0. \tag{10.104$'$}$$

方程（10.104’）最简单的推导基于方程$\frac{\mathrm{d}\langle Z\rangle}{\mathrm{d}t}=\kappa' u_*$，这是从方程（10.104）基于$\tau=0$时$\langle Z\rangle=H$的初始条件得到的。当$H=0$，$\theta_{00}(Z,t)$的公式得到极大简化[见方程（10.93’）]，（10.104’）可以非常简单地立即得到。

此后，为了简单，H通常取为零，Q取为1。于是容易从方程（10.93’）得到

$$\sigma_{\vartheta_z}^2=\langle Z-\langle Z\rangle\rangle^2=\int\limits_0^\infty(Z-\kappa' u_*\tau)^2\theta_{00}(Z,t)dZ=\kappa'^2u_*^2\tau^2.$$

来自边界层中一个瞬时源的外加物团的重心以恒定速度$\kappa' u_*$上升，定义为垂向标准差两倍的外加物团厚度等于其重心距离地面距离的两倍。

对外加物团水平分散的研究更困难。然而，如果我们考虑物理量

$$\langle X\rangle=\int\limits_{-\infty}^\infty\int\limits_0^\infty X\overline{\vartheta}(X,Z,t)\mathrm{d}X\mathrm{d}Z,$$

那么根据方程（10.93’）和（10.104），

$$\frac{\mathrm{d}\langle X\rangle}{\mathrm{d}t}=\frac{u_*}{\kappa}\ln\frac{\kappa' u_* t}{Z_0e^{-\gamma}},\text{即}\langle X\rangle=\frac{u_*\tau}{\kappa}\left[\ln\frac{\kappa' u_*\tau}{Z_0e^{\gamma}}-1\right] \tag{10.106}$$

其中

$$\gamma=-\int\limits_0^\infty e^{-x}\ln x\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}[1+1/2+...+1/n-\ln n]\approx 0.58$$

是所谓的欧拉常数。对应$H\neq 0$，计算更复杂，但Chatwin对此情形也得到

了精确的渐近结果，当$t \to \infty$：

$$\langle X \rangle \approx \frac{u_* \tau}{\kappa}\left[\ln \frac{\kappa' u_*}{Z_0 e^{\gamma}}\left(\tau + \frac{H}{\kappa' u_*}\right) - 1\right]. \qquad (10.105')$$

物理量

$$\sigma_{\vartheta_x}^2 = \langle X \langle X \rangle \rangle^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \langle X - \langle X \rangle \rangle^2 \overline{\vartheta}(X, Z, t)\mathrm{d}X\mathrm{d}Z$$

的计算要复杂得多，需要枯燥的代数。然而，Chatwin对这个问题的最终结果也非常简单：

$$\sigma_{\vartheta_x}^2 = \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)\left(\frac{u_* \tau}{\kappa}\right)^2, \text{即} \sigma_{\vartheta_x} \approx 0.8\frac{u_* \tau}{\kappa} \approx 2u_* \tau. \qquad (10.105'')$$

上面提到的所有结果都和9.4节中用相似性论证和量纲分析建立的无分层边界层中拉格朗日特征量的预言完全符合。我们也看到，近似的半经验扩散理论可以估计（9.60）、（9.61）等一般方程中的无量纲普适常数。以半经验扩散方程成立的同样精度，我们必须取$b = \kappa' = \alpha\kappa \approx 0.45$、$c = be^{-\gamma} \approx 0.56b$和$D_{33}(\tau) = \kappa'^2 u_*^2 \tau^2$，也就是$d_{33} = \kappa'^2 \approx 0.2$，

$$D_{11}(\tau) = \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) u_*^2 \tau^2 / \kappa^2,$$

也就是

$$d_{11} = \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)\kappa^{-2} \approx 4.$$

这些估计值的精确程度将在10.6节末讨论。

让我们也注意到，将边界层中扩散的这些结果和方程组（10.103）进行直接比较是不合理的，因为这些方程仅处理底层中外加物分布的特征量。然而，方程（10.104）也可以用于计算给定高度Z处外加物分布的特征量对Z的依赖：

$$\begin{aligned} \langle X(Z,t) \rangle &= \int_0^{\infty} X\overline{\vartheta}\mathrm{d}X / \int_0^{\infty} \overline{\vartheta}\mathrm{d}X, \\ \alpha_{\vartheta_x}^2(Z,t) &= \int_{\infty}^{\infty} \langle X - \langle X(Z,t) \rangle \rangle^2 \overline{\vartheta}\mathrm{d}X / \int_0^{\infty} \overline{\vartheta}\mathrm{d}X. \end{aligned}$$

很明显，当$t \to \infty$，任意高度Z都到了底层，所以任意Z处对于大的t的渐近

结果不依赖于Z。根据Chatwin的计算，当$t=\infty$，对于任意Z

$$\langle X(Z,t)\rangle = \langle X\rangle - \frac{u_*\tau}{\kappa}, \sigma^2_{\vartheta_x}(Z,t) \approx 0.6\frac{u_*\tau}{\kappa}, \qquad (10.105''')$$

其中$\langle X\rangle$由方程（10.105）给出。这些结果可以和方程（10.103）比较。方程（10.105”’）明确表明，在任何给定层面的外加物的重心落后于整个外加物团的重心。这个事实完全在意料之中，因为对于任意Z，存在一个时刻，其后几乎所有外加物都位于某个高于Z的高度，于是它们的水平速度超过高度Z处的风速。

热分层边界层中扩散的类似类型的一般结果目前还未知。然而，在考虑非常不稳定条件下的垂向扩散时，我们可以使用（7.37）形式的涡扩散系数。所以相应$\theta_{00}(Z,t)$的方程的严格解可以由方程（10.94）和（10.94’）得到。容易证明

$$\langle Z\rangle = \frac{32}{27\sqrt{\pi}}\left(\frac{3}{C_1}\right)^{3/2}\left(\frac{q}{c_p\rho}\frac{q}{T_0}\right)^{1/2}\tau^{3/2}$$

是对应于（7.37）形式的扩散系数K_{zz}的解（10.94’）描述的外加物团的平均高度。所以半经验扩散理论表明Yaglom的方程（9.73）中的系数a的值为

$$a = \frac{32}{3\sqrt{3\pi}C_1^{3/2}} \approx 3.5C_1^{-3/2}.$$

实际上，这个值明显大于真实值。所以我们将简单讨论Saffman (1962b)的满足方程

$$\begin{aligned}\overline{u}(Z) = u_1 Z^m, K_{zz}(Z) = KZ^n,\\ K_{xx}(Z) = K_1 Z^k, K_{yy}(Z) = K_2 Z^l,\end{aligned} \qquad (10.107)$$

的边界层流动的结果，其中u_1, K, K_1, K_2是常数并且$n<2$。这里，（10.76）、（10.76’）、（10.76”）等方程解的一般形式对于时刻$t=t_0$处于坐标原点的输出速率为Q的瞬时点源，可以再次基于量纲分析得到。特别地，在$\theta_{00}(Z,t)$的方程（10.76）中，我们现在有独一无二的有量纲参数K，所以由K, Z和$\tau=t-t_0$，可以构建唯一一个无量纲组合$\xi = Z\,(K\tau)^{-\frac{1}{2-n}}$。我们得到

$$\theta_{00}(Z,t) = Q(K\tau)^{-\frac{1}{2-n}}\varphi(Z(K\tau)^{-1/(2-n)}), \qquad (10.108)$$

其中$\varphi_{00}(\xi)$是无量纲普适函数，其显式形式由方程（10.94’）给出。根据方程（10.76’）和（10.106），$\Theta_{00}(Z,t)$一定正比于Qu_1，并且也仅依赖于K, Z和τ，于是

$$\theta_{10}(Z,t) = Qu_1\tau(K\tau)^{\frac{m-1}{2-n}}\varphi_{10}(Z(K\tau)^{-1/(2-n)}),$$

其中$\varphi_{10}(\xi)$还是一个普适函数。最后，基于方程（10.76”）和（10.106），θ_{20}可以用一个正比于Qu_1^2的分量和一个正比于QK_1的分量之和表示，而θ_{12}正比于QK_2。所以

$$\begin{aligned}\theta_{20} &= Qu_1^2\tau^2(K\tau)^{\frac{2m-1}{2-n}}\varphi_{20}^{(1)}(Z(K\tau)^{-1/(2-n)}) + QK_1\tau(K\tau)^{\frac{k-1}{2-n}}\varphi_{20}^{(2)}(Z(K\tau)^{-1/(2-n)}),\\ \theta_{02}(Z,t) &= QK_2\tau(K\tau)^{\frac{l-1}{2-n}}\varphi_{02}(Z(K\tau)^{-1/(2-n)}).\end{aligned}$$

因为在$Z \to \infty$时$\overline{\theta}(Z,t) \to 0$，所以所有函数$\varphi_{00}(\xi), \varphi_{10}(\xi), \varphi_{20}^{(1)}(\xi)$等在$\xi \to 0$时一定减小。所以基于方程（10.107）得到，时刻$t_0+\tau$外加物团的厚度一定具有$(K\tau)^{\frac{1}{2-n}}$的量级。在厚度$H \ll (K\tau)^{\frac{1}{2-n}}$的层中，外加物分布实际上不依赖于高度，并且具有密度

$$\theta_{00} = \frac{\alpha_{00}Q}{(K\tau)^{1/(2-n)}},$$

其中，基于方程（10.94'）

$$\alpha_{00} = \varphi_{00}(0), \text{也就是} \alpha_{00} = (2-n)^{-\frac{n}{2-n}} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2-n}\right)\right]^{-1}.$$

此外，我们假设了，速度$\overline{u}(Z)$在所有高度都平行于OX，如果必要，这个假设容易放松，通过引入另一个分量$\overline{v}(Z) = v_1 Z^{m_1}$。这表明，在厚度$H \ll (K\tau)^{\frac{1}{2-n}}$的层中的外加物分布的重心坐标为

$$\langle X\rangle = bu_1\tau(K\tau)^{\frac{m}{2-n}}, \langle Y\rangle = 0, b = \frac{\varphi_{10}(0)}{\varphi_{00}(0)}. \tag{10.109}$$

以同样的假设，平面$Z=$ 常量（其中$Z \ll (K\tau)^{\frac{1}{2-n}}$）上的外加物分布的方程具有这种形式

$$\sigma_{\vartheta_x}^2 = b_1u_1^2\tau^2(K\tau)^{\frac{2m}{2-n}} + b_1K_1\tau(K\tau)^{\frac{k}{2-n}}, \sigma_{\vartheta_y}^2 = b_3K_2\tau(K\tau)^{\frac{l}{2-n}}, \tag{10.108$'$}$$

其中b_1, b_2和b_3是新的常数，联合矩量

$$\sigma_{xy} = \langle(X - \langle X\rangle)Y\rangle = \frac{\theta_{11}}{\theta_{00}} - \frac{\theta_{01}\theta_{10}}{\theta_{00}^2}$$

等于零，因为$\theta_{01} = \theta_{11} = 0$。方程（10.108'）第一个方程的第一项描述了风剪切和垂向湍动混合的相互作用导致的水平分散，这个方程第二项描述了普通的水平湍动扩散。显然，第一个效应仅当$2m+2-n > k$时对于大的τ是主导的。在大气表面层中，显然可以认为总是满足后一种条件。（因为对于稳定或中性分层，$n \le 1$，可以假设$n+k \le 2$，而对于强不稳定性，n 接近4/3，并且如果这里可以使用的话，系数$K_{xx}(Z)$随高度的增大难以察觉。）所以，可以得出结论，在相对大的时间区间中，风剪切的存在在大气水平分散中总是发挥基本的作用。因为可以自然地假设$K_{yy}(Z)$近似正比于$K_{xx}(Z)$，忽略风随高度的反转，对于大的τ，平均风向的弥散会远超过垂直方向的弥散。此外，这里的标准差$\sigma_{\vartheta_x}^2$相对于外加物团的平均厚度（量级为$(K\tau)^{\frac{1}{2-n}}$）非常大。于是，对于大的τ，外加物团很大程度沿平均风的方向延展。

Högström (1964) , Smith (1965) , and Tyldesley, Wallington (1965)也讨论了风剪切对大气中水平外加物分散的影响。这些研究者在比较他们的结果和实验数据时使用了数值方法和拉格朗日分析。然而，这里我们不作详细讨论。

*Sutton*的大气分散方程

上面给出的对大气表面层中水平分散的估计创造了新的可能性，来对源自瞬时源的外加物传播过程进行数学分析。然而，显然，这种分析不可避免会非常复杂。所以，各种粗糙但简单的近似方法在实际描述大气扩散中找到了应用。特别地，在英国和美国，Sutton (1932, 1949, 1953)提出的近似方程经常被用于计算大气中的外加物扩散。根据这些方程，假设来自瞬时点源的外加物分布在以恒定速度$\overline{u}$随平均风移动的坐标系中为（10.12）形式的高斯分布，方差$D_{ii}(\tau)$的增大比τ的一次方快。（这完全符合方差（10.108'）以及这个事实，对应于方差$D_{ii}(\tau) = 2K_{ii}\tau$的表面浓度下降太慢了。）为了确定方差$D_{ii}(\tau)$的形式，Sutton提出，对于大气表面层中的扩散，对于$D_{ii}(\tau)$可以近似使用Taylor的经典公

式（9.31），仅在湍流均匀的假设下能严格得到，假设在此情形，拉格朗日速度关联函数$R_{ii}^{(L)}(\tau)$具有这种形式

$$R_{ii}^{(L)}(\tau) = \left(1 + \frac{\tau}{\tau_i}\right)^{-n}, i = 1, 2, 3. \tag{10.110}$$

其中τ_i是恒定的时标，根据Sutton，假设n值为$0.1 - 0.3$的量级。因为假设了$n < 1$，方程（9.32）的拉格朗日积分时标T 无穷大。所以Sutton的理论对于时间τ没有得到方程的渐近线性的增长。所以，严格来说，这个理论不是普通的湍动扩散的半经验理论的一个版本，如上面提到的，它仅适用于当$\tau \gg T_i$。然而，类似于普通的半经验理论，在Sutton的理论中也仅研究了足够大的τ，也就是，不是和这里无穷大的T_i相比，而是和τ_i相比。根据方程（10.109）和（9.31），当$\tau \gg \tau_i$，方差$D_{ii}(\tau)$渐近正比于τ^{2-n}。Sutton相应的渐近公式写为

$$D_{ii}(\tau) = \frac{C_i^2}{2}(\overline{u}\tau)^{2-n}, \tag{10.111}$$

其中$\overline{u}$是所讨论的大气表面层中的平均风速，C_i是常系数。当$\overline{u_i'^2} \sim \overline{u^2}$，这表面$\tau_i \sim (\overline{u})^{-1}$。在来自高架源的外加物扩散的情形，Sutton基于实验建议，可以认为系数C_i依赖于源的高度H，随H的增大而减小。让我们也注意到，当$D_{ii}(\tau)$由方程（10.110）定义，函数（10.12）是扩散系数

$$K_{ii} = \frac{2-n}{4} C_i^2 (\overline{u})^{2-n} \tau^{1-n}$$

（不依赖于高度Z，但依赖于扩散时间τ）的（10.55）形式扩散方程的一个解。然而，在此情形，方程（10.55）不能从半经验扩散理论的统计假设推出，这些假设要求[见方程（10.53）]扩散系数仅由速度场$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, t)$ 确定，而不是外加物何时在何处被进入这个速度场。（如G. I. Taylor (1959) 注意到的，半经验理论中涡扩散系数不能依赖于τ的事实源自叠加原理，对应于扩散方程为线性的假设：如果K_{ii}依赖于τ，在有一些不同时发射的外加物源时固定点$(\boldsymbol{X}, t)$的K_{ii}是多值的。）

知道了源自瞬时点源的浓度分布，容易计算稳态点源和线源的浓度。这可以完全相同地像上面Robert方程（对应于不变的扩散系数）那样进行。让我们考虑地球表面在外加物反射边界条件下，点$(0, 0, H)$处输出速率为Q的稳态点源的扩散。在此情形，Sutton的理论给出下面和方程（10.90）有关的公式：

$$\overline{\vartheta}(X, Y, Z) = \frac{Q}{\pi C_y C_z \overline{u} X^{2-n}} e^{-\frac{Y^2}{C_y^2 X^{2-n}}} \left[e^{-\frac{(Z-H)^2}{C_z^2 X^{2-n}}} + e^{-\frac{(Z+H)^2}{C_z^2 X^{2-n}}} \right]. \tag{10.112}$$

对于直线$X = 0, Z = H$上的线源，只需要去掉右边依赖于Y的因子，并把Q替换为

$$\sqrt{\pi} Q C_y X^{1-\frac{n}{2}}.$$

根据方程（10.111），沿直线$X = $ 常量$, Z = $ 常量的外加物分布是方差为

$$\frac{C_y^2}{2} X^{1-\frac{n}{2}}$$

的高斯分布，沿平均风方向的面浓度分布具有这种形式

$$\overline{\vartheta}(X, 0, 0) = \frac{2Q}{\pi C_y C_z \overline{u} X^{2-n}} e^{-\frac{H^2}{C_z^2 X^{2-n}}}, \tag{10.113}$$

也就是，它渐近正比于X^{n-2}减小，但在线源的情形，正比于$X^{\frac{n}{2}-1}$。方程（10.112）的最

大面浓度等于$\overline{\vartheta}_{\max} = \frac{2Q}{\pi e\overline{u}H^2}\frac{C_z}{C_y}$。也就是，它反比于风速和源高度的平方，是在距离源

$$X = \left(\frac{H}{C_z}\right)^{\frac{2}{2-n}}$$

处取得的，和Robert理论的情形不同，它不依赖于风速$\overline{u}$。

Sutton方程和大气扩散实验的数据的比较可以在，例如Barad and Haugen (1959)、Drimmel, Reuter (1960)、Haugen, Barad, Antanaitis (1961)、Brummage (1968)、Csanady, Hilst, Bowne (1968)和很多其他文献中找到。Munn (1963)进行了方程（10.109）和拉格朗日速度关联函数数据的比较。所引用的这些工作中所述材料表明，Sutton的方程对实际的拉格朗日速度关联函数的描述非常不准确。仅当允许的n值范围被大大扩展，以及当n和参数C_i对于不同方向的扩散可以假设为不同的值（也就是，在方程（10.110）中参数n应该替换为n_i），他们才或多或少令人满意地对应于已有的扩散数据。然而，如果这样做，那么Sutton 理论中的可调参数的数量就变得非常多，这些方程和野外实验很好的一致性得到了充分的解释。此外，参数C_i和n_i对气象条件的依赖非常复杂，研究得不很充分。所以，自然会寻求其他方法来近似描述大气扩散数据，这将足够简单，但理论上比Sutton的方程更可靠。

半经验扩散方程的稳态解

在横向弥散$D_{yy}(\tau)$沿穿过风的方向的特殊情形，Byutner, Laykhtman (1963)提出了新的近似方程。然而，这些方程非常复杂，需要经验验证。在Pasquill (1962b)的专著中也可以找到计算大气扩散的很多实用方程。这里我们仅讨论少数这些从湍动扩散方程（10.55）推导出来的方程。上面，我们仅研究了这个方程对应于瞬时外加物源情形的解。特别是对于这个问题，迄今，还没有得到具有依赖于高度的风速的扩散方程的严格解。然而，在实践中，来自持续稳态外加物源的浓度分布通常最有趣，用数学分析得到这个分布要简单得多。

让我们从稳态闯过风的方向的水平线线源（单位长度在单位时间产生Q单位外加物质量）产生的浓度$\overline{\vartheta}(X,Z)$开始，显然，也也等于

$$\overline{\vartheta}(X,Z) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\vartheta}(X,Y,Z)dY,$$

其中$\overline{\vartheta}(X,Y,Z)$是产生速率为$Q$的稳态点源产生的浓度。在此情形，在方程（10.55）中，含有$\frac{\partial}{\partial t}$和$\frac{\partial}{\partial Y}$显然可以忽略。此外，如果和对流项$\overline{u}(Z)\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial X}$相比，我们也忽略描述了纵向（沿流动的）扩散的$-K_{xx}\frac{\partial^2\overline{\vartheta}}{\partial X^2} = \frac{\partial}{\partial X}\overline{u'\vartheta'}$ 项（对于稳态源，忽略这一项几乎不会导致可察觉的误差），那么方程（10.55）变成所谓的二维扩散方程：

$$\overline{u}(Z)\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial Z}\left[K_{zz}(Z)\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}\right]. \tag{10.114}$$

在外加物被地球表面反射并且源在高度H的情形，所需的解必须满足下面的条件：

$$\begin{aligned}\overline{\vartheta} &\to 0\text{对于}X\to\infty\text{或者}Z\to\infty; K_{zz}\left.\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}\right|_{Z=0} = 0;\\ \overline{\vartheta} &= \text{对于}X = 0 Z \neq H; \int_0^{\infty}\overline{u}\overline{\vartheta}dZ = Q\text{对于}X \geq 0\end{aligned}$$

(10.115)

最后两个条件也可以写为$\overline{u}(H)\overline{\vartheta}(0,Z) = Q\delta(Z-H)$。所以，对于我们得到一个具有抛物型偏微分方程（10.113）初始条件的普通边界值问题，其中变量X扮演了时间的角色。在$\overline{u}(Z) = \overline{u} =$ 常量，$K_{zz}(Z) = K_{zz} =$ 常量的特殊情形，方程（10.113）-（10.114）的解显然由Robert的方程（10.91）给出，这个方程如我们所知，和数据不符。Bosanquet, Pearson (1936)研究了风速u恒定，扩散系数$K_{zz}(Z) = K_1 Z$沿垂向线性增大的情形。对于$H=0$的面源的特殊情形，他们也得到了非常简单的公式

$$\overline{\vartheta}(X,Z) = \frac{Q}{K_1 X} e^{-\frac{\overline{u}Z}{K_1 X}}. \tag{10.116}$$

这个公式已经和接近中性温度分层的观测数据符合得相对较好。此外，一些研究者也研究了更一般的风速和扩散系数对高度的依赖为任意幂律的情形：

$$K_{zz}(Z) = K_1 Z^n, \overline{u}(Z) = u_1 Z^m. \tag{10.117}$$

在$n = 1-m$，或者所谓Schmidt共轭幂律的情形，Sutton (1934)在很久以前用这些系数求解了方程（10.113），但边界条件不同于方程（10.114），而是和大气表明层中蒸发的研究有关。Laykhtman (1947b)也研究了一个类似的问题。特别地，O. F. T. Roberts在一篇未发表的文章[见Calder (1949)]中、Frost (1946)[在$n = 1-m$的假设下]和Laykhtman (1961, 1963)使用系数（10.116），得到了方程（10.113）在条件（10.114）下对应于面源的解，它具有这种形式：

$$\overline{\vartheta}(X,Z) = \frac{(m-n+2)Q}{u_1 \Gamma\left(\frac{m+1}{m-n+2}\right)} \left[\frac{u_1}{(m-n+2)^2 K_1 X}\right]^{\frac{m+1}{m-n+2}} \exp\left[-\frac{u_1 Z^{m-n+2}}{(m-n+2)^2 K_1 X}\right] \tag{10.118}$$

（在$m-n+2>0$的假设下）。Laykhtman (1961, 1963)、Rounds (1955)、Monin (1956b)和Smith (1957)中可以找到这个方程对应于任意高度H的高架源的更一般解，在此情形

$$\overline{\vartheta}(X,Z) = \frac{Q(HZ)^{\frac{1-n}{2}}}{(m-n+2)K_1 X} \exp\left[-\frac{u_1(Z^{m-n+2}+H^{m-n+2})}{(m-n+2)^2 K_1 X}\right] I_p\left(\frac{2u_1 (HZ)^{(m-n+2)/2}}{(m-n+2)^2 K_1 X}\right), \tag{10.119}$$

其中I_p是$p = -\frac{1-n}{m-n+2}$阶虚宗量贝塞尔函数。Laykhtman (1961, 1963)发表了对应于外加物被部分吸收或完全吸收的一般情形的边界条件

$$K_{zz}\left.\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}\right|_{Z=0} = \beta\overline{\vartheta}|_{Z=0}$$

下，方程（10.113）复杂得多的解。他以及Tseytin (1962)讨论了风速和垂向扩散系数仅满足满足幂率方程（10.116）到某个固定高度$Z = H_1$，在更高的高度为常量的情形。特别地，Yordanov (1968a, b, c)研究了方程（10.113）中的系数$\overline{u}(Z)$和$K_{zz}(Z)$的更一般和更复杂的两层幂律模型。

在对应于中性分层边界层的$\overline{u}(Z) = u_1 \ln\frac{Z}{Z_0}, K_{zz}(Z) = K_1 Z$的情形，（10.113）-（10.114）还没有成功地解析求解，但显然它可以数值求解。Berlyand, Genikhovich, et al. (1963, 1964)对一些H值得到了数值解。然而，他们假设扩散系数线性增长仅保持到某个“表面层的虚拟高度”h，而超过这个高度，$K_{zz}(Z)$保持恒定，或者随高度以任意方式变化，故而函数$K_{zz}(Z)$的图有多个拐折。稳态点源和线源扩散问题数值解的其他例子在Klug, Wippermann (1967)和Berlyand, Onikul (1968)中有描述。Tyldesley也对于对数风速分布和线性扩散系数分布得到了二维扩散方程的数值解。他发现解和中性分层条件下实验

的数据符合得很好[见Pasquill (1966)的讨论]。最后，在Yamamoto, Shimanuki (1960)中，在$\tau = \rho_0 u_*^2 =$ 常量，以及根据雷诺类比，系数K_{zz}在每个地方都等于湍动扩散系数（也就是由方程$K_{zz}\frac{\partial \overline{u}}{\partial Z} = u_*^2$定义，对于对数风速分布，得到$K_{zz} = \kappa u_* Z$）的假设下得到了一个数值解。然而，这里用一般的相似性方程（7.24）代替$\overline{u}(Z)$的对数公式给出含有普适函数$\varphi(\zeta) = \zeta f'(\zeta)$（满足四次方程（7.61））的风速分布。方程（7.61）的参数σ借助简单变换到新的长度标度$L_* = L/\sigma$而消去。于是，在粗糙高度$Z = Z_0$的线源，对于地球表面反射边界条件的外加物扩散问题简化为求解依赖于参数$\zeta_0 = \frac{Z_0}{L_*}$（其出现和$\overline{u}(Z)$对$Z_0$的依赖有关）的一个两变量函数的方程。显然正的$\zeta_0$值对应于稳定分层，负的值对应于不稳定分层。Yamamoto和Shimanuki得到了一系列ζ_0值对应的方程的数值解，并以图的形式给出。图82中的一幅复制图展示了，在$Z = Z_0$时，面浓度随X增大而减小的规律中的指数p对稳定性参数ζ_0以及距离源的无量纲距离X/Z_0的依赖关系。这里，参数p由方程

$$\frac{\overline{\vartheta}(X_1, Z_0)}{\overline{\vartheta}(X_1, Z_0)} = \left(\frac{X_2}{X_1}\right)^{-p}$$

确定，其中X_2和X_1在固定坐标X附近取值。我们可以看到，对于中性分层，或者接近0的ζ_0值，直到非常大的X/Z_0的参数p都近似不变，接近0.9。这和方程（10.91）后面讨论的经验事实完全符合。然而，非中性分层通常基本上取决于距离X。

Tyldesley在数值求解二维扩散方程时[见Pasquill (1966)的讨论]使用了一些形式的普适风速分布，即稳定条件下各种β值的对数加线性分布，不稳定条件下各种σ值的满足方程（7.61）的分布以及Swinbank的指数风速分布。所得的这些结果和大气扩散的野外数据进行了比较，显式出未得到解释的差异。

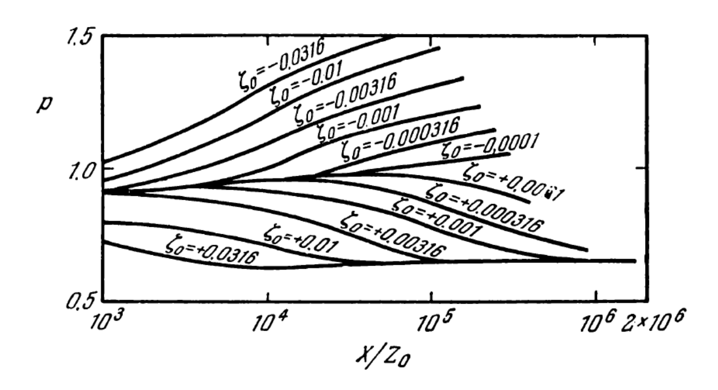


图 80 外加物面浓度减小规律中的指数p作为距离源的距离以及稳定性参数的函数。

如果，在使用幂律方程（10.116）时，我们假设$K_{zz}(Z)$和湍动黏滞系数最多相差一个常数因子α，也就是$K_{zz}\frac{\partial \overline{u}}{\partial Z} =$ 常量，那么必须取$n = 1 - m$，或者使用Schmidt的共轭幂律。在中性分层的特殊情形，对数风速分布在很大的高度范围内都可以相对较好近似为一个指数$m = 1/7$的幂函数[见上面5.6节]。所以，这里最好假设$m = 1/7, n = 6/7$。实际上，对于这些m和n和相应的系数u_1和K_1，方程（10.117）-（10.118）和已有的中性分层下的扩散数据符合得非常好[见，例如，Calder (1949)]。特别地，从方程（10.117）和（10.118）很明显，对于这样的m和n，面浓度渐近正比于$X^{-8/9}$减小，对于非常小的ζ_0这和实验以及图82的数据符合得很好。对于非中性分层，很多研究者也尝试应用方程（10.117）-（10.118），其中指数m和n取为依赖于气象条件[见，例如，Deacon (1949)、Vaughan

(1961)和Gee (1966)]，但这里所得结果强烈依赖于选择m和n 值的方法，所以不太有说服力。

现在讨论来自点$(0,0,H)$处产生速率Q的稳态点源的扩散，我们再次忽略OX方向的扩散。和平均流董产生的外加物对流相比，平均浓度的半经验方程，所谓的三维扩散方程，具有这种形式

$$\overline{u}(Z)\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial X}=\frac{\partial}{\partial Y}\left(K_{yy}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Y}\right)+\frac{\partial}{\partial Z}\left(K_{zz}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}\right). \tag{10.120}$$

我们所感兴趣的方程（10.119）的解必须满足条件

$$\overline{\vartheta}\to 0\text{对于}X^2+Y^2+Z^2\to\infty, K_{zz}\left.\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}\right|_{Z=0}=0,$$

$$\overline{\vartheta}(0,Y,Z)=\frac{Q}{\overline{u}(H)}\delta(Y)\delta(Z-H) \tag{10.121}$$

[参见方程（10.114）]。从方程（10.13）转变为方程（10.119）中自变量从两个增加到三个，这使得问题大大复杂化。Davies (1950)尝试在$\overline{u}(Z)\sim Z^m, K_{zz}(Z)\sim Z^{1-m}$和$K_{yy}(Z)\sim Z^\alpha$的假设下，对于面源的情形得到方程（10.119）-（10.120）的严格解。然而，他仅在$\alpha=m$的特殊情形成功了，也就是，当$K_{yy}(Z)=c\overline{u}(Z)$，其中$c=$ 常量。在后一种情形，容易证明

$$\overline{\vartheta}(X,Y,Z)=\frac{1}{2\sqrt{\pi cX}}\exp\left(-\frac{Y^2}{4cX}\right)\cdot\overline{\vartheta}(X,Z),$$

其中$\overline{\vartheta}(X,Z)$是方程（10.113）-（10.114）的解。所以，当$\alpha=m$，不难考虑沿OY轴的扩散。所以，在一整系列的湍动扩散的工作中都作了$K_{yy}\sim\overline{u}$的假设。在这些假设下一个高架源相应问题的解更复杂，但也可以得到显式形式[见Walters (1965)]。不幸的是，在很多情形所得的浓度$\overline{\vartheta}(X,Y,Z)$的方程显然和大气表面层中来自稳态点源的外加物传播的数据矛盾。在这方面，Smith (1957)重新研究了一般指数α的情形，但没法得到函数$\overline{\vartheta}(X,Y,Z)$的严格描述，而是得到了沿直线$X=$ 常量$,Z=$ 常量的外加物分布的头两个不为零的矩量：

$$\theta_0(X,Z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{\vartheta}(X,Y,Z)dY,\theta_2(X,Z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}Y^2\overline{\vartheta}(X,Y,Z)dY. \tag{10.122}$$

函数$\theta_0(X,Z)$显然满足同样的方程（10.113）[在条件（10.114）下]，这描述了对于一个稳态线源的浓度分布，也就是，它可以从$n=1-m$的方程（10.118）确定。对于函数$\theta_2(X,Z)$，可以从方程（10.119）得到一个也含有系数$K_{yy}(Z)$的二阶微分方程。这个方程可以对于任意H和某些特定的m和α值显式求解。然而，对于任意m和α，仅对面源（也就是当$H=0$）得到了用复杂的超越函数表示的显式解。然而，可以自然地认为，对于不太大的H和大的X，$H>0$的解和面源的解相差不大。此外，如果仅对外加物的面分布感兴趣，也就是对$\overline{\vartheta}(X,Y,0)$值感兴趣，那么对于高架源的解可以借助Smith证明的一个优雅的对偶定理从面源的一般解推导出来。这个定理表述了半经验方程（10.55）描述的扩散过程的统计可逆性。根据这个定理，*对于面$Z=0$上反射条件下的湍动扩散，对应于点$X=Y=0,Z=H$处高架外加物源的函数$\overline{\vartheta}(X,Y,Z)$的值$\overline{\vartheta}(X,Y,0)$和对应于点$X=Y=Z=0$处面源的函数$\overline{\vartheta}(X,Y,Z)$的值$\overline{\vartheta}(X,Y,H)$相同*（故而对于$\theta_2(X,Z)$，可以对于任意$H$写出显式表达式）。知道了$\theta_0(X,Z)$和$\theta_2(X,Z)$，可以近似确定函数$\overline{\vartheta}(X,Y,Z)$，通过假设，根据横向扩散的直观物理假设和现有数据，沿直线$X=$ 常量$,Z=$ 常量的外加物分布对于所

有X和Y，和高斯分布相差很小。于是，对于任意X, Y和Z

$$\overline{\vartheta}(X,Y,Z) \approx \frac{\exp[-Y^2/2\overline{Y^2(X,Z)}]}{[2\pi\overline{Y^2(X,Z)}]^{1/2}}\theta_0(X,Z), \tag{10.123}$$

其中

$$\overline{Y^2(X,Z)} = \frac{\theta_2(X,Z)}{\theta_0(X,Z)}.$$

特别地，Smith用这个公式发现了外加物团的轴上（也就是当$Y=0$）对于$m=1/7$和$n=\alpha=6/7$的面浓度沿OX方向减小速率。在此情形，渐近地，$\overline{\vartheta} \sim X^{-5/3}$，这和接近中性分层大气中稳态外加物点源的数据多少是符合的。

在任意分层的一般情形，Yamamoto, Shimanuki (1964)尝试通过比较点源的扩散数据和方程（10.119）-（10.120）的数值解（对于含有一个可调参数的$K_{yy}(Z)$值）来计算穿过风的（横向的）扩散系数。这里，和他们之前的工作一样，假设风的性质由方程（7.24）给出，其中$\varphi(\zeta)=\zeta f'(\zeta)$满足方程（7.61），并且$K_{zz}=u_*\kappa Z/\varphi(\zeta)$。作为一级近似，假设对于任意分层，系数$K_{yy}(Z)$线性依赖于高度$Z$，也就是由这种类型的公式给出：

$$K_{yy}(Z) = u_*\kappa Z\cdot\alpha(\zeta_0), \zeta_0 = \frac{Z_0}{L_*} = \frac{\sigma Z_0}{L},$$

其中$\alpha(\zeta_0)$是ζ_0或者分层情况的未知函数。这种K_{yy}选择的主要优点是容易借助变换到依赖于α的无量纲坐标

$$X_1 = X/Z_0, Y_1 = Y/\alpha^{1/2}Z_0, Z_1 = Z/Z_0$$

消去参数α。用这个变换，来自稳态点源的扩散问题转化为求解依赖于参数ζ_0的三变量函数$\overline{\vartheta}(X_1,Y_1,Z_1)$ 的普适方程。已经对一系列ζ_0值数值求解了这个方程，对$X_1=32000, Z_1=240$ 计算的沿OY_1轴的外加物分布和相应的野外扩散实验数据进行了比较。这个比较的结果使得可以近似确定未知的$\alpha(\zeta_0)$值。Z_0和L_*值从同时的风和温度分布测量数据估计。以相对较小的弥散，所得的$\alpha(\zeta_0)$值位于一条随ζ_0增大而单调减小的光滑曲线上。根据这条曲线，当$\zeta_0=0$，也就是中性分层，$\alpha\approx 13$，当$\zeta_0=-0.014$，$\alpha\approx 100$，$\zeta_0=0.01$，$\alpha\approx 3$。此外，为了建议关于$K_{yy}(Z)$假设的正确性，所得的$\alpha(\zeta_0)$值也用于对于一些其他X和Z值，沿OY轴方向的浓度分布的理论计算，结果再次和观测进行比较。尽管理论和实验一般符合的较好，但实验点的弥散太大，不可能得到可靠的结论。对于中性分层下，面浓度沿外加物团轴的减小，基于$K_{yy}=13\kappa uZ$的计算得到表达式$\overline{\vartheta}\sim X^{-1.78}$，和已有数据符合得很好。

数据也表明，沿OY方向的水平扩散随着外加物团的水平延展的增大而变得更快，所以，系数K_{yy}随扩散时间$\tau=t-t_0$或坐标X的增大而增大。这可以用非常重要的（随外加物团尺度增大）外加物团*相对扩散加速*的效应或外加物团的单个粒子之间距离变化加速的效应来解释。这个效应和这个事实有关，当外加物团的尺寸增大，越来越多大尺度速度扰动开始参与到分散过程中。我们将在本书第2卷第8章中讨论这一点。然而，如上面提到的，在湍动扩散的半经验理论框架内，不可能假设扩散系数依赖于时间τ。然而，Davies (1954a)尝试计算这个效应，形式上假设在方程（10.119）中，系数u和K_{zz}仅依赖于Z，具体来说，$\overline{u}\sim Z^m, K_{zz}\sim Z^{1-m}$，而$K_{yy}\sim Z^{\alpha}|Y|^{\beta}$。（也就是，$K_{yy}$实际上依赖于外加物源的位置，因为这是证认$Y$原点的唯一方法。）在$\alpha=m,\beta=1-2m$的特殊情形，Davies得到了方程（10.119）的一个严格解。然而，显然他关于K_{yy}对Y依赖的基本假设和半经验理论的目的有尖锐矛盾。从这个观点看，Laykhtman (1963)的提议更合适。根据Laykhtman，点源情形的浓度$\overline{\vartheta}(X,Y,Z)$一定有（10.122）的形式，其中$\theta_0(X,Z)$作为方程（10.113）的解给出。为了确定$\overline{Y^2(X,Z)}$，建议以拉格朗日表达式为基础[例如，Taylor

公式（9.31）]，而不是半经验理论。

考虑涡扩散系数张量主轴对OX、OY和OZ轴可能的偏离

前面的结论全都基于大气扩散的半经验方程具有（10.55）形式的假设。现在让我们回想一下，即使最一般的扩散方程也只能用某些不严格的近似得到。然而，方程（10.55）也含有额外的假设，沿垂向的、沿平均风方向和垂直于风的OZ, OX和OY轴是涡扩散系数张量K_{ij}的主轴。我们引入了这个假设是因为从流动的几何和运动学条件来看，这些方向是首选。然而，必须记住，这些论证是不严格的。所以，我们必须不排除这种可能性，实际上大气扩散的半经验关系也应该含有某些在方程（10.55）中忽略的额外的项。此外，在7.5节中，我们已经注意到，在均匀下垫面上方的大气中，在平均风方向一定存在一个水平湍动热流，有联合矩量$\overline{u'T'} = u_* T_* f_7(Z/L)$描述。这个矩量对于正的温度梯度是正的，对于负的梯度是负的，而且非常大。在接近中性分层时，它的绝对值大约是矩量$\overline{w'T'}$的三倍，在稳定条件下这个比例更大[见8.5节，特别是图C]。在半经验扩散理论的框架内，平面平行湍流中的矩量$\overline{u'T'}$一定可以写为这种形式$\overline{u'T'} = -K_{xz}\frac{\partial T}{\partial Z}$（其中$K_{xz} < 0$），而$\overline{w'T'} = -K_{zz}\frac{\partial \vartheta}{\partial Z}$。非零系数$K_{xz}$的存在显然表明坐标轴和张量$K_{ij}$的主轴不重合。此外，我们看到，在不分层边界层中，张量K_{ij}的非对角分量K_{xz}大约是对角分量K_{zz}的三倍。在通常的热量和中性质量外加物涡扩散系数相等的假设下，我们把平均风方向的湍动外加物流的半经验方程写为

$$\overline{u'\vartheta'} = -K_{xx}\frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial X} - K_{xz}\frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial Z}, \tag{10.124}$$

其中K_{xz}是负的系数，在中性条件下绝对值近似为K_{zz}的三倍。（$\overline{u'\vartheta'}$的第三个可能的分量，即$-K_{xy}\frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial Y}$等于零，因为在二维湍流中，由于流动相对平均速度方向的对称性，$K_{xy} = K_{zy} = K_{yx} = K_{yz} = 0$。）当然，和$K_{zz}$相比大的$K_{xz}$值不意味着半经验扩散方程中相应的项$-\frac{\partial}{\partial X}K_{xz}(Z)\frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial Z}$总是重要的。实际上，这一项是平均风方向上湍动外加物流量产生的，与对流流量$\overline{u\vartheta}$相比通常较小。于是通常取它比$\overline{u}\frac{\partial \overline{\vartheta}}{\partial X}$小。然而，如果考虑$K_{xx}\frac{\partial^2 \overline{\vartheta}}{\partial X^2}$，那么没有理由忽略扩散方程中的$K_{xz}\frac{\partial^2 \overline{\vartheta}}{\partial X \partial Z}$ 项。此外，如果$K_{xz} \neq 0$，那么也没有理由假设$K_{zx} = 0$。$\overline{\vartheta} = \overline{\vartheta}(X)$（也就是在初始时刻$t = t_0$不依赖于坐标$Y$和$Z$）的湍流中外加物的输运机制的定性物理推论使得可以自然预期K_{zx}在二维流动中是负的。相关系数r_{uT}和r_{wT}的绝对值在近似中性的大气表面层中近似相等也是这一层中$K_{zx} \approx -K_{xx}/3$的部分原因[见Yaglom (1969)]。在每一种情形，严格来说，平面平行湍流中半经验扩散方程的一

般形式一定和方程（10.55）不同，有两项额外的项，必须写为

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial t}+\overline{u}(Z)\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial X} &= K_{xx}(Z)\frac{\partial^2\overline{\vartheta}}{\partial X^2}+K_{xz}(Z)\frac{\partial^2\overline{\vartheta}}{\partial X\partial Z}+K_{yy}(Z)\frac{\partial^2\overline{\vartheta}}{\partial Y^2}+\\ &+\frac{\partial}{\partial Z}\left(K_{zx}(Z)\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial X}\right)+\frac{\partial}{\partial Z}\left(K_{zz}(Z)\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}\right).\end{aligned}$$

这里，系数K_{xx}, K_{yy}和K_{zz}取为正的，K_{xz}和K_{zx}取为负的。含有K_{xz}的项通常和含K_{xx}的项同样重要，并且它们都可以忽略而不产生可观的误差。类似地，在很多情形，含有K_{zx}的项一定和通常的含有K_{zz}的垂向扩散项相当。然而，半经验扩散理论的所有定性预言几乎不可能依赖于含有系数K_{xz}和K_{zx}的项存在与否。所以，上面用方程（10.55）得到的一般推论显然是对的。最后一个结论也被少量已有的基于非零系数K_{xz}和K_{zx}的扩散方程的计算结果证实。我们现在考虑这些结果。

Lettau (1952)[也参见Priestley (1963)]显然是第一个注意到大气扩散的半经验方程中$K_{zx}\neq 0$可能性的人。后来，Davies (1954b)尝试估计源自一个稳态点源的扩散的扩散方程中相应的项的可能影响。对于他的估计，他部分基于半经验推理，将系数$\overline{u}(Z), K_{xz}(Z)$和$K_{zz}(Z)$函数形式的一些特殊假设下，方程

$$\overline{u}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial X}=\frac{\partial}{\partial X}\left(K_{xz}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}\right)+\frac{\partial}{\partial Z}\left(K_{zz}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}\right), K_{xz}<0,$$

的解和普通的二维扩散方程（10.113）的解进行了比较。正如所预期的，解的差异非常小。后来，Gee, Davies (1963)计算了$\frac{\partial}{\partial X}\left(K_{xz}\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}\right)$项对Saffman计算的$\langle X\rangle$和$\sigma^2_{\vartheta_x}$值的影响[见方程（10.103）]，并且发现对于某些关于$K_{xz}(Z)$的假设，所得的修正为15–20%的量级。几乎同时，Matsuoka (1961, 1962)报告，显然也有$K_{zx}\neq 0$，或者扩散方程一定取（10.55'）的形式。他给出了一些不严格的半经验论证，倾向于$K_{zx}=K_{xz}$并假设$K_{zx}=K_{xz}=-(K_{xx}K_{zz})^{1/2}$。Matsuoka用他的扩散方程计算了来自一个稳态线源的外加物分布。他发现在他的假设下，相应的面浓度值和相应的“经典”扩散方程（10.55）的解给出的值精确符合，但其他高度的浓度不符合。Gee, Davies (1964)也使用$K_{xz}=K_{zx}$的方程（10.55'）以及一些关于所有扩散系数的特殊假设来计算来自一个瞬时源的水平分散。它们的结果表明，方程（10.55'）的两个额外项对来自瞬时源的扩散的影响可能非常大。同样在Gee和Davies的工作中给出了一个半经验论证，表明方程$K_{zx}=K_{xz}/2$比Matsuoka的方程$K_{zx}=K_{xz}$更合理。Gee (1967)使用关系式$K_{zx}=K_{xz}/2$加上同样类型的其他关系式

计算了来自$\overline{u}(Z)=U_0+aZ, \overline{v}(Z)=V_0+bZ$的流动中的一个瞬时点源的扩散。在此情形，张量$K_{ij}$一般有四个非零的非对角分量。Gee对于$K_{ij}=$常量（对所有$i$和$j$）的计算结果表明，额外的项对扩散的影响有限。这与Gee和Davies使用扩散系数的其他垂向分布的结果矛盾，表明上面提到的效应对这些分布的形式敏感。因为目前这些分布仍然相对未知，所以在这里进一步详细说明是没有意义的。

拉格朗日相似性假设在表面层扩散理论中的使用

在前面，我们总是从湍动扩散的半经验方程出发。然而，有趣的是考虑不使用湍动外加物流量对平均浓度梯度的线性依赖的半经验假设能得到什么关于大气表面层中扩散的结论。所以，看起来很自然的9.4节中引入的表面层中拉格朗日湍流特征量相似性的命题在这里可能有重要作用。现在我们来讨论这个命题的一些推论。

首先，让我们回顾一下，忽略分子扩散的影响，时刻t_0在点$\boldsymbol{x}=(x,y,z)$的具有单位输出量的瞬时点源的平均外加物浓度等于时刻t_0在点$\boldsymbol{x}$的流体粒子的拉格朗日坐标的概率密度函数（见上面的10.3节）。特别地，由此得到，对于位于坐标原点的输出量为Q的瞬时面源，对于中性热分层和足够大的τ，时刻$t=t_0+\tau$的平均浓度由这种类型的公式确定：

$$\overline{\vartheta}(X,Y,Z,t_0+\tau)=\frac{Q}{\overline{Z}^3}P_3\left(\frac{X-\overline{X}}{\overline{Z}},\frac{Y}{\overline{Z}},\frac{Z-\overline{Z}}{\overline{Z}}\right), \tag{10.125}$$

其中P_3是一个三变量普适函数，

$$\overline{Z}\approx bu_*\tau, \overline{X}\approx\frac{u_*\tau}{\kappa}\ln\frac{cu_*\tau}{eZ_0},$$

和b,c和$e=2.718...$是普适常数[见方程（9.65）、（9.60'）和（9.61'）]。仅当$\tau\gg\frac{H}{u_*}$，对于一个高度H 的源可以只用同样的表达式。对于不非常大但显著超过$\frac{H}{u_*}$的τ值，可以得到更准确的结果，如果我们假设在一个高度H的给定点释放后一段时间τ后的流体粒子的拉格朗日速度的统计性质和在时刻$t_0-\tau_1$（其中τ_1为H/u_* 的量级，具体地，$\tau_1=\beta H/u_*$，其中β是一个普适常数）在地面（$H=0$）释放的粒子的相同，换句话说，如果我们假设$\overline{Z}(\tau)$和$\overline{X}(\tau)$的方程（9.60'）和（9.61'）是对的，如果时间τ替换为$\tau+\tau_1=\tau+\beta H/u_*$[Batchelor (1964)]。[4] 这种修正仅在相对小的时间区间重要。然而，在处理真实实验数据特别时实验室实验数据时（通常必须限制于不非常大的τ 值），它有时是有用的[见，例如，Cermak (1963)]。

[4]在本小节中，我们已经看到，近似半经验扩散理论得出$\beta=1/\kappa'=1/\alpha\kappa\approx2.2$，以及$b=\kappa'\approx0.45$，$c=e^{-\gamma}b\approx0.56b$。下一小节末会给出对$b$更精确的估计。

在不稳定或稳定分层的情形，方程（10.124）替换为更一般的表达式

$$\overline{\vartheta}(X,Y,Z,t_0+\tau)=\frac{Q}{\overline{Z}^3}P\left(\frac{X-\overline{X}}{\overline{Z}},\frac{Y}{\overline{Z}},\frac{Z-\overline{Z}}{\overline{Z}};\frac{\overline{Z}}{L}\right), \tag{10.126}$$

其中P是一个新的四变量普适函数，$\overline{Z}=\overline{Z}(\tau)$和$\overline{X}=\overline{X}(\tau)$由方程（9.69）和（9.70）确定，$L$是第4章中引入的分层边界层中的一个自然长度标度。对于不非常大的τ，这里也可以引入对源的高度H的修正，但这里不作讨论。

特别地，从表达式（10.124）得到，对于中性分层，由表达式

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{\vartheta_x} &= Q^{-1}\int\int\int(X-\overline{X})^2\overline{\vartheta}(X,Y,Z)\mathrm{d}X\mathrm{d}Y\mathrm{d}Z,\\
\sigma^2_{\vartheta_y} &= Q^{-1}\int\int\int Y^2\overline{\vartheta}(X,Y,Z)\mathrm{d}X\mathrm{d}Y\mathrm{d}Z,\\
\sigma^2_{\vartheta_z} &= Q^{-1}\int\int\int(Z-\overline{Z})^2\overline{\vartheta}(X,Y,Z)\mathrm{d}X\mathrm{d}Y\mathrm{d}Z,
\end{aligned}$$

确定的来自一个瞬时点源的外加物团的方差渐近正比于$\overline{Z}^2$。根据方程（9.61'），这表明沿（来自瞬时点源的中性分层）外加物团的所有三根轴的方差渐近正比于$u_*^2\tau^2$，也就是正比于τ^2，而不是均匀湍流情形的τ，不是均匀剪切流情形的τ^3。在存在热分层时，严格来说，不可能保证这些方差（即使对于非常大的τ）会严格正比于$\overline{Z}^2$，因为这里分布$\overline{\vartheta}(X,Y,Z,t_0+\tau)$可能依赖于$\overline{Z}/L$，也就是，可能随$\tau$ 的变化而变化。然而，可以自然地假设，在很多情形，分布对$\overline{Z}/L$的依赖不会很强。所以在以及近似下，也可以认为方差正比于$\overline{Z}^2$。在强不稳定性的情形，后一个结论似乎相当有说服力，并且有额外的支持[见方程（9.75'）]。因此，在这些条件下，对于不非常大的τ值，我们一定有这些表达式

$$\sigma^2_{\vartheta_x}\sim\sigma^2_{\vartheta_y}\sim\sigma^2_{\vartheta_z}\sim\overline{Z}^2\sim\frac{q}{c_p\rho}\frac{g}{T_0}\tau^3.$$

（最后提到的这些表达式中最精确的可能是$\sigma^2_{\vartheta_z}$的表达式。）原则上，所有这些结论都可以和瞬时外加物点源的实验数据比较。然而，因为几乎没有这种数据，对于实验检验，更方便的是使用和来自稳态外加物源的浓度分布有关的拉格朗日相似性假设的结果。这些结果将在下面讨论。

根据方程（10.125），来自一个稳态点源的外加物面浓度，在平均风方

向距离这个点源足够大的距离X处由这个方程确定：

$$\overline{\vartheta}(X,0,0)=Q\int\limits_0^\infty P\left(\frac{X-\overline{X}}{\overline{Z}},0,-1;\frac{\overline{Z}}{L}\right)\frac{\mathrm{d}\tau}{\overline{Z}^3}. \tag{10.127}$$

对于线源，这个方程必须替换为下面的方程：

$$\overline{\vartheta}(X,0)=Q\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty P\left(\frac{X-\overline{X}}{\overline{Z}},\frac{Y}{\overline{\overline{Z}}},-1;\frac{\overline{Z}}{L}\right)\frac{\mathrm{d}Y\mathrm{d}\tau}{\overline{Z}^3}. \tag{10.128}$$

这两个方程显然也可以重写为

$$\begin{aligned}\overline{\vartheta}(X,0,0)&=Q\int P\left(\frac{X-\overline{X}}{\overline{Z}},0,-1;\frac{\overline{Z}}{L}\right)\frac{\mathrm{d}\left(\frac{X-\overline{X}}{\overline{Z}}\right)}{\overline{Z}^3\frac{\mathrm{d}\left(\frac{X-\overline{X}}{\overline{Z}}\right)}{\mathrm{d}\tau}}\\&=Q\int\frac{P\left(\frac{X-\overline{X}}{\overline{Z}},0,-1;\frac{\overline{Z}}{L}\right)}{\overline{Z}^2\left[\frac{X-\overline{X}}{\overline{Z}}\frac{\mathrm{d}\overline{Z}}{\mathrm{d}\tau}+\frac{\mathrm{d}\overline{X}}{\mathrm{d}\tau}\right]}\mathrm{d}\left(\frac{X-\overline{X}}{\overline{Z}}\right)\end{aligned} \tag{10.126$'$}$$

以及类似地

$$\overline{\vartheta}(X,0)=Q\int\int\frac{P\left(\frac{X-\overline{X}}{\overline{Z}},\frac{Y}{\overline{\overline{Z}}},-1;\frac{\overline{Z}}{L}\right)}{\overline{Z}\left[\frac{X-\overline{X}}{\overline{Z}}\frac{\mathrm{d}\overline{Z}}{\mathrm{d}\tau}+\frac{\mathrm{d}\overline{X}}{\mathrm{d}\tau}\right]}\mathrm{d}\left(\frac{X-\overline{X}}{\overline{Z}}\right)\mathrm{d}\frac{Y}{\overline{\overline{Z}}} \tag{10.127$'$}$$

对于方程（10.126’）和（10.127’）右边积分的近似计算，按照Batchelor (1959, 1964)和Ellison (1959)，让我们使用这个事实，对于大的X，来自坐标原点的瞬时点源的外加物团一定会在远短于这个外加物团到达X = 常量所需时间τ的时间内通过这个平面。这也可以表达如下：因为显然在$\tau\to\infty$时$\overline{Z}/\overline{X}\to 0$，所以对于大的$X$，

$$P\left(\frac{X-\overline{X}}{\overline{Z}},0,-1;\frac{\overline{Z}}{L}\right)\left[\text{或}P\left(\frac{X-\overline{X}}{\overline{Z}},\frac{Y}{\overline{\overline{Z}}},-1;\frac{\overline{Z}}{L}\right)\right]$$

保持明显不等于零的X值和$\overline{X}$相比相对较小。所以，对于足够大的$\overline{X}$，可以认为对于任意固定的$\frac{Y}{\overline{\overline{Z}}}$，

$$P\left(\frac{X-\overline{X}}{\overline{Z}},\frac{Y}{\overline{\overline{Z}}},-1;\frac{\overline{Z}}{L}\right)\sim\delta\left(\frac{X-\overline{X}}{\overline{Z}}\right).$$

这个假设非常类似于，和平均流动的外加物对流相比，忽略平均风方向的纵向扩散，半经验扩散方程的几乎所有应用中都是这么做的。由此得到，方程（10.126’）和（10.127’）可以不产生很大误差地替换为近似表达式

$$\overline{\vartheta}(X,0,0) \approx \frac{Q}{\overline{Z}^2 \frac{\mathrm{d}\overline{X}}{\mathrm{d}\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} P\left(\xi, 0, -1; \frac{\overline{Z}}{L}\right) \mathrm{d}\xi \qquad (10.126'')$$

和

$$\overline{\vartheta}(X,0) \approx \frac{Q}{\overline{Z} \frac{\mathrm{d}\overline{X}}{\mathrm{d}\tau}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} P\left(\xi, \eta, -1; \frac{\overline{Z}}{L}\right) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \qquad (10.127'')$$

其中$\overline{Z} = \overline{Z}(\tau)$和$\overline{X} = \overline{X}(\tau)$现在对一个使得$\overline{X}(\tau) = X$的$\tau$ 取值。如果我们把方程（10.126”）和（10.127”）左边的高度零替换为任意高度Z，那么函数P的宗量-1只能替换为$\overline{Z}/Z - 1$。

首先，让我们研究最简单的中性分层下的扩散的情形。在此情形，方程（10.126”）和（10.127”）中的函数P不依赖于$\overline{Z}/L$，也就是对于所有$\overline{Z}$它都是相同的，$\overline{X}(\tau)$和$\overline{Z}(\tau)$满足方程（9.60’）和（9.61’）。所以

$$\overline{\vartheta}(X,0,0) \sim \frac{Q}{u_*^3 \tau^2 \ln \frac{cu_*\tau}{Z_0}} \approx \frac{Q \ln \frac{c\overline{Z}}{bZ_0}}{u_* X^2} \qquad (10.129)$$

以及

$$\overline{\vartheta}(X,0) \sim \frac{Q}{u_*^2 \tau \ln \frac{cu_*\tau}{Z_0}} \approx \frac{Q}{u_* X}. \qquad (10.130)$$

所以可以看到，在中性条件下，来自稳态线源的外加物浓度一定近似正比于X^{-1}减小，而来自稳态点源的外加物浓度减小得比X^{-2}慢。如我们所知，数据和这个结论符合得很好[见上面，方程（10.91）后面]。

表达式$\overline{\vartheta} \sim X^{-p}$中的指数$p$可以更精确地从公式$p = -\frac{\mathrm{d}\log\overline{\vartheta}}{\mathrm{d}\log X}$ 确定。Cermak (1963)进行了这个工作，也记住上面提到的和源的非零高度H有关的对$\overline{X}(\tau)$和$\overline{Z}(\tau)$的修正。由此，在$b = c = 0.1$的假设下从方程（10.128）和（10.129）计算的$p = p(X)$的理论值和对于中性分层的已有的实验室实验以及野外观测数据符合得比预期更好。然而，后来，Pasquill (1966)提倡使用$b = \kappa \approx 0.4$，如我们所知，这来自$\alpha = 1$假设下的半经验扩散方程。记住了这一点，他处理了距离稳态源X距离处在中性条件下的垂向外加物分布的野外观测数据。有必要接收几个不严格的假设，以推导垂向分布的观测特征和拉格朗日特征量X和Z之间的关系。然而，在这些假设下，Pasquill发现，野外数据和估计值$b \approx 0.4$符合的精度高于在理论推导所

用的假设下得出的估计值。

非中性分层的情形更复杂。首先，方程（10.126"）和（10.127"）右边的积分现在可能依赖于$\overline{Z}/L$，也就是依赖于X。然而，这种依赖比积分之前的因子对X的依赖弱。所以，作为一级近似，在此情形也由可能使用这些表达式

$$\overline{\vartheta}(X,0,0) \sim \frac{Q}{\overline{Z}^2 \left.\frac{\mathrm{d}\overline{X}}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\overline{X}(\tau)=X}}, \overline{\vartheta}(X,0) \sim \frac{Q}{\overline{Z} \left.\frac{\mathrm{d}\overline{X}}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\overline{X}(\tau)=X}}.$$

更重要的是，这里函数$\overline{X}(\tau)$和$\overline{Z}(\tau)$由方程（9.69）和（9.70）定义，它们含有未知的普适函数$f(\zeta), \varphi_1(\zeta)$和$\varphi(\zeta)$。只有它们的渐近行为可以被认为精确到未定数值常数是已知的。所以，对于强不稳定性，$\overline{Z}(\tau) \sim \tau^{3/2}, \overline{X}(\tau) \sim \tau$，并且

$$\vartheta(X,0,0) \sim X^{-3}, \overline{\vartheta}(X,0) \sim X^{-3/2}.$$

当然，我们可以希望（并且第8节的数据对此给出了一些证实）只有这些函数的渐近行为在浓度计算中起到了基本的作用。如果这是真的，那么，在一级近似下，我们可以把未知函数替换尾在小的和大的宗量时表现合适的几乎任意函数。这样的可能性被Gifford (1962)的计算结果部分证实。Gifford提出$\varphi_1(\zeta) = f(\zeta)$，故而$\frac{\mathrm{d}\overline{X}}{\mathrm{d}\tau} = \overline{u}(\overline{Z})$，和方程（9.71）一致，但和半经验理论的推论不一致。然后他把$f(\zeta)$选为这种形式的函数：

$$f(\zeta) = \begin{cases} \ln\zeta + 6\zeta, & \text{对于}\zeta > 0, \\ \ln|\zeta|, & \text{对于}0 < \zeta < -0.03, \\ \zeta^{-\frac{1}{3}} + (0.03)^{-\frac{1}{3}} + \ln 0.03, & \text{对于}\zeta < -0.03. \end{cases} \qquad (10.131)$$

并且假设[根据Kazanskiy, Monin (1957)]

$$\varphi(\zeta) = \left[1 - \frac{1}{f'(\zeta)}\right]^{1/4}.$$

根据从这些假设得到的依赖关系（其中对于稳态外加物点源的无量纲浓度$\frac{u_* L^2}{Q\kappa}\overline{\vartheta}$依赖于无量纲距离$\kappa b\frac{X}{L}$），Gifford对于不同热分层和不同距离$X$计算了表达式$\overline{\vartheta} \sim X^{-p}$中的指数$p$。他得到的$p$值和在美国内布拉斯加奥尼尔的北美燕麦项目（Project Prairie Grass）期间收集的以及Barad (1958)发表的数据符合得相对较好。后来，Malhotra, Cermak (1963)比较了Gifford的计算结果（再一次地，$b = 0.1$）和一些具有加热的下壁面（产生不稳定温度分层）的特殊气象风洞中进行的扩散实验的数据，所得结果也令人

满意。Cermak (1963)对略微非中性条件的情形进一步验证了Gifford 的理论。他在计算中使用了Swinbank的指数函数$f(\zeta)$[参见方程（7.73）]，所得理论预测和野外及实验室数据符合得令人满意。后来Pasquill (1966)修改了Gifford的$\overline{Z}$对$\overline{X}$依赖关系的计算，使用了$b = 0.4$。他也分析了Panofsky, Prasad (1965)对同样的依赖关系的估计。根据他的结论，相似性理论不能解释热分层对外加物垂向扩散（这在奥尼尔实验发表的数据中很明显）的严重影响。再后来，Klug (1968)重复并扩展了Gifford的计算，使用了同样的假设，但是用了$b = 0.4$和略微不同形式的普适风分布。他也发现，真实浓度测量的某些特征和所得的理论预测不一致。因此，还没有得到明确的解决方案，急需进行进一步仔细的实验和理论研究。

10.6 有限速度的扩散

半经验扩散方程（10.55）是抛物型的，这导致在时刻t_0引入流体的外加物立即分散到整个空间。于是，到时刻$t_0 + \tau$（其中τ任意小），在距离源任意大的距离已经可以探测到非常少量的外加物[见，例如，方程（10.89）]。这显然和实际的流体粒子有限的速度相矛盾。这直接和这个事实有关，在半经验理论中，如我们在10.3节看到的，流体粒子瞬时速度是无穷大的。然而，在实践中，在理论中出现无穷大的速度不起很大作用，因为浓度不可忽略的体积总是有限的，对于不非常小的扩散时间，这个体积中的浓度分布通常可以令人满意地用抛物型扩散方程描述。然而，在外加物团真实边界附近，使用抛物型扩散方程可能导致根本错误。例如，从高度H的烟囱冒出的烟实际上到达了地面距离烟囱不近于$\frac{u}{v}H$的地方，其中u是风的最小速度，v是烟粒子的最大垂向运动速度。同时，根据半经验抛物型扩散方程，烟可以在地面上距离烟囱任意近的地方探测到。所以，在某些情形，我们希望有一个更一般考虑流体粒子速度有限的半经验扩散方程。G. I. Taylor (1921)以及很多研究者后来在不同时期简单讲述了这种对普通扩散理论（虽然不一定是湍流扩散）的推广，但没有给出细节。在本小节中，我们主要根据Monin (1955, 1956b)对其进行讨论。

我们假设描述流体粒子运动的随机函数$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$对$t$可微，并且其导数，流体粒子的速度$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t)$是有限的。在此情形，不能认为函数$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$是$t$的马尔可夫函数。实际上，我们已经看到，对于马尔可夫函数$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$，速度$\frac{\partial \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}$总是无限的，只要$K_{ij} \neq 0$。如果我们假设$K_{ij} = 0$，那么速度不会是无限的，而是容易看到，在此情形的函数$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$不是随机的。所以流体粒子有限的条件与其左边$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$是$t$的马尔可夫函数的假设不符。

在尝试考虑扩散粒子的惯性时，类似的情形在分子扩散理论中出现。由于惯性，其轨迹$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}, t)$在每个地方的导数$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}$ 都是有

限的。所以，函数$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$不可能是马尔可夫函数。我们知道，在分子扩散（也就是布朗运动）理论中，可以通过假设六维函数$\{\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)\}$（而不是函数$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$）是马尔可夫函数[见，例如，Uhlenbeck, Omstein (1930)或Chandrasekhar (1943)]来考虑粒子的惯性。我们将以类似的方式讲述。

为了简单，让我们限制于研究OZ轴方向的一维扩散问题。根据上面已经说过的，让我们基于比函数$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x},t)$为马尔可夫函数这个假设更宽泛的半经验假设尝试构建一个推广的湍动扩散的半经验理论。特别地，让我们假设二维随机函数$\{Z(z,t),W(z,t)\}$是马尔可夫函数，其中$Z(z,t)$是流体粒子的坐标，$W(Z,t)=\frac{\partial Z(z,t)}{\partial t}$是速度。因为我们仅对速度$W$为有限这一点的影响感兴趣，所以我们可以限制于非常粗略地描述W的可能值。令$|W|<C$，让我们把整个速度可能值范围$-C<W<C$划分为有限的N个区间Δ_n，并且我们仅用区间Δ_n的数n代替落如区间中的特定W值。换句话说，我们考虑随机函数$n(t)$（而不是随机函数$W(z,t)$），假设它取分立值$1,2,...,N$。此外，我们假设随机函数$\{Z(z,t),n(t)\}$是马尔可夫函数。

现在让我们研究条件概率

$$P\{Z(z,t)<Z;n(t)=i|Z(z,t_0)=z\}=\int\limits_{-\infty}^{Z}p_i(Z|z,t)dZ. \qquad (10.132)$$

在湍动扩散理论中起到了基本作用的流体粒子坐标$Z(z,t)$的概率密度函数用函数$p_i(Z|z,t)$表示为

$$p(Z|z,t)\sum_i p_i(Z|z,t). \qquad (10.133)$$

Kolmmogorov (1931)指出的马尔可夫随机过程的基本微分方程，此处简化为下面的函数$p_i(Z|z,t)$的方程组，

$$\frac{\partial p_i}{\partial t}=\sum_j a_{ji}p_j-\frac{\partial \overline{W}_i p_i}{\partial Z}. \qquad (10.134)$$

替换普通的半经验扩散方程。这里使用下面的记号：

$$\overline{W}_i = \overline{W}_i(Z,t)=\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\overline{Y_i(\tau|Z,t)}\right]_{\tau=0},$$

$$a_{ji}=a_{ji}(Z,t)=\left[\frac{\partial}{\partial\tau}P\{n(t+\tau)=i|Z(z,t)=Z,n(t)=j\}\right]_{\tau=0},$$

其中

$$Y_i(\tau|Z,t)=Z(z,t+\tau)-Z(z,t)$$

是$Z(z,t) = Z$以及$n(t+\tau) = n(t) = i$固定的条件下，粒子的位移。显然，$\overline{W}_i$是粒子速度W在其属于区间Δ_i 的条件下的数学期望。所以对于所有Z和t，$\overline{W}_i(Z,t)$值位于区间Δ_i中。变量a_{ji}的意义可以用下面的方式澄清。因为函数$n(t)$只取整数，所以它只是跳跃地变化，使得某个时刻的值$n(t-0) = j$直接跃变到紧接t时刻的另一个值$n(t+0) = i$。$i \neq j$的a_{ji}值是从$n(t-0) = j$跃变到$n(t+0) = i$的平均频次，因为$a_{ji}\Delta t$是在时间区间$(t, t+\Delta t)$中在$n(t) = j$条件下从$n = j$跃变到$n = i$的概率。

因为

$$\sum_i P\{n(t+\tau) = i|Z(z,t) = Z, n(t) = j\} = 1,$$

于是很显然$\sum\limits_i a_{ji} = 0$。于是$a_{jj} = -\sum\limits_{i\neq j} a_{ji}$等于从$n = j$跃变到$n$取其他值的平均频次取负号。

方程（10.133）组成了对应于上述命题的半经验扩散方程组。这些方程可以在初始条件

$$\begin{aligned} &p_i(Z|z,t) \to \varepsilon_i(z)\delta(Z-z)\text{对于}t \to t_0 \\ &\varepsilon_i(z) = P\{n(t_0) = i|Z(z,t_0) = z\}. \end{aligned} \tag{10.135}$$

下求解。变量ε_i给出了$n(t_0)$（也就是流体粒子初始速度值）的概率分布。

让我们更详细地研究一下最简单的方案，其中流体粒子速度可能值的整个区间$-C < W < C$被划分为两个区间Δ_1和Δ_2。我们选Δ_1和Δ_2为$0 < W < C$和$-C < W < 0$。在此情形，随机函数$n(t)$表示流体粒子运动方向。为了明确，假设两个方向等价，也就是，$\overline{W} = 0$。在此情形，我们可以假设$\overline{W}_1 = -\overline{W}_2 = W$，其中$W$是粒子速度的绝对值，$a_{12} = a_{21} = -a_{11} = -a_{22} = a$，其中$a$是运动方向改变的频次。然后方程（10.133）假设下面的形式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial W_{p_1}}{\partial Z} &= a(p_2 - p_1), \\ \frac{\partial p_2}{\partial t} - \frac{\partial W_{p_2}}{\partial Z} &= a(p_1 - p_2). \end{aligned} \tag{10.136}$$

这类方程或者由它们推导出的电报方程，是首先在Fock (1926)描述一维光子扩散时得到的。此后，它们被Davidov (1935)、Cattaneo (1948－1949, 1958)、R. Davis (1954)、Venotte (1958)和其他人用于描述分子扩散，考虑

了扩散粒子速度有限。Lyapin (1948, 1950), Goldstein （1951，这里G. I. Taylor (1921)的注记被发展为一个数学理论）和Gupta (1959)提议用这些方程描述湍动扩散。Bourret (1961)考虑了二维和三维湍动扩散类似的方程。假设扩散发生在一个稳态湍流场中。在此情形，a和W值不依赖于t，于是仅依赖于Z。引入新的未知量$p = p_1 + p_2$，扩散粒子坐标的概率密度函数以及扩散粒子的流量密度$q = W(p_1 - p_2)$，我们得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial Z} &= 0, \\
\frac{\partial q}{\partial t} + 2aq &= -W\frac{\partial W_p}{\partial Z}.
\end{aligned}
\tag{10.137}
$$

第一个方程对非稳态湍流也成立，表达了扩散外加物质量守恒。根据这个方程，可以假设

$$
p = \frac{\partial \Psi}{\partial Z}, q = -\frac{\partial \Psi}{\partial t}, \tag{10.138}
$$

其中

$$
\Psi = \Psi(Z|z,t) = \int_{-\infty}^{Z} p(Z'|z,t)dZ'
$$

表示扩散粒子坐标$Z(z,t)$的概率分布函数。把方程（10.137）带入方程（10.136）第二个方程，我们得到函数Ψ的所谓电报方程[5]

$$
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial \Psi}{\partial t} = W\frac{\partial}{\partial Z}W\frac{\partial W}{\partial Z}. \tag{10.139}
$$

这个方程是双曲型的，它描述了速度有限，不超过W的扩散外加物的传播。实际上，这里甚至假设速度绝对值总是等于W。同样，这个方程也是近似的，因为它基于一个非严格的假设，关于函数$\{Z(t), n(t)\}$是马尔可夫的。然而，它比普通的一维半经验湍动扩散方程更精确。实际上，不难证明我们的新扩散方程是抛物型扩散方程的推广。后者是从方程（10.138）作为极限情形得到的。在稳态均匀湍流场（其中系数a和W及不依赖于t也不依赖于Z，也就是说，是常量）中的扩散的粒子中这是最容易证明的。在

[5]这类方程[方程（10.138）]被称为电报方程是因为它也描述了导体中电流的时变规律，例如，在电阻R、电容C和自感L的传输线中，如果我们假设$a = \frac{R}{2L}$和$W = (CL)^{-1/2}$。由这个类比，可以得出结论，电子以平均速度$(CL)^{-1/2}$完成随机行走，平均以$R/2L$的频率改变运动方向。在此情形，$K = \frac{W^2}{2a} = \frac{1}{CR}$类似于扩散系数。

此情形，p[以及p_1和p_2]满足和Ψ同样的方程，也就是，电报方程

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial p}{\partial t} = W^2\frac{\partial^2 p}{\partial Z^2}. \tag{10.140}$$

如果允许参数a和W无限增长（使得比例$W^2/2a$趋近于一个有限极限，我们记作K），那么电报方程（10.139）变换为抛物型扩散方程$\frac{\partial p}{\partial t} = K\frac{\partial^2 p}{\partial Z^2}$，这对应于均匀稳态湍流的情形。

方程（10.139）在无界空间$-\infty < Z < \infty$中在初始条件（10.134）下的解具有这种形式

$$\begin{aligned} p(Z|z,t) &= e^{-a\tau}\{\varepsilon_1\delta(\zeta - W\tau) + \varepsilon_2\delta(\zeta + W\tau) + \\ &\quad \frac{a}{2W}\left[I_0\left(a\tau\sqrt{1-\frac{\zeta^2}{W^2\tau^2}}\right) + \frac{1+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\frac{\zeta}{W\tau}}{\sqrt{1-\frac{\zeta^2}{W^2\tau^2}}}I_1\left(a\tau\sqrt{1-\frac{\zeta^2}{W^2\tau^2}}\right)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{10.141}$$

其中$\tau = t - t_0$、$\zeta = Z - z$，I_0和I_1是虚宗量贝塞尔函数，假设函数p在$|\zeta| > W\tau$时等于零。方程（10.140）表明在这个理论中，来自一个瞬时点源的外加物分布有一个尖锐的边缘，也就是有一个波前$\zeta = \pm W\tau$，其中聚集了有限比例的扩散外加物，这个比例随时间指数减小。在这个波前之后有一个经历了多次散射或改变了一次运动方向的外加物粒子形成的连续尾流。在这个尾流中心，也就是当$|\zeta| \ll W\tau$，不难看到，方程（10.140）右边略微不同于函数

$$\sqrt{\frac{a}{2\pi W^2\tau}}e^{-\frac{a\zeta^2}{2W^2\tau}},$$

对于$\tau \gg \frac{1}{a}$和任意ε_1和ε_2，这是抛物型方程$\frac{\partial p}{\partial \tau} = K\frac{\partial^2 p}{\partial \zeta^2}, K = \frac{W^2}{2a}$ 的解。所以，具有有限速度的扩散理论和抛物型扩散方程结论仅在非常小的扩散时间$\tau \lesssim \frac{1}{a}$或接近外加物团边缘（在那里，从任何理论得到的浓度都非常小）时有显著差异。作为说明，图83中给出了$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1/2$和$\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0$时对于两个$a\tau$值的分布$p(Z|z,t)$的连续部分的图，以及对应于抛物型扩散方程的外加物分布的图。

分布（10.140）的平均值和方差等于

$$\begin{aligned} \overline{Z} &= z + \frac{W}{2a}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(1 - e^{-2a\tau}), \\ \overline{(Z-\overline{Z})^2} &= \frac{W^2\tau}{a}\left[1 - \frac{1-e^{-2a\tau}}{2a\tau} + (\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2\frac{(1-e^{-2a\tau})^2}{4a\tau}\right], \end{aligned}$$

(10.142)

在$a\tau \gg 1$时，它们和

$$\overline{Z} = z + \frac{W}{2a}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \overline{(Z - \overline{Z})^2} = 2K\tau = \frac{W^2\tau}{a}$$

基本没什么不同。根据这里假设的扩散过程的模型，在小的时间间隔τ内散射的概率等于$a\tau + o(\tau)$并且在不重叠的时间区间里的散射可以认为是基本独立的随机事件。所以，时间间隔τ中散射的次数$\nu(\tau)$是分布为具有参数$a\tau$的泊松分布的随机变量：

$$P\{\nu(\tau) = m\} = \frac{(a\tau)^m}{m!}e^{-a\tau}.$$

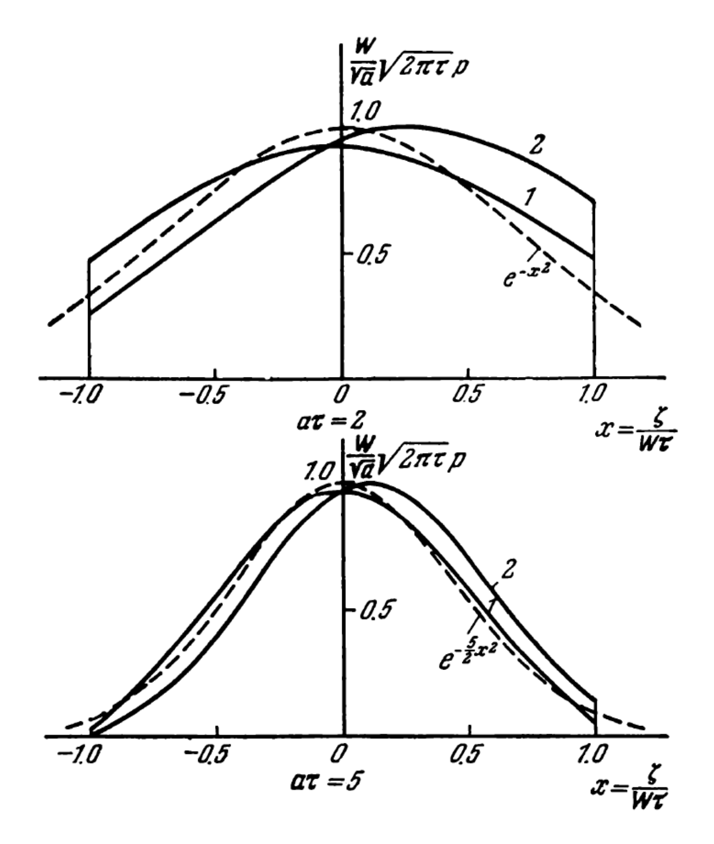


图 81 在$a\tau = 2$和$a\tau = 5$时，具有有限速度的扩散理论得到的分布$p(Z|z,t)$的连续部分和从抛物型扩散方程得到的高斯分布的比较。曲线1对应于方程（10.140）右边当$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1/2$，没有对应的$\delta$函数项；曲线2，同样，当$\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0$；虚线是高斯分布。

如果我们把$n(t_0) = 1, \nu(\tau) = m$条件下$Z(z,t) = Z(z, t_0 + \tau)$的条件概率密度

记作$p_m(\zeta,\tau)$，那么显然

$$p(Z|z,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a\tau)^m}{m!}e^{-a\tau}[\epsilon_1 p_m(\zeta,\tau)+\epsilon_2 p_m(-\zeta,\tau)]. \tag{10.143}$$

这个方程给出了分布（10.140）对多重散射的展开，使用方程（10.140）可以看到，$p_0(\zeta,\tau)=\delta(\zeta-W\tau)$，并且当$m\geq 1$，在$|\zeta|>W\tau$时，函数$p_m(\zeta,\tau)$等于零，在$|\zeta|\leq W\tau$时具有下面的形式：

$$\begin{aligned} p_{2m+1}(\zeta,\tau) &= \frac{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}{m!\sqrt{\pi}}\frac{1}{W\tau}\left(1-\frac{\zeta^2}{W^2\tau^2}\right)^m, \\ p_{2m+2}(\zeta,\tau) &= \frac{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}{m!\sqrt{\pi}}\frac{1}{W\tau}\left(1-\frac{\zeta^2}{W^2\tau^2}\right)^m. \end{aligned} \tag{10.144}$$

当$a\to\infty, W\to\infty, \frac{W^2}{2a}\to K$，分布（10.140）渐近趋向于平均值为零、方差$\frac{W^2\tau}{a}=2K\tau$的正态分布，它是抛物型扩散方程$\frac{\partial p}{\partial\tau}=K\frac{\partial^2 p}{\partial Z^2}$的解。如我们看到的，如果$a$和$W$以及$\frac{W^2}{2a}=K$固定，并且$\zeta$也固定，但$\tau$趋于无穷大，会达到同样的极限。所以，对应足够大的$\tau$，在远离波前$\zeta=\pm W\tau$的$\zeta$，这种描述湍动扩散的方法实际上给出了和基于抛物型方程的普通半经验理论同样的结果。这再一次表明，这个方法实际上是普通半经验理论的推广，它在极限情形包含了后者。

作为具有有限速度的扩散理论在非均匀湍流情形应用的例子，考虑这个理论应用到大气表明层中的垂向扩散。我们从最简单的无分层边界层的情形开始。在对数层极限下，从量纲分析我们有：$W=\lambda u_*, \alpha=\mu u_*/Z$，其中$\lambda$和$\mu$是普适常数。容易看到，含有$a$和$W$的方程（10.138）在$\alpha\to\infty$或$\mu\to\infty, W\to\infty$或$\lambda\to\infty, W^2/\alpha\to 2K$时变为通常的扩散方程$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial Z}K\frac{\partial p}{\partial Z}$。因为$W^2/2a$具有涡扩散系数$K$的含义，我们一定有关系式$\mu=\lambda^2/\kappa$。（为了简单，我们现在假设$\alpha=1$，否则在下面的所有方程中，$\kappa$必须替换为$\kappa_1=\alpha\kappa$。）变换到无量纲变量$\zeta=Z/L, \tau=\lambda u_*(t-t_0)$（其中$L$是一个任意的长度标度），我们可以把方程（10.138）写为这种形式

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2}+\frac{2n}{\zeta}\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\Psi}{\partial\zeta^2} \tag{10.145}$$

其中$n=\lambda/2\kappa=$常量。这里，方便的是选择源的高度H作为用于测量高度Z的标度L，故而无量纲变量(ζ,τ)定义为$\zeta=\frac{Z}{H}$和$\tau=\frac{\lambda u_*(t-t_0)}{H}$。此外，如果$H=0$（表面源的情形），那么最方便的是使用无量纲变量$\zeta=$

Z，$\tau=\lambda u_*(t-t_0)$。我们想用于解$\Psi(\zeta,\tau)$的初始条件可以首先用条件密度函数p_1和p_2表示，它们满足方程（10.135）：

$$p_1(Z|H,t)\to\varepsilon_1\delta(Z-H),p_2(Z|H,t)\to\varepsilon_2\delta(Z-H)\text{对于}t\to t_0,$$

这里ε_1和ε_2是扩散例子初始速度为正的和负的概率，由物理考虑确定。（例如，对应来自一根烟囱的烟雾粒子，自然的是假设$\varepsilon_1=1,\varepsilon_2=0$，而对于从壳层破裂点扩散的气体粒子，$\varepsilon_1=\varepsilon_2=1/2$。）然而，因为方程（10.137）表明

$$\Psi=\int_0^Z(p_1+p_2)dZ\text{以及}\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-W(p_1+p_2),$$

函数Ψ的初始条件可以写为

$$\Psi(\zeta,0)=E(\zeta-1),\left.\frac{\partial\Psi(\zeta,\tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\delta(\zeta-1),\tag{10.146}$$

其中$E(\zeta)$是集中在$\zeta=0$点的概率分布函数，也就是，$\zeta<0$时等于零，$\zeta>0$时等于1的函数。

我们感兴趣的方程（10.144）满足地球表面$Z=0$的外加物反射边界条件的解显然等同于这个方程

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2}+\frac{2n}{|\zeta|}\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\Psi}{\partial\zeta^2}\tag{10.147}$$

在整个空间$-\infty<\zeta<\infty$的解，对应于处了在点H存在一个源，在点$-H$还存在一个对称源。所以我们可以假设

$$\Psi(\zeta,\tau)=\Psi_1(\zeta,\tau)+\Psi_1(-\zeta,\tau),$$

其中$\Psi_1(\zeta,\tau)$时方程（10.146）在整个空间的解，满足初始条件（10.145）。在$H=0$的面源的特殊情形，显然必须在条件（10.145）中假设$\varepsilon_1=1,\varepsilon_2=0$。这里，解$\Psi_1(\zeta,\tau)$变为可能仅依赖于其宗量的比值$\xi=\frac{\zeta}{\tau}=\frac{Z}{\lambda u_*(t-t_0)}$的函数$\Psi_0(\zeta,\tau)$，也就是$\Psi_0(\zeta,\tau)=F(\xi)$。这里，方程（10.146）变为$F(\xi)$的普通二阶微分方程，它对应于我们问题的条件的解具有这种形式

$$\Psi_0(\zeta,\tau)=F(\xi)=\begin{cases}1-()^n, & \text{对于}0\le\xi\le1,\\ 0, & \text{对于}\xi>1\text{或者}\xi<0\end{cases}\tag{10.148}$$

[Monin (1956b)]。于是，外加物浓度$\overline{\vartheta}=\frac{\partial\Psi_0}{\partial Z}$为

$$\overline{\vartheta}(Z,t|0)=\frac{Q}{\kappa u_*\tau}\frac{(1-Z/\lambda u_*\tau)^{n-1}}{(1+Z/\lambda u_*\tau)^{n+1}},0\le Z\le\lambda u_*\tau. \tag{10.149}$$

让我们注意到，根据方程（10.147），$F(1-0)=1$，也就是函数$F(\xi)$在点$\xi=1$是连续的。换句话说，在波前$Z=\lambda u_*\tau$的外加物比例在任何时候都等于零。（这可以由这个事实解释，散射频次$a=\frac{\lambda^2}{2\kappa}\frac{u_*}{Z}$ 在点$Z=0$无限大，所以在点$Z=0$离开源的粒子一定至少经历了一次散射。）波前附近外加物浓度的行为强烈依赖于数值常数$n=\frac{\lambda}{2\kappa}$。当$n<1$，或者$\lambda<2\kappa\approx0.8$，浓度在接近波前时趋向于无穷大，故而后者具有强间断的性质。另一方面，当$n>1$，或者$\lambda>2\kappa\approx0.8$，在靠近波前时浓度趋向于零，而当$n=1$，它趋向于某个有限值。Kazanskiy, Monin (1957)的实验数据[也参见Monin (1959a)]和接近于1的n符合得最好。这些研究者测量了来自穿过风的稳态线源产生的烟雾射流在距离源100米处的外加物浓度的垂向分布。然后，将观测到的分布和不同n的理论曲线$f(\xi)=(1-\xi)^{n-1}(1+\xi)^{-n-1}$进行比较。$n=1$的曲线符合得最好。这个推论看起来不太令人信服，因为它没有考虑风剪切在分散过程中的影响。然而，它和其他已有的估计符合得很好。所以在Kazanskiy, Monin的一个实验中，借助电影摄影术研究了一股烟雾的垂向直径d随时间的增长率。实验曲线$d(t)$和直线$d=2W(t-t_0)$符合得很好，其中$\lambda=W/u_*$值等于0.75，对应于接近于1的$n=\lambda/2K$值。另一方面，可以自然地假设扩散粒子的方均根速度（根据本小节的理论，等于$W=\lambda u_*$）一定和边界层流动典型的欧拉垂向速度σ_w同量级。因为$\sigma_w/u_*\approx0.9$到1.2[见5.3节和8.5节]，我们在此得到$\lambda/2\kappa\approx1$。

为了将有限速度的扩散理论和普通的半经验湍动扩散理论进行比较，应该将方程（10.148）和涡扩散系数为$K=\kappa u_*Z=K_1Z$ 的抛物型扩散方程的解（10.93'）进行比较。κ和$\kappa'=\alpha\kappa$之间的差异显然可以忽略。在$n=1.25$假设下的这种比较在图85中给出，取自Pasquill (1962b)。我们可以看到，对于每个固定的$\tau=t-t_0$，假设平均浓度的分布$\overline{\vartheta}(Z)$在有限速度扩散理论中和在普通半经验理论中，在对应于相对大的浓度值的Z值范围由非常相似的形式。这些分布的根本差异仅在外加物团的前部可以看到。这里，根据有限速度的扩散理论，浓度忽然降到零，而根据普通的理论，它继续光滑下降，在任意大的Z都保持不等于零。

有趣的是比较10.5节中用普通半经验理论得到的拉格朗日统计特征量和相应的有限速度扩散理论的结果。这样的比较可以对半经验理论的精度有个概念。为了简单，让我们假设$n=1$并忽略κ和$\kappa'=\alpha\kappa$之间的差异。根据

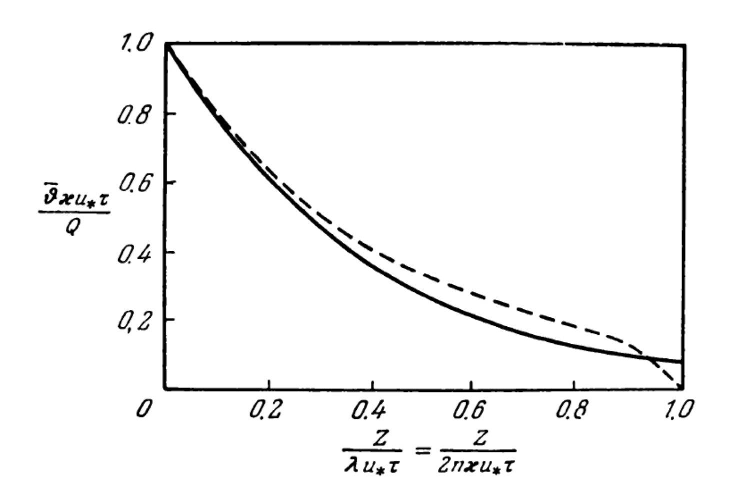


图 82 根据有限速度扩散理论得到的垂向浓度分布（虚线）和由涡扩散系数随高度线性增长的抛物型扩散方程得到的分布的比较（实线）。

方程（10.48），

$$
\begin{aligned}
\langle Z\rangle &= \int_0^\infty Z\overline{\vartheta}(Z,t)dZ\Big/\int_0^\infty \overline{\vartheta}(Z,t)dZ \\
&= \frac{\lambda^2 u_*}{\kappa}\tau\int_0^1 \frac{(1-\xi)^{n-1}}{(1+\xi)^{n+1}}\xi \mathrm{d}\xi \\
&= 4(\ln 2-0.5)\kappa u_*\tau \approx 0.77\kappa u_*\tau \text{当} n=1, \text{也就是} \lambda=2\kappa.
\end{aligned}
\tag{10.150}
$$

我们看到，有限速度的扩散理论得出的拉格朗日方程$\overline{Z}=bu_*\tau$的常数b值[见方程（9.61'）]比普通扩散理论取合理的垂向速度W时的估计值小大约13%。另一方面，如果我们以类似的方式估计$\sigma^2_{\vartheta_Z}=\langle Z-\langle Z\rangle\rangle^2$，我们得到下面的结果：

$$
\begin{aligned}
\sigma^2_{\vartheta_Z} &= \int_0^1 Z^2\overline{\vartheta}(Z,t)dZ\Big/\int_0^1 \overline{\vartheta}(Z,t)dZ-\langle Z\rangle^2 \\
&= \frac{\lambda^3}{\kappa}u_*^2\tau^2\int_0^1 \frac{(1-\xi)^{n-1}}{(1+\xi)^{n+1}}\xi^3 \mathrm{d}\xi-\langle Z\rangle^2 \\
&= [8(1.5-2\ln 2)-16(\ln 2-0.5)^2]\kappa^2u_*^2\tau^2 \approx 0.32\kappa^2u_*^2\tau^2 \text{当} n=1.
\end{aligned}
\tag{10.149'}
$$

我们看到，拉格朗日方程$D_{33}(\tau) = d_{33}u_*^2\tau^2$中常数$d_{33}$的估计值仅为借助普通扩散理论得到的相应值的大约30%，而在选择同样的W值时标准差σ_{ϑ_Z}大约为55%。所以我们一定可以得出结论，普通半经验扩散理论可以用于近似估计边界层中外加物团重心的位置，但它对外加物团的分散会给出严重错误的估计。

当$\lambda \to \infty$，函数（10.54）自然地趋向于函数（10.93'），这时抛物型扩散方程

$$\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Z}\kappa u_* Z\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}$$

的解。在从时刻$t = 0$开始以恒定（单位）速率产生外加物的表面点源的情形，通过将方程（10.148）的解对时间积分可以得到浓度$\overline{\vartheta}_1(Z, t)$。当$t \to \infty$，容易由此得到下面的$1/t$的幂级数展开：

$$\begin{aligned}\overline{\vartheta}_1(Z_2, t) - \overline{\vartheta}_1(Z_1, t) &= \frac{1}{\kappa u_*}\int\limits_{Z_2/\lambda u_* t}^{Z_1/\lambda u_* t}\frac{(1-\xi)^{n-1}}{(1+\xi)^{n+1}}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} \\ &\approx \frac{1}{\kappa u_*}\left(\ln\frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_2 - Z_1}{\kappa u_* t} + ...\right).\end{aligned} \tag{10.151}$$

这个方程使得可以计算浓度分布接近对数分布（对应于稳态面源）的速率。

在任意高度H的高架源的情形，方程（10.146）相应初值问题的解可以用一般的求解二阶双曲型微分方程的黎曼方法得到。一般来说，这个解时非常复杂的。它是超几何函数复杂组合的积分，见Monin (1956b)。然而，在某些情形，它可以极大地简化。这类例子可以在Monin (1955, 1956b)中找到。然而，我们在本书中不会详细讨论它们。

让我们简单考虑热分层边界层中的有限速度扩散。这里，浓度分布$\overline{\vartheta}_1(Z, t)$必须根据$\overline{\vartheta} = \frac{\partial\Psi}{\partial Z}$定义，其中$\Psi = \Psi(Z, t)$是相应的合适边界条件下电报方程（10.138）的解。下面我们将仅使用$Z = 0$处外加物的反射边界条件以及对应于在$t - t_0$时刻在点$(0, 0, H)$存在一个单位输出速率的瞬时外加物点源的初始条件。基于第4章发展的相似性原理，我们可以预期，速度量纲的系数W和频率量纲的a在这里可以表示为这种形式

$$W = \lambda u_*\varphi_1\left(\frac{Z}{L}\right), a = \frac{u_*}{Z}\varphi_2\left(\frac{Z}{L}\right), \tag{10.152}$$

其中L是方程（7.12）定义的长度标度，φ_1和φ_2是无量纲普适函数，λ是为了方便引入的数值常数，它使得可以对函数$\varphi_1(\zeta)$施加额外的限制$\varphi_1(0) = 1$。（在此情形，λ具有和上面一样的意义，也就是，它表示W/u_*在$\frac{Z}{L} \to 0$的极限值，或者中性分层时的W/u_*。）因为我们的扩散理论已经是近似的，参考额外的半经验性质的近似表达式来确定函数$\varphi_1(\zeta)$和$\varphi_2(\zeta)$是合理的。例如，这可以像下面这样进行。我们以半经验方程$K = u_* l(1 - \sigma\mathrm{Rf})^{1/4}$为基础[见第6节]。如果，此外，我们假设$K \sim Wl$，那么我们得到

$$W \sim u_*(1 - \sigma\mathrm{Rf})^{\frac{1}{4}}\text{也就是}\varphi_1(\zeta) = \left[1 - \frac{\sigma}{f'(\zeta)}\right]^{\frac{1}{4}},$$

其中$f(\zeta)$是大气表面层中风分布的普适函数。显然我们使用这个事实，在稳态情形，方程

（10.136）具有这种形式

$$q = \text{常量}, 2aq = -W\frac{\partial W\overline{\vartheta}}{\partial Z}, \tag{10.153}$$

其中q是垂向外加物流量。对于中性分层，$W = \lambda u_* = $常量。所以，方程（10.152）第二个方程右边这里可以写为$-W^2\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}$。严格来说，在一般情形不是这样的。然而，可以期望这里对$-W^2\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}$项相应的修正相对较小，不重要。于是，作为一级近似，可以假设：

$$\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z} = -\frac{2aq}{W^2} = -\frac{2q}{\lambda^2 u_* Z}\frac{\varphi_2(\zeta)}{\varphi_1(\zeta)}.$$

另一方面，忽略外加物涡扩散系数和涡黏滞系数之间的可能差异，根据相似性理论，稳态浓度分布的梯度等于

$$\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z} = -\frac{q}{\kappa u_* Z}\zeta f'(\zeta).$$

比较$\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial Z}$的两个表达式并使用方程（10.151'），我们得到

$$\varphi_2(\zeta) = \frac{\lambda^2}{2\kappa}\zeta f'(\zeta)\left[1 - \frac{\sigma}{f'(\zeta)}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{10.154}$$

有一个已知函数$f(\zeta)$和一个已知常数σ（可以认为对稳定和不稳定分层假设不同的值）的方程（10.150）、（10.151'）和(10.153) 完全确定了具有任意分层的大气表面层中扩散的电报方程（10.138）的系数的形式。这里，对应于把电报方程替换为普通抛物型扩散方程的极限$a \to \infty, W \to \infty, \frac{W^2}{2a} \to K = $常量显然等价于$\lambda \to \infty$的极限。

使用上面的方程并变换到无量纲变量$\zeta = \frac{Z}{L}$和$\tau = \frac{\lambda u_*(t-t_0)}{L}$，我们可以把方程（10.138）转化为这种形式

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2} + \frac{2n}{g(\zeta)}\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2}, \tag{10.155}$$

其中$n = \frac{\lambda}{2\kappa}$，而变量$\xi$和函数$g(\xi)$由下面的方程确定：

$$\xi = \int_0^{\zeta}\left[1 - \frac{\sigma}{f'(\zeta)}\right]^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}\zeta, g = \frac{1}{f'(\zeta)}\left[1 - \frac{\sigma}{f'(\zeta)}\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{10.156}$$

函数$f(\zeta)$和$g(\zeta)$一级变量$\xi = \xi(\zeta)$对中性、稳定和不稳定分层由不同的形式。上面考虑了中性分层的情形，这里在所有前面的方程中必须取$L \to \infty$或$\zeta = \frac{Z}{L} \to 0$的极限。然而，对于小的$|\zeta|$，$f'(\zeta) \approx \frac{1}{\zeta}, \xi \approx \zeta$。所以，这里假设方程（10.154）具有（10.144）的形式。在稳定分层下，例如，对于$f(\zeta)$我们可以使用插值公式

$$f(\zeta) \approx \ln\zeta + C_2\zeta,$$

其中$C_2 = 1/\mathrm{Rf}_{\mathrm{cr}} = \sigma$。在不稳定分层情形，对于大的$\zeta$，我们有$f'(\zeta) \sim \zeta^{-\frac{4}{3}}$。然而，这里我们不停留在对分层边界层情形的分析，我们仅谈到，与中性分层情形的主要不同在于方程中函数$g(\xi)$的形式，这依赖于分层的情形。

参考文献[6]

Abramovich, G. N., (1963) *The Theory of Turbulent Jets.* Trans, by Scripta Technica. Techn. ed. L. H. Schindel. Cambridge, Mass. M.I.T. Press.

Akhiezer, N. I., (1965) *The Classical Moment Problem and some Related Questions in Analysis.* Trans, by N. Kemmer. Edinburgh, Oliver and Boyd.

Allen, C. M., and E. A. Taylor, (1923) *The salt velocity method of water measurement.* Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs., 55, 285-341.

Appleby, J. F., and W. D. Ohmstede, (1965) *Numerical solution of the distribution of wind and turbulence in the planetary boundary layer*, Proc. Army Sci. Conf. , 1964, Vol. 1, Washington, 85-99.

Aris, R., (1956) *On the dispersion of a solute in a fluid flowing through a tube*, *Proc. Roy. Soc.*, A235, No. 1200, 67-77.

Arnol'd, V. 1., (1965a) Conditions for the nonlinear stability of the plane stationary curvilinear flows of an ideal fluid, *Doklady AN SSSR*, 162, No. 5, 975-978. (1965b) Variational principle for three-dimensional stationary flows of an ideal fluid, *Prikl. Mat. i Mekh.*, 29, No. 5, 848-851. (1966a) On one *a priori* estimate of the theory of hydrodynamic stability, *Izvestiya Vuzov*, Ser. Mat., No. 5(54), 3-5. (1966b) Sur un principe variationnel pour les écoulements stationnaires des liquides parfaits et ses applications aux problemes de stabilte non linéaires, *J. Mécan.*, 5, No. 1, 29-43.

Bakewell, H. P., and J. L. Lumley, (1967) Viscous sublayer and adjacent wall region in turbulent pipe flow, *Phys. Fluids*, 10, No. 9, 1880-1889.

Baldwin, L. W., and W. R. Mickelsen, (1962) Turbulent diffusion and anemometer measurements, *J. Eng. Mech.*, 88, No. 1, 37-69; discussion, 151-153.

Barad, M. L., (1958) Project Prairie Grass, a field program in diffusion, Vols. 1-2, *Geophys. Res. Pap.*, No. 59, Cambridge, Mass; (1959) Analysis of diffusion studies at O'Neill, *Adv. Geophys.*, 6(Atmospheric diffusion and air pollution), 389-398; (1963) Examination of a wind profile proposed by Swinbank, *J. Appl. Meteor.*, 2, No. 6, 747-754.

Barad, M. L., and D. A. Haugen (1959) A preliminary evaluation of Sutton's hypothesis for diffusion from a continuous point source, *J. Meteorol.* 16, No. 1, 12-20.

[6]过去十年间，很多俄文杂志已经被从头到尾翻译了。对某篇翻译文章感兴趣的读者应该询问图书管理员。

Barenblatt, G. I., (1953) Motion of suspended particles in a turbulent flow, *Prikl Matem. Mekh.*, 17, No. 3, 261-274; Motion of suspended particles in a turbulent flow occupying a half-space or plane channel of finite depth, *Prikl. Matem. Mekh.*, 19, No. 1, 61-68.

Barnes, H. T., and E. G. Coker, (1905) Experiments on streamline motion and the measurements of critical velocity, *Proc. Roy. Soc. London*, 74, No. 503, 341-356.

Batchelor, G. K., (1949a) The role of big eddies in homogeneous turbulence, *Proc. Roy. Soc.*, A195, No. 1043, 513-532; (1949b) Diffusion in a field of homogeneous turbulence, *Austr. J. Sci. Res.*, A2, No. 4, 437-450; (1957) Diffusion in free turbulent shear flows, *J. Fluid Mech.*, 3, No. 1, 67-80; (1959) Diffusion from sources in a turbulent boundary layer (unpublished manuscript); (1964) Diffusion from sources in a turbulent boundary layer, Arch. Mech. Stosowanej, 16, No. 3, 661-670; (1967) *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge, the University Press.

Batchelor, G. K., and A. E. Gill, (1962) Analysis of the stability of axisymmetric jets, *J. Fluid Mech.*, 14, No. 4, 529-551.

Batchelor, G. K., and A. A. Townsend, (1956) Turbulent diffusion. *Surveys in Mechanics*, (G. K. Batchelor and R. M. Davies, eds.) Cambridge, the University Press, 352-399.

Batchelor, G. K, A. M. Binnie, and O. M. Phillips, (1955) The mean velocity of discrete particles in turbulent flow in a pipe. *Proc. Phys. Soc.*, B68, No. 432, 1095-1104.

Beguier, C., (1965) Mesures des tensions de Reynolds dans un écoulement dissymétrique en régime turbulent incompressible, *J. Mécan.*, 4, No. 3, 319-334.

Belyakova, V. K., (1950) Stability of a viscous fluid flow in a straight circular tube, *Prikl. Matem. Mekh.*, 14, No. 1, 105-110.

Benney, D. J., (1961) A nonlinear theory for oscillations in a parallel flow, *J. Fluid Mech.*, 10, No. 2, 209-236; (1964) Finite-amplitude effects in an unstable laminar boundary layer. *Phys. Fluids*, 7, No. 3, 319-326.

Berlyand, M. E., (1947) Theory of variation of wind with height, Trudy Nauchno-Issl. Uchr. Glavn. Upr. Gidrometeluzhby (Proc. Hydrometeorological Sci. Institutes), ser. 1, No. 25, 16-67.

Berlyand, M. E., E. L. Genikhovich, V. P. Lozhkina, and R. 1. Onikul, (1963) Numerical solution of equations of turbulent diffusion, and calcula-

tions of atmospheric contamination near industrial enterprises, Trudy Gl. Geoflz. Observ. (Proc. Main Geophys. Observ., Leningrad), No. 138, 3-17; (1964) Numerical investigation of atmospheric diffusion under normal and abnormal stratification conditions, Trudy Gl. Geoflz. Observ. (Proc. Main Geophys. Observ., Leningrad), No. 158, 22-31.

Berlyand, M. E., and R. L Onikul, (1968) Physical basis of the calculation of atmospheric dispersion of industrial air contaminations, Trudy Glavn. Geofiz. Observ. (Proc. Main Geophys. Observ., Leningrad), No. 234, 3-27.

Bernstein, A. B., (1966) An examination of three wind profile hypotheses, *J. Appl. Meteor.*, 5, No. 2, 217-219.

Best, A. C., (1935) Transfer of heat and momentum in the lowest layers of the atmosphere, *Geophys. Mem,*, 7, No. 65.

Betchov, R., (1960) On the mechanism of turbulent transition, *Phys. Fluids*, 3, No. 6, 1026-1027.

Betchov, R., and W. O. Criminale, Jr., (1967) *Stability of Parallel Flows*, Academic Press, New York-London; (1966) Spatial instability of the inviscid jet and wake, *Phys. Fluids*, 9, No. 2, 359-362.

Betchov, R., and A. Szewczyk, (1963) Stability of shear layer between parallel streams, *Phys. Fluids*, 6, No. 10, 1391-1396.

Birikh, R. V., (1966) On small disturbances of the plane-parallel flow with cubic volocity profile, *Prikl. Mat. Mekh.*, 30, No. 2, 356-361; (1965) Spectrum of small perturbations of a plane-parallel Couette flow, *Prikl. Mat. Mekh.*, 29, No. 4, 798-800.

Birkhoff, G., (1962) Helmholtz and Taylor instability, *Proc. Symp. Appl. Math.*, 13(Hydrodynamic instability), 55-76.

Birkhoff, G., and J. Kampé de Fdriet, (1962) Kinematics of homogeneous turbulence, D. Metric transitivity, 7. Math. Mech., 11, No. 3, 319-340.

Birkhoff, G., and E. H. Zarantonello, (1957) *Jets, Wakes and Cavities*, Academic Press, N. Y.

Bisshopp, F. E., (1962) Nonlinear effects in thermal convection, *J. Math, and Mech.*, 11, No. 5, 647-663.

Bjorgum, O., (1953) On the velocity, temperature and humidity profiles, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 79, No. 339, 84-93.

Blackadar, A. K., (1962) The vertical distribution of wind and turbulent

exchange in a neutral atmosphere, *J. Geophys. Res.*, 67, No. 8, 3095-3102.

Blackadar, A. K., (1967) External parameters of the wind flow in the barotropic boundary layer of the atmosphere, in: *Global Atmospheric Research Programme* (Rep. Study Conf., Stockholm, 28Ju n e-11July 1967), Stockholm, IV. 1IV. l l .

Blasius, H., (1913) Das Ahnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in F'liissigkeiten. *Forschungsarbeiten des Ver. Deutsch. Ing.* No. 131, Berlin.

Blinova, E. N., and I. A. Kibel, (1937) The application of the turbulence theory to the height distribution of the temperature and wind velocity, in: *Dynamical Meteorology* (ed. by B. I. Izvekov and N. E. Kochin), Vol. 2, Gidrometeoizdat Press, Leningrad-Moscow, 28-36.

Blom, J., and D. A. DeVries, (1968) On the value of turbulent Prandtl number, in: *Heat and Mass Transfer*, Proc. 3rd All Soviet Union Conf. (ed. by A. V. Lykov and B. M. Smol'skiy), Vol. 1, Energiya Press, Moscow, 147-154.

Bobyleva, 1. M., S. S. Zilitinkevich, and D. L. Laykhtman, (1967) Turbulent exchange in the thermally stratified atmospheric planetary boundary layer, in: *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation* (ed. by A. M. Yaglom and V.I. Tatarskiy), Nauka Press, Moscow, 179-190.

Bochner, S., (1933) Monotone Funktionen, Stieltjessche Integrale und harmoniche Analyse, *Math. Ann.*, 108, No. 3, 378-410. (For English translation, see Bochner, 1959.) (1959) *Lectures on Fourier Integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J.

Borkowski, J., (1964) The wind profile and turbulent diffusion in a stable surface layer of the atmosphere, *Acta Geophys. Polonica*, 12, No. 4, 199-205.

Bosanquet, C. H., and J. L. Pearson, (1936) The spread of smoke and gases from chimneys, *Trans. Faraday Soc.*, 32, No. 8, 1249-1263.

Bourret, R. C., (1961) Turbulent diffusion in two and three dimensions by the random-walk model with memory, *Canad. J. Phys.*, 39, No. 1, 133-140.

Boussinesq, J., (1877) Essai sur la theorie des eaux courantes, *Mém. prés, par div. savants á l'Acad. Sci*, Paris,23, No. 1, 1-680; (1897) Théorie de I'écoulement tourbillonnant et tumultueux des Hquides dans les lits rectilignes á grande section, I-II , Gauthier-Villars, Paris.

Bovsheverov, V. M., and V. P. Voronov, (1960) An acoustic anemome-

ter, *Izvestiya AN SSSR, ser. geofiz.*, No. 6, 882-885.

Bovsheverov, V. M., A. S. Gurvich, M. I. Mordukhovich, and L. R. Tsvang, (1962) Instruments for measuring temperature and wind-velocity fluctuations, and statistical analysis of the results of measurements. Collection: Atmospheric Turbulence, *Trudy Inst. Fiz. Atmos. AN SSSR* Proc. of Inst. Phys. Atmosph. Acad. Sci. USSR), No. 4, 21-29.

Bovsheverov, V. M., A. S. Gurvich, V. I. Tatarskiy, and L. R. Tsvang, (1959) Instruments for the statistical analysis of turbulence, *Trudy Soveshch. Issled. Mertsaniya Zvezd* (Proc. of Conference on Stellar Scintillation), Acad. Sci. Press, Moscow, 26-32.

Bovsheverov, V. M., A. S. Gurvich, and L. R. Tsvang, (1959) Direct measurements of turbulent heat flow in the atmospheric surface layer. *Doklady AN SSSR*, 125, No. 6, 1242-1245.

Bradley, E. F., (1968) A shearing-stress meter for micrometeorological studies. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 94, No. 401, 380-387.

Browand, F. K., (1966) An experimental investigation of the instability of an incompressible separated shear layer, *J. Fluid Mech.*, 26, No. 2, 281-307.

Brummage, K. G., (1968) The calculation of atmospheric dispersion from a sidiok, *Atmosph. Environment*, 2, No. 3, 197-224.

Brundrett, E., W. D. Baines, J. Peregrym, and P. R. Burroughs, (1965) Inner and outer law descriptions of temperature and velocity in two- and threedimensional boundary layers, AGARDograph 97, Part 2.

Brushlinskaya, N. N., (1965) Behavior of solutions of hydrodynamical equations when the Reynolds number crosses the critical one, *Doklady AN SSSR*, 162, No. 4, 731-734.

Budyko, M. I., (1946) Distribution of meteorological variables in the atmospheric surface layer, *Izvestiya AN SSSR*, ser. geogr. i geofiz., 10, No. 4, 317-329; (1948) *Evaporation Under Natural Conditions*, Gidrometeoizdat Press, Leningrad.

Burns, J. G., W. H. J. Childs, A. A. Nicol, and M. A. S. Ross, (1959) Development and use of a vane device for boundary-layer measurements , *J. Fluid Mech.*, 6, No. 1, 97-112.

Burton, R. A., (1965) A simple universal velocity profile equation, *A.I.A.A.J.*, 3, No. 4, 784-785.

Busch, N. E., (1965) A note on the similarity hypothesis for wind pro-

files, *Danish Atomic Energy Commission*, RisøReport No. 100, 1-26.

Busch, N. E., J. A. Frizzola, and I. A. Singer, (1968) The micrometeorology of the turbulent flow-field in the atmospheric surface boundary layer, Acta Polytechn. Scandinavica, *Phys. incl. Nucleonics Ser.*, No. 59, 1-45.

Busch, N. E., and H. A. Panofsky, (1968) Recent spectra of atmospheric turbulence. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 94, No. 400, 132-148.

Businger, J. A., (1955) On the structure of the atmospheric surface layer, *J. Meteor.*, 12, No. 6, 553-561; (1959) A generalization of the mixing-length concept, *J. Meteor.*, 16, No. 5, 516-523; (1966) Transport of momentum and heat in the planetary boundary layer, *Proc. Sympos. Arctic Heat Budget and A tmosph. Circul.* (Memo RM-5233-NSF, Rand Corp.), 305-332.

Businger, J. A., M. Miyake, A. J. Dyer, and E. F. Bradley, (1967) On the direct determination of the turbulent heat flux near the ground, *J. Appl. Meteorol.*, 6, No. 6, 1025-1032.

Busse, F. H., (1967a) Nonstationary finite amplitude convection, *J. Fluid Mech.*,28, 2, 223-239; (1967b) On the stability of two-dimensional convection in a layer heated from below, *J. Math, and Phys.*, 46, No. 2, 140-150; (1967c) The stability of finite amplitude cellular convection and its relation to an extremum principle, *J. Fluid Mech.*, 30, No. 4, 625-649.

Bysova, N. L., and G. B. Mashkova, (1966) Dimensionless characteristics of the wind velocity according to measurements in the lower 300-meter atmospheric layer, *Izvestiya AN SSSR, ser. fiz. atm. okeana*, 2, No. 7, 681-687.

Byutner, E. K., and D. L. Laykhtman, (1963) Dispersion of passive particles from a point source in an inhomogeneous medium, *Trudy Leningr. Gidromet. In-ta* (Proc. Leningr. Hydrometeor. Inst.) No. 15, 130-136.

Calder, K. L., (1949) Eddy diffusion and evaoporation in flow over aerodynamically smooth and rough surfaces: a treatment based on laboratory laws of turbulent flow with special reference to conditions in the lower atmosphere. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 2, No. 2, 153-176; (1961) Atmospheric diffusion of particulate material, considered as a boundary-value problem, *J. Meteor.*, 18, No. 3, 413-416; (1965) On the equation of atmospheric diffusion, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 91, No. 390, 514-517.

Capriz, G., G. Ghelardoni, and G. Lombardi, (1966) Numerical study of the stability problem for Couette flow, *Phys. Fluids*, 9, No. 10, 1934-1936.

Carr, A. D., (1962) The transport of heat in a fluid in turbulent pipe flow. *Reactor*, 1, 6-14.

Carrier, G. F., and F. D. Carlson, (1946) On the propagation of small disturbances in a moving compressible fluid, *Quart. Appl. Math.*, 4, No. 1, 1-12.

Case, K. M., (1960a) Stability of inviscid plane Couette flow, *Phys. Fluids*, 3, No. 2, 143-149; (1960b) Stability of an idealised atmosphere. I. Discussion of results, *Phys. Fluids*, 3, No. 2, 149-155; (1960c) Taylor instability of an inverted atmosphere, *Phys. Fluids*, 3, No. 3, 366-368; (1961) Hydrodynamic stability and the inviscid limit, *J. Fluid Mech.*, 10, No. 3, 420-429; (1962) Hydrodynamic stability and the initial value problem, *Proc. Symp. Appl. Math.*, 13(Hydrodynamic instability), 25-33.

Cattaneo, C., (1948-1949) Sulla conduzione del calore, *Atti sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, 3, 83-101; (1958) Sur une forme de I'équation de la chaleur eliminant le paradoxe d'une propagation instance, *Compte Rend. Acad. Sci.*, 247, No. 4, 431-433.

Catton, I., (1966) Natural convection in horizontal liquid layers, *Phys. Fluids*, 9, No. 12, 2521-2522.

Cavers, S. D., N. Y. Hsu, W. G. Schlinger, and B. H. Sage, (1953) Temperature gradients in turbulent gas streams. Behavior near boundary in two-dimensional flow, *Ind. Eng, Chem.*, 45, No. 9, 2139-2145.

Cermak, J. E., (1963) Lagrangian similarity hypothesis applied to diffusion in turbulent shear flow, *J. Fluid Mech.*, 15, No. 1, 49-64.

Cermak, J. E., and H. Chuang, (1967) Vertical-velocity fluctuations in thermally stratified shear-flows, in: *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation* (ed. by A. M. Yaglom and V. I. Tatarskiy), Nauka Press, Moscow, 93-104.

Cermak, J. E., V. A. Sandborn, E. J. Plate, G. H. Binder, H. Chuang, R. N. Meroney, and S. I to, (1966) Simulation of atmospheric motion by wind-tunnel flows. Fluid Dynamics and Diffusion Lab., Colorado State Univ.,Techn. Rep. CER66JEC-VAS-EJP-GJB-HC-RNM-SI17, 101pp.

Chalikov, D. V., (1968) On wind-velocity and temperature profiles in atmospheric surface layer with stable stratification, *Trudy Glavn. Geofiz. Observ*, (Proc. Main Geophys. Observ., Leningrad), No. 207, 170-173.

Chamberlain, A. C., (1966) Transport of gases to and from grass and grass-like surfaces, *Proc. Roy. Soc.*, A290, No. 1421, 236- 265; (1968)

Transport of gases to and from surfaces with bluff and wave-like roughness elements, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 94, No. 401, 318-332.

Chandrasekhar, S., (1943) Stochastic problem in Physics and astronomy, *Rev. Mod. Phys.*, 15, No. 1, 1-89; (1953) The stability of viscous flow between rotating cylinders in the presence of a magnetic field, *Proc. Roy. Soc.*, A216, No. 1126, 293-309; (1954) The stability of viscous flow between rotating cylinders, *Mathematika*, 1, 5-13; (1958) The stability of viscous flow between rotating cylinders, *Proc. Roy. Soc.*, 246, No. 1246, 301-311; (1960) The stability of inviscid flow between rotating cylinders, *J. Indian Math. Soc*, (N, S.), 24, 211-221; (1961) *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Clarendon Press, Oxford.

Chandrasekhar, S., and D. D. Elbert, (1962) The stability of viscous flow between rotating cylinders. II. *Proc. Roy. Soc.*, A268, No. 1333, 145-152.

Chapman, D. R., and R. H. Kester, (1953) Measurements of turbulent skin friction on cylinders in axial flow at subsonic and supersonic velocities, *J. Aeronaut. Sci.*, 20, No. 7,441-448.

Chapman, S., and T. G. Cowling, (1952) *The Mathematical Theory o f Non-uniform Gases*, Cambridge Univ. Press.

Charnock, H., (1958a) Meteorology, *Sci. Progress*, 46, No. 183, 470-487; (1958b) Physical oceanography, *Sci. Progress*, 46, No. 183, 487-501; (1967a) Comments on "An examination of three wind-profile hypotheses," *J. Appl. Meteor.*, 6, No. 1, 211-212; (1967b) Flux-gradient relations near the ground in unstable conditions. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 93, No. 395, 97-100.

Charnock, H., and T. H. Ellison, (1959) Fluctuations of temperature and humidity at 134m over the sea, Deutsch. *Hydrograph. Zs.*, 12, No. 4, 171-180.

Chatwin, P. C., (1968) The dispersion of a puff of passive contaminant in the constant stress region. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 94, No. 401, 350-360.

Chen, M. M., and J. A. Whitehead, (1968) Evolution of two-dimensional periodic Rayleigh convection cells of arbitrary wave-numbers, *J. Fluid Mech.*, 31, No. 1, 1-15.

Chen, T. S., D. D. Joseph, and E. M. Sparrow, (1966) Evaluation of Tietjens function in stabiHty calculations, *Phys. Fluids*, 9, No. 12, 2519-

2521.

Chen, T. S., and E. M. Sparrow, (1967) Stability of the developing laminar flow in a parallel-plate channel, *J. Fluid Mech.*, 30, No. 2, 209-224.

Chilton, T. H., and A. P. Colburn, (1934) Mass transfer (absorption) coefficients, *Ind. Eng. Chem.*, 26, No. 11, 1183-1187.

Chou, P. Y. (1945a) On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuation. *Quart. Appl. Math.*, 3, No. 1, 38-54; (1945b) Pressure flow of a turbulent fluid between parallel planes. *Quart. Appl. Math.*, 3, No. 3, 198-209; (1947) Turbulent flow along a semi-infmite plane. *Quart. Appl. Math.*, 5, No. 3, 346-353.

Christopherson, D. G., (1940) Note on the vibration of membranes, *Quart. J. Math.*, 11, No. 1,63-65.

Chu, B. T., and L. S. G. Kovasznay, (1958) Nonlinear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas, *J. Fluid Mech.*, 3, No. 5, 494-514.

Chun, D. G., and W. H. Schwartz, (1967) Stability of the plane incompressible viscous wall jet subjected to small disturbances, *Phys. Fluids*, 10, No. 5, 911-915.

Clauser, F. H., (1956) The turbulent boundary layer. *Adv. Appl. Mech.*, 4, N. Y., 1-51.

Coantic, M., (1965) Remarques sur la structure de la turbulence a proximite d'une paroi, *Compte Rend. Acad. Sci.*, 260, No. 11, 2981-2984; (1966) Contribution a I'étude de la structure de la turbulence dans une conduite de section circulaire, These doctorat d'état és sciences physiques, Univ. d'Aix-Marseille, Marseille; (1967a) Évolution, enfonction du nombre de Reynolds, de la distribution des vitesses moyennes et turbulentes dans une conduite, *Compte Rend. Acad. Sci*, 264, No. 19, A849-A852; (1967b) Quelques resultats nouveaux sur la structure de la turbulence dans la sous-couche visqueuse, *Compte Rend. Acad. Sci*, 264, No. 20, A967-A970.

Coles, D., (1955) The law of the wall in turbulent shear flow, 50Jahre Grenzschichtforschung, Vieweg, Braunschweig, 153-163; (1956) The law of the wake in turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, 1, No. 3, 191-226; (1962) Interface and intermittency in turbulent shear flow, *Mecanique de la turbulence* (Coll. Intern, du CNRS a Marseille, Paris, Ed. CNRS, 229-248; (1965) Transition in circular Couette flow, *J. Fluid Mech.*, 21, No. 3, 385-425.

Coles, D., and C. W. Van Atta, (1967) Digital experiments in spiral

turbulence, *Phys. Fluids*, 10, Supplement, S120-S121.

Collis, D. C., (1948) The diffusion process in turbulent flow, *Austr. CouncilSci. Ind. Res., Div. Aero.*, Rep. A55.

Comolet, R., (1950) Recherches sur la genése de la turbulence dans les conduite.s en charge, *Publ. Sci. Techn. Min. Air*, No. 246, Paris.

Comte-Bellot, G., (1963) Coefficients de dissymetrie et d'aplatissement, spectres et cordations en turbulence de conduite, *J. Mécanique*, 2, No. 2, 105-128; (1965) Ecoulement turbulent entre deux parois paralléles, *Publ. Sci. Techn. Min. Air*, No. 419, Paris.

Corcoran, W. H., F. Page, W. G. Schinger, and B. H. Sage, (1952) Gradients in turbulent gas streams, *Ind. Eng. Chem.*, 44, No. 3, 410-430.

Corcos, G. M., and J. R. Sellars, (1959) On the stability of fully developed flow in a pipe, *J. Fluid Mech.*, 5, No. 1, 97-112.

Corrsin, S., (1943) Investigation of flow in an axially symmetric heated jet of air, *Nat. Adv. Com. Aeronaut.*, Wartime Report W-94; (1959a) Outline of some topics in homogeneous turbulent flow, *J. Geophys. Res.*, 64, 12, 1234- 2150; (1959b) Progress report on some turbulent diffusion research. *Adv. Geophys.*, 6(Atmospheric diffusion and air pollution), 161-164; (1962) Theories of turbulent Mechanique de la turbulence (Coll. Intern, du CNRS a Marseille), Paris, Ed. CNRS, 27-52; (1963) Estimates of the relations between Eulerian and Lagrangian scales in large Reynolds number turbulence, *J. Atmosph. Sci.*, 20, No. 2, 115-119; (1963) *Turbulence: Experimental Methods*, Handbuch der Physik, Vol. VIII/2, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 525-590.

Corrsin, S., and A. L. Kistler, (1955) The free-stream boundaries of turbulent flows, *Nat. Adv. Com. Aeronaut.*, Rep. No. 1244.

Corrisin, S., and M. S. Uberoi, (1950) Further experiments on the flow and heat transfer in a heated turbulent air jet, Nat. Adv. Com. Aeronaut., Rep. No. 998; (1951) Spectra and diffusion in a round turbulent jet, *Nat. Adv. Com. Aeronaut*, Rep. No. 1040.

Cramer, H. E., (1967) Turbulent transfer processes for quasi-homogcneous flows within the atmospheric surface layer, *Phys. Fluids*, 10, Supplement, S240-S246.

Cramer, H. E., and F. A. Record, (1953) The variation with height of the vertical flux of heat and momentum, *J. Meteor.*, 10, No. 3, 219-226.

Crawford, T. V., (1965) Moisture transfer in free and forced convection.

Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 91, No. 387, 18-27.

Criminale, W. O., Jr., (1967) Interaction of the laminar boundary layer with free-stream turbulence, *Phys. Fluids*, 10, Supplement, S101-S107.

Criminale, W. O. , Jr., and L. S. G. Kovasznay, (1962) The growth of localized disturbances in a laminar boundary layer , *J. Fluid Mech.*, 14, No. 1, 59-80.

Crocco, L., (1965) Turbulent boundary layer and mixing coefficient, *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, 13, No. 1, 206-215.

Crow, S. C., (1968) Viscoelastic properties of fine-grained incompressible turbulence, *J. Fluid Mech.*, 33, No. 1, 1-20.

Csanady, G. T., (1967a) Concentration fluctuations in turbulent diffusion, / Atmosph. Sci., 24, No. 1, 21-28; (1967b) Variance of local concentration fluctuations, Phys. Fluids, 10, Supplement, S76-S78; (1967c) On the "resistance law" of a turbulent Ekman layer, *J. Atmosph. Sci.*, 24, No. 5, 467-471.

Csanady, G. T., G. R. llilst, and N. E. Bowne, (1968) Turbulent diffusion from a cross-wind line source in shear flow at Fort Wayne, *Indiana, Atmosph. Environment*, 2, No. 3, 273-292.

Curie, N., (1956) On hydrodynamic stability in unlimited fields of viscous flow, *Proc. Roy. Soc.*, A238, No. 1216, 489-501.

Darcy, H., (1858) Recherches experimentales relatives aux mouvement de I'eau dans les tuyaux, *Mém. Sav. Etrang. Acad. Sci.*, 15, 265-342.

Davey, A., (1962) The growth of Taylor vortices in flow between rotating cylinders , *J. Fluid Mech.*, 14, No. 3, 336-368.

Davey, A., R. C. Di Prima, and J. T. Stuart, (1968) On the instability of Taylor vortices, *J. Fluid Mech.*, 31, No. 1, 17-52.

Davidson, B., and M. L. Barad, (1956) Some comments on the Deacon wind profile, *Trans. Am. Geophys. Union*, 37, No. 2, 168-176.

Davies, D. R., (1950) Three-dimensional turbulence and evaporation in the lower atmosphere, I- II, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 3, No. 1, 51-63, 64-73; (1954a) On diffusion from a continuous point source at ground level into a turbulent atmosphere, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 7, No. 2, 168-178; (1954b) A note on the two-dimensional equation of diffusion in the atmosphere. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 80, No. 345, 429-434.

Davies, R. W., (1954) The connection between the Smoluchowski equation and the Kramers-Chandrasekhar equation, *Phys. Rev.*, 93, No. 6,

1169-1171.

Davies, S. J., and C. M. White, (1928) An experimental study of the flow of water in pipes of rectangular section, *Proc. Roy. Soc.*, A 119, No. 781, 92-107.

Davis, S. H., (1968) Corvection in a box: on the dependence of preferred wave-number upon the Rayleigh number at finite amplitude, *J. FluidMech.*, 32, No. 3, 619-624.

Davis, S. H., and L. A. Segel, (1968) Effccts of surface curvature and property variation on cellular convection, *Phys. Fluids*, 11, No. 3,470-476.

Davydov, B. I., (1935) Diffusion equation with allowance for molecular velocity, *Doklady AN SSSR*, 2, No. 7, 474-478; (1958) Phenomenologic equations of statistical dynamics of an incompressible turbulent fluid, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 35, No. 2(8), 527-529; (1959a) Statistical dynamics of an incompressible turbulent fluid, *Doklady AN SSSR*, 127, No. 4, 768-771; (1959b) Statistical theory of turbulence, *Doklady AN SSSR*, 127, No. 5, 980-982; (1961) Statistical dynamics of an incompressible turbulent fluid, *Doklady AN SSSR*, 136, No. 1, 47-50.

Deacon, E. L., (1949) Vertical diffusion in the lowest layers of the atmosphere, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 75, No. 323, 89-103; (1955) The turbulent transfer of momentum in the lowest layers of the atmosphere, *C. S. I. R. O., Div. Meteor. Phys.*, Techn. Pap. No. 4, Melbourne; (1959) The measurements of turbulent transfer in the lower atmosphere. *Adv. Geophys.*, 6 (Atmospheric diffusion and air pollution), 211-228; (1962) Aerodynamic roughness of the sea, *J. Geophys. Res.*, 67, No. 8, 3167-3172.

Deacon, E. L., and E. K. Webb, (1962) Interchange of properties between sea and air. Small-scale interaction. *The Sea* (ed. by M. N. Hill), Vol. 1, Interscience Publ., N. Y.-London, 43-87.

Deardorff, J. W., (1963) On the stability of viscous plane Couette flow, *J. Fluid Mech.*, 15, No. 4, 623-631; (1964) A numerical study of two-dimensional parallel-plate convection, *J. Atmosph. Sci.*, 21, No. 5, 419-438; (1968) Dependence of air-sea transfer coefficients on bulk stability, *J. Geophys. Res.*, 73, No. 8, 2549-2557.

Deardorff, J. W., and G. E. Willis, (1967) The free-convection temperature profile. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 93, No. 396, 166-175.

Debler, W. R., (1966) On the analogy between thermal and rotational hydrodynamic stability, *J. Fluid Mech.*, 24, No. 1, 165-176.

Defant, A., (1921) Die Zirkulation der Atmosphare in den gemassigten Breiten der Erde, *Geografiska Annaler*, 3, 209-265.

Deissler, R. G., (1951) Investigation of turbulent flow and heat transfer in smooth tubes, including the effects of variable fluid properties, *Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs.*, 73, No. 1, 101-107; (1954) Heat transfer and fluid friction for fully developed turbulent flow of air and supercritical water with variable fluid properties, *Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs.*, 76, No. 1, 73-86; (1955) Analysis of turbulent heat transfer, mass transfer and friction in smooth tubes at high Prandtl and Schmidt numbers, *Nat. Adv. Com, Aeronaut.*, Rep. 1210;(1959) Convective heat transfer and friction in flow of liquids. *Turbulent Flow and Heat Transfer* (ed. by C. C. Lin), Princeton Univ. Press, 288-338.

Dhawan, S., (1952) Direct measurements of skin friction, *Nat. Adv. Com. Aeronaut.*, Tech. Note, No. 2567.

Dikiy, L. A., (1960a) Stability of plane-parallel flows of an inhomogeneous fluid, *Prikl Matem. Mekh.*, 24, No. 2, 249-257; (1960b) Stability of plane-parallel flows of an ideal fluid, *Doklady AN SSSR*, 135, No. 5, 1068-1071; (1960c) The roots of the Whittaker functions and the Macdonald functions with a complex index, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. matem., 24, No. 6, 943-954; (1964) Stability of plane-parallel Couette flow, *Prikl. Matem. Mekh.*, 28, No. 2, 389-392; (1965a) Contribution to the nonlinear theory of hydrodynamic stability, *Prikl. Mat. i. Mekh.*, 29, No. 5, 852-855; (1965b) On nonlinear theory of stability of zonal flows, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. fiz. atmosf. i okeana, 1, No. 11,1117-1122.

Dil'man, V. V., (1967) On the theory of heat- and mass-transfer in turbulent flow, *Teor. Osnovy Khim. Tekhn.*, 1, No. 4, 438-445.

Dipprey, D. F., and R. H. Sabersky, (1963) Heat and momentum transfer in smooth and rough tubes at various Prandtl numbers, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 6, No. 5, 329-353.

Di Prima, R. C., (1955) Application of the Galerkin method to the calculation of the stability of curved flows. *Quart. Appl. Math.*, 13, No. 1, 55-62; (1961) Stability of nonrotationally symmetric disturbances for viscous flow between rotating cylinders, *Phys. Fluids*, 4, No. 6, 751-755; (1963) Stability of curved flows, *J. Appl. Mech.*, 30,486-492.

Donnelly, R. J., (1962) Experimental determination of stabihty limits, *Proc. Symp. Appl. Math.*, 13(Hydrodynamic instabiUty), 41-53; (1963)

Experimental confirmation of the Landau law in Couette flow, *Phys. Rev. Letters*, 10, No. 7, 282-284.

Donnelly, R. J., and D. Fultz, (1960) Experiments of the stability of viscous flow between rotating cylinders, II. Visual observations, *Proc. Roy. Soc.*, A258, No. 1292, 101-123.

Donnelly, R. J., and K. W. Schwarz, (1963) The approach to equilibrium in nonlinear hydrodynamics, *Phys. Letters*, 5, No. 5, 322-324; (1965) Experiments on the stability of viscous flow between rotating cylinders. IV. Finite-amplitude experiments (with an appendix by P. H. Roberts), *Proc. Roy. Soc.*, A283, No. 1395, 531-556.

Donovan, L. F., O. T. Hanna, and S. Yerazunis, (1967) Similar solutions of turbulent boundary layer heat and mass transfer problems, *Chem. Engrg. Sci.*, 22, No. 4, 595-610.

Doob, J. L., (1953) Stochastic Processes, John Wiley and Sons, N. Y.
Dorodnitsyn, A. A., (1941) Theory of diurnal temperature variation in the mixing layer, *Doklady AN SSSR*, 30, No. 5, 410-413.

Drazin, P. G., (1958) The stability of a shear layer in an unbounded heterogeneous fluid, *J. Fluid Mech.*, 4, No. 2, 214-224; (1962) On the stability of parallel flow of an incompressible fluid of variable density and viscosity, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 58, No. 4, 646-661.

Drazin, P. G., and L. N. Howard, (1962) The instability to long waves of unbounded parallel inviscid flow, *J. Fluid Mech.*, 14, No. 2, 257-283; (1966) Hydrodynamic stability of parallel flows of inviscid fluid, *Advan. Appl. Mech.*, 9, 1-89.

Drimmel, J., and H. Reuter, (1960) Der Exponent n in Sutton's Ansatz fiir die Lagrangesche Korrelationsfunktion, *Arch. Meteor., Geophys. und Bioklim.*, A12,No. 1, 24-39.

Dry den, H. L., (1959) Transition from laminar to turbulent flow. *Turbulent Flow and Heat Transfer* (C. C. Lin, ed.), Princeton University Press, Princeton, N. J., 3-74.

Dryden, H. L., G. B. Schubauer, W. C. Mock, and H. K. Skramstad, (1937) Measurements of intensity and scale of wind-tunnel turbulence and their relation to the critical Reynolds number of spheres, *Nat. Adv. Com. Aeronaut.*, Rep. No. 581.

Dumas, R., and J. Marcillat, (1966) Repartition en amplitudes de la vitesse dans une couche limite turbulente, *Compte Rend. Acad. Sci.*, 262,

No. 12, A700-A703.

Duty, R. L., and W. H. Reid, (1964) On the stability of viscous flow between rotating cyl inder s , *J. Fluid Mech.*, 20, No. 1, 81-94.

Dvorak, F. A., and M. R. Head, (1967) Heat transfer in the constant property turbulent boundary layer, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 10, No. 1,61-81.

Dwyer, O. E., (1963) Eddy transport in liquid-metal heat transfer, *A.I.ChE. Journal*, 9, No.2, 261-268.

Dyer, A. J., (1958) An improved electromagnetic integrator, *J. Scient. Instr.*, 35, No. 7, 240; (1960) Heat transport anemometer of high stability, *J. Scient. Instr.*, 37, No. 5, 166-169; (1961) Measurements of evaporation and heat transfer in the lower atmosphere by an automatic eddy-correlation technique. *Quart. J. Roy Meteor. Soc.*, 87, No. 373, 401-412; (1965) The flux-gradient relation for turbulent heat transfer in the lower atmosphere. *Quart. H. Roy. Meteor. Soc.*, 91, No. 388, 151-157; (1967) The turbulence transport of heat and water vapour in an unstable atmosphere, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 93, No. 398, 501-508; (1968) An evaluation of eddy flux variation in the atmospheric boundary layer, *J. Appl. Meteor.*, 7, No. 5, 845-850.

Dyer, A. J., B. B. Hicks, and K. M. King, (1967) The Fluxatron-A revised approach to the measurement of eddy fluxes in the lower atmosphere, *J. Appl. Meteor.*, 6, No. 2, 408-413.

Dyer, A. Y., and F. Y. Maher, (1965a) The "Evapotron." An instrument for the the measurement of eddy fluxes in the lower atmosphere, *C.S.I.R.O., Div. Meteor. Phys.*, Techn. Paper No. 15; (1965b) Automatic eddy-flux measurement with the Evapotron, *J. Appl. Meteor.*, 4, No. 5, 622-625.

Dynkin, E. B., (1965) *Markov Processes*, Vols. 1-2, Springer-Verlag, Berlin- Heidelberg-New York.

Dyson, F. J., (1960) Stability of an idealised atmosphere, II. Zeros of the confluent hypergeometric function , *Phys. Fluids*, 3, No. 2, 155-158.

Eckert, E. R. G., and R. M. Drake, (1959) *Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill Book Co., New York.

Eckhaus, W., (1965) *Studies in Non-linear Stability Theory*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

Eiffel, G., (1912) Sur la resistance des spheres dans I'air en mouvement, *Compte Rend. Acad. Sci.*, 155, 1597-1599.

Einstein, H. A., and H. Li, (1956) The viscous sublayer along a smooth boundary, *Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs.*, Paper 945.

Ekman, V. W., (1911) On the change from steady to turbulent motion of liquids, *Mat. Astron. Fys.*, 6, No. 12, 1-16.

Elagina, L. G., (1962) Optical device for measuring turbulent moisture-content fluctuations , *Izvestiya AN SSR*, Ser. geofiz., No. 8, 1100-1107.

Elder, J. W., (1959) The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow, *J. Fluid Mech.*, 5, No. 4, 544-560; (1960) An experimental investigation of turbulence spots and breakdown to turbulence, *J. Fluid Mech.*, 9, No. 2, 235-249.

Ehas, P., (1929) Die Warmeiibertragung einer geheizten Platte an stromende Luft. I. Anlage und Ergebnisse der Versuche, *Zs. angew. Math. Mech.*, 9, No. 6, 434-465.

Eliassen, A.. ı. H0iland, and E. Riis, (1953) Two-dimensional perturbation of flow with constant shear of a stratified fluid, *Publ. Inst. Weath. Clim. Res.*, Oslo, No. 1.

Elliott, W. P., (1957) A comparison of some approaches to the diabatic wind profile, *Trans. Amer. Geophys. Union*, 38, No. 1, 21-24; (1960) A hypothesis for the diabatic mixing length, *J. Meteor.*, 17, No. 6,680-681.

Ellison, T. H., (1956) Atmospheric turbulence. *Surveys in Mechanics* (ed. by G. K. Batchelor and R. M. Davies), Cambridge Uqiv. Press, 400-430; (1957) Turbulent transfer of heat and momentum from an infinite rough plane, *J. Fluid Mech.*, 2, No. 5, 456-466; (1959) Turbulent diffusion, *Sci. Progress*, 47, No. 187, 495-506; (1960) A note on the velocity profile and longitudinal mixing in a broad open channel, *J. Fluid Mech.*, 8, No. 1, 33-40.

Ellison, T. H., and J. S. Turner, (1960) Mixing of dense fluid in a turbulent pipe flow. Parts 1-2, *J. Fluid Mech.*, 8, No. 4, 514-544.

Elrick, D. E., (1962) Source functions for diffusion in uniform shear flow, *Australian J. Phys.*, 15, No. 3, 283-288.

Elrod, H. G., (1957) Note on the turbulent shear stress near a wall, *J. Aeronaut. Sci.*, 24, No. 6, 468-469(see also the amendment to this work: *J. Aeronaut. Sci.*, 27, No. 2, 145, 1960).

Esch, R. E., (1957) The instability of shear layer between two parallel streams, *J. Fluid Mech.*, 3, No. 3, 289-303.

Escudier, M. P., and W. B. Nicoll, (1966) The entrainment function in turbulent boundary-layer and wall-jet calculations, *J. Fluid Mech.*, 25, No.

2, 337-366.

Page, A., and H. C. H. Townend, (1932) An examination of turbulent flow with an ultramicroscope, *Proc. Roy. Soc.*, A135, No. 828, 656-677.

Falkner, V. M., (1943) The resistance of a smooth flat plate witH turbulent boundary layer, *Aircr . Eng.*, 15, 65-69.

Favre, A., J. Gaviglio, and R. Dumas, (1953) Quelques mesures de correlation dans le temps et I'espace en souffleiie. *La Rech. Aéro.*, No. 32, 21-28.

Fichtl, G. H., (1968) Characteristics of turbulence observed at the NASA 150-m meteorological tower, *J. Appl. Meteor.*, 7, No. 5, 838-844.

Fidman, B. A., (1959) New data on the viscous sublayer of the turbulent flow, in coll.: *Hydraulics of the Structures and Dynamics of River Beds*, Acad. Sci. Press, USSR, Moscow, 183-188.

Fiedler, H., and M. R. Head, (1966) Intermittency measurements in the turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, 25, No. 4, 719-735.

Fjørtoft, R., (1950) Application of integral theorems in deriving criteria of stability of laminar flow and for the barociinic circular vortex, *Geofys. Publ.*, 17, No. 6, 1-52.

Fleischman, B. A., and F. N. Frenkiel, (1954) Diffusion of matter emitted from a line source in a non-isotropic turbulent flow, *J. Meteor.*, 12, No. 2, 141-145.

Fock,V. A., (1926) Solution of a problem in the theory of diffusion by the finite difference method and its application to the diffusion of light, *Trudy Gos. Optich. In-ta*, 4, No. 34.

Forstall, W., and E. W. Gaylord, (1955) Momentum and mass transfer in a submerged water jet, *J. Appl. Mech.*, 22, No. 2, 161-164.

Fox, J. A., M. Lessen, and W. V. Bhat, (1968) Experimental investigation of the stability of Hagen-Poiseuille flow, *Phys. Fluids*, 11, No. 1, 1-4.

Frank-Kamenetskiy, D. A., (1947) *Diffusion and Heat Fxchange in Chemical Kinetics*, Acad. Sci. Press, USSR, Moscow-Leningrad (English translation: Princeton Univ. Press, 1955).

Frenkiel, F. N., (1952) Application of the statistical theory of turbulent diffusion to micrometeorology, *J. Meteor.*, 9, No. 4, 252-259; (1953) Turbulent diffusion: Mean concentration distribution in a flow field of homogeneous turbulence, *Adv. Appl. Mech.*, 3, 61-107.

Frenkiel, F. N., and P. A. Sheppard [ed.], (1959) Atmospheric diffusion and air pollution, *Adv. in Geophys.*, 6, Academic Press, N. Y.-London.

Freymuth, P., (1966) On transition in a separated laminar boundary layer, *J. Fluid Mech.*, 25, No. 4, 683-704.

Fritsch, W., (1928) Einfluss der Wandrauhigkeit auf die turbulente Geschwindigkeitsverteilung in Rinnen, *Zs. angew. Math. Mech.*, 8, No. 2, 199-216.

Fromm, J. E., (1965) Numerical solutions of the non-linear equations for a heated fluid layer, *Phys. Fluids*, 8, No. 10, 1757-1769.

Frost, R., (1946) Turbulence and diffusion in the lower atmosphere, *Proc. Roy. Soc.*, A186, No. 1004, 20-35; (1948) Atmospheric turbulence. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 74, No. 321, 316-338.

Funk, J. P., (1960) Measured radiative flux divergence near the ground at night, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 86, No. 369, 382-389.

Furuya, Y., and H. Fujita, (1967) Effect of surface roughness on the velocity defect law, *Phys. Fluids*, 10, Supplement, S155-S156.

Gallagher, A. P., and A. McD. Mercer, (1962) On the behavior of small disturbances in plane Couette flow, *J. Fluid Mech.*, 13, No. 1, 91-100; (1964) On the behavior of small disturbances in plane Couette flow. Part 2. The higher eigenvalues, *J. Fluid Mech.*, 18, No. 3, 350-352.

Caster, M. A., (1962) A note on the relation between temporally increasing and spatially increasing disturbances in hydrodynamic stability, *J. Fluid Mech.*, 14, No. 2, 222-224; (1965) On the generation of spatially growing waves in a boundary layer, *J. Fluid Mech.*, 22, No. 3, 433-441.

Gee, J. H., (1966) An approximate treatment of the effect of thermal stability on turbulent diffusion, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 92, No. 392, 301-305; (1967) A note on the effect of directional wind shear on medium scale atmospheric diffusion, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 93, No. 396, 237-241.

Gee, J. H., and D. R. Davies, (1963) A note on horizontal dispersion from an instantaneous ground source. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 89, No. 382, 542-545; (1964) A further note on horizontal dispersion from an instantaneous ground source. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 90, No. 386, 478-480.

Gel'fand, 1. M., and N. Ya. Vilenkin, (1964) Generalized Functions, Vol. 4; Applications of Harmonic Analysis, Academic Press, N. Y. Gerber,

R., (1949) Sur la réduction à un principe variationnel des equations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible, Ann. Inst. Fourier, 1, 157-162.

Gibson, C. H., C. C. Chen, and S. C. Lin, (1968) Measurements of turbulent velocity and temperature fluctuations in the wake of a sphere, *A.I.A.A.J.*, 6, No. 4, 642-649.

Gifford, F. A., (1962) Diffusion in the diabatic surface layer, *J. Geophys. Res.*, 67, No. 8, 3207-3212.

Gill, A. E., (1965a) On the behaviour of small disturbances to Poiseuille flow in a circular pipe, *J. Fluid Mech.*, 21, No. 1, 145-172; (1965b) A mechanism for instability of plane Couette flow and of Poiseuille flow in a pipe, *J. Fluid Mech.*, 21, No. 3, 503-511.

Gille, J., (1967) Interferometric measurement of temperature gradient reversal in a layer of convecting air, *J. Fluid Mech.*, 30, No. 2, 371-384.

Gnedenko, B. V., (1962) The Theory of Probability, Chelsea Publishing Co., N. Y.

Gödeke, K., (1935) Messungen der atmospharischen Turbulenz in Bodennahe mit einer Hitzdrahtmethode, *Ann. Hydrogr.*, No. 10, 400-410.

Goering, H., (1959) Mathematische Untersuchungen zum Umschlag laminarturbulent, *Mathem. Nachrichten*, 17, No. 3- 6, 358-393.

Gortler, H., (1942) Berechnung von Aufgaben der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Näherungsansatzes, *Zs. angew. Math. Mech.*, 22, No. 5, 244-254; (1959) Uber eine Analogic zwischen der Instabilitaten laminarer Grenzschichtstromungen an konkaven Wanden und an erwarmten Wanden. *Ing.Arch.*, 28, Nr. 1,71-78.

Görtler, H., and W. Velte, (1967) Recent mathematical treatments of laminar flow and transition problems, *Phys. Fluids*, 10, Supplement, S3-S10.

Goldstein, S., (1931) On the stability of superposed streams of fluids of different densities, *Proc. Roy, Soc.*, A132, No. 820, 524-539; (1938) *Modern Developments in Fluid Dynamics*, Vols. 1-2, Oxford Univ. Press; (1951) On diffusion by discontinuous movement and on the telegraph equation. *Quart. J. Mech, Appl. Math.*, 4, No. 2, 129-156.

Gor'kov, L. P., (1957) Stationary convection in a plane layer of fluid near conditions of critical heat transfer, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 33, No. 2(8), 402-411.

Gosse, J., (1961) Sur I'écoulement turbulent des fluides, Compte Rend.

Acad. Sci., 253, No. 1,61-63.

Gotoh, K., (1968) The equilibrium state of the finite disturbance in free flows, *J. Phys. Soc. Japan*, 24, No. 5, 1137-1146.

Graebel, W. P., (1966) On determination of the characteristic equations for the stability of parallel flows, J. Fluid Mech., 24, No. 3,497-508.

Grant, A. M., (1957) Corrected mixing-length theory of turbulent diffusion, J. Meteor., 14, No. 4, 297-303.

Greenspan, H. P., and D. J. Benney, (1963) On shear-layer instability, breakdown, and transition, *J. Fluid Mech.*, 15, No. 1, 133-153.

Grenander, U., (1950) Stochastic processes and statistical inference, *Ark. Mat.*, l ,No. 3, 195-277.

Grober, H., and S. Erk, (1955) Die Grundgesetze der Warmeiibertragung, Springer, Berlin-Gottingen-Heidelberg.

Grohne, D., (1954) liber das Spektrum bei Eigenschwingungen ebener Laminarstromungen, *Zs. Angew. Math. Mech.*, 34, No. 3, 344-357.

Grosch, C. E., and H. Salwen, (1968) The stability of steady and time-dependent plane Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.*, 34, No. 1, 177-205.

Gruza, G. V., (1961) *Macro turbulence in General Atmospheric Circulation*, Gidrometeoizdat Press, Leningrad.

Gukhman, A. A., and B. A. Kader, (1969) Mass transfer from a wall of a tube to turbulent fluid flow at high Schmidt numbers, *Teor. Osnovy Khim. Tekhnol.*, 3, No. 2, 216-224.

Gupta, H. C., (1959) Diffusion by continuous movements, *J. Math. Phys.*, 38, No. 1,36-41.

Gurvich, A. S., (1959) Acoustic microanemometer for investigating the microstructure of turbulence, *Akustich. Zhurnal*, 5, No. 3, 368-369; (1960) Experimental investigation of frequency spectra and probability distribution functions for the vertical component of wind velocity, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. geofiz.. No. 7, 1042-1055; (1961) Measurements of the stress in the atmospheric surface layer, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. geofiz.. No. 3, 458-466; (1962) Turbulent momentum transfer during unstable stratification and under near neutral conditions, Collection: Atmospheric turbulence, *Trudy Inst, Fiz. Atmosf AN SSSR*, No. 4, 81-100; (1965) Vertical wind-velocity and temperature profiles in the atmospheric surface layer, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. Fizika atmosfery i okeana, 1, No. 1.

Hagen, G., (1839) Über die Bewegung des Wassers in engen zylin-

drischen Röhren, *Pogg. Ann.*, 46, 423-442.

Hains, F. D., (1967) Stability of plane Couette-Poiseulle flow, *Phys. Fluids*, 10, No. 9, 2079-2080.

Halstead, M., (1943) A stabiUty term in the wind-gradient equation, *Trans. Amer. Geophys. Union*, 24, No. 1, 204-208; (1952) The relationship between wind structure and turbulence near the ground, *Geophys. Res. Pap.*, No. 19, 97-126.

Haltiner, G. J., and F. L. Martin, (1957) *Dynamical and Physical Meteorology*, McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto-London.

Hama, F. R., (1953) On the velocity distribution in the laminar sublayer and transition region in turbulent shear flows, *J. Aeronaut. Sci.*, 20, No. 9, 648-650; (1954) Boundary-layer characteristics for smooth and rough surfaces, *Trans. Soc. Naval Arch. Marine Engrs.*, 62, 333-358.

Hama, F. R., J. D. Long, and J. C. Hegarty, (1957) On transition from laminar to turbulent flow, *J. Appl. Phys.*, 28, No. 4, 388-394.

Hama, F. R., and J. Nutant, (1963) Detailed flow-fleld observations in the transition process in a thick boundary layer, *Proc. Heat Transfer Fluid Mech. Inst.*, Stanford Univ. Press, 11-93.

Hamel, G., (1911) Zum Turbulenzproblem, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, Math.-Phys. Kl., 261-270.

Hamilton, R. M., (1963) *Solid-liquid Mass Transfer in Turbulent Pipe Flow*, Ph. D. Thesis, Cornell University, Ithaca, N. Y.

Hanratty, T. J., (1967) Study of turbulence close to a solid wall, *Phys. Fluids*, 10, Supplement, S126-S133.

Hansen, M., (1928) Die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht an einer eingetauchten Platte, *Z. angew. Math. Mech.*, 8, No. 2, 185-199.

Harlow, F. H., and P. I. Nakayama, (1967) Turbulence transport equations, *Phys. Fluids*, 10, No. 11,2323-2332.

Harriott, P., and R. M. Hamilton, (1965) Solid-liquid mass transfer in turbulent pipe flow, *Chem. Engng. Sci.*, 20, No. 12,1073-1078.

Hatton, A. P., (1964) Heat transfer through the turbulent incompressible boundary layer on a flat plate. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 7, 875-890.

Haugen, D. A., M. L. Barad, and P. Antanaitis, (1961) Values of parameters appearing in Sutton's diffusion models, *J. Meteorol.*, 18, No. 3, 368-372.

Haugen, D. A., (1966) Some Lagrangian properties of turbulence deduced from atmospheric diffusion experiments, *J. Appl. Meteor.*, 5, No. 5, 646-652.

Haupt, O., (1912) Uber die Entwicklung einer willkiirlichen Funktion nach den Eigenfunktionen des Turbulenzproblems, Sitzungsberichte d.K. Bayer. Akad. Wiss., 289-301.

Hay, J. S., and F. Pasquill, (1959) Diffusion from a continuous source in relation to the spectrum and scale of turbulence, *Adv. Geophys.*, 6(Atmospheric diffusion and air pollution), 345-365.

Heisenberg, W., (1924) Über Stabilitat und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen, *Ann. Phys.*(4), 74, 577-627.

Helmholtz, H., (1868) Über discontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen, *Monatsber. Kon. Akad. Wiss.*, Berlin, 23, 215-228.

Herring, J. R., (1963) Investigation of problems in thermal convection, *J. Atmosph. Sci.*, 20, No. 4, 325-338. (1964) Investigation of problems in thermal convection: Rigid boundaries, *J. Atmosph. Sci.*, 21, No. 3, 277-290; (1966) Some analytic results in the theory of thermal convection, *J. Atmosph. Sci.*, 23, No. 6, 612-611.

Hess, G. D., and H. A. Panfosky, (1966) The budget of turbulent energy near the ground, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 92, No. 392, 277-280.

Hidy, G. M., and E. J. Plate, (1966) Wind action on water standing in a laboratory channel, *J. Fluid Mech.*, 26, No. 4, 651-688.

H0iland, E., (1953) On two-dimensional perturbation of linear flow, *Geofys. Publ.*, 18, No. 9, 1-12.

Hino, M., (1966) A theory on the fetch graph, the roughness of the sea and the energy transfer between wind and wave, *Prac. Tenth Conference on Coastal Eng.*

Hinze, J. O., (1951) Turbulent diffusion from a source in turbulent shear flow, *J. Aeronaut. Sci.*, 18, No. 8, 565-566; (1959) *Turbulence. An Introduction to Its Mechanism and Theory*, McGraw-Hill Book Co., N. Y.; (1962) Turbulent pipe-flow, *Mécanique de la turbulence* (Coll. Intern, du CNRS a Marseille), Paris, Ed. CNRS, 130-165.

Hinze, J. O. , and B. G. Van der Hegge Zijnen, (1949) Transfer of heat and matter in the turbulent mixing zone of an axially symmetric jet, ¿lppJ. Sci. Res., A l , 435-461;(1951) Local transfer of heat in anisotropic turbulence, *Inst. Mech. Eng.*, Proc. Gener. Discus, on Heat Transfer,

188-197.

Hirschfelder, J. O., C. F. Curtiss, and R. B. Bird, (1954) *Molecular Theory o f Gases and Liquids*, John Wiley and Sons, N. Y.; Chapman and Hall, London.

Hishida, M., (1967) Turbulent heat transfer and temperatrue distribution in the thermal entrance region of a circular pipe. *Bull. Jap. Soc. Mech. Eng.*, 10, No. 37, 113-123.

Hocking, L. M., (1968) Long wavelength disturbances to non-planar parallel flow, *J. Fluid Mech.*, 31, No.4 625-634.

Hoeber, H., (1968) Einige Ergebnisse von Windprofilmessungen iiber See bei stabiler Schichtung, *Tellus*, 20, No. 3, 495-501.

Hogstrom, U., (1964) An experimental study of atmospheric diffusion, *Tellus*, 16, No. 2, 205-251; (1967a) A new sensitive eddy flux instrumentation, *Tellus*, 19, No. 2, 230-239; (1967b) Turbulent water-vapor transfer at different stability conditions, *Phys. Fluids*, 10, Supplement, S247-S254.

Hofmann, E., (1937) Der Wärmeübergang bei der Strömung im Rohr., *Zs. Kdlteind.*, 44, 99107; (1940) Über die Gesetzmassigkeiten der Wärme und Stoffubertragung auf Grund des Stromungsverganges im Rohr, *Forsch. Gebiete Ingenieurwesens*, A 11, 159-169.

Holland, J. Z., (1967) Joint density functions of turbulent variables in the atmospheric boundary layer, *Phys. Fluids*, 10, Supplement, S220-S222; (1968) An application of some statistical techniques to the study of eddy structure. Report TID-24585(Meteorology TlD-4500), U. S. Atomic Energy Commission, Washington, D. C.

Holzman, B., (1943) The influence of stability on evaporation, *Ann. New York Acad. Sci.*, 44, 13-19.

Hopf, E., (1952) Statistical hydromechanics and functional calculus, *J. Rat. Mech.Anal.*, 1, No. 1, 87-123.

Howard, L. N., (1959) Hydrodynamic stability of a jet, *J. Math, and Phys.*, 39, No. 4, 283-298; (1961) Note on a paper of John W. Miles, *J. Fluid Mech.*, 10, No. 4, 509-512; (1963a) Neutral curves and stability boundaries in stratified flow, *J. Fluid Mech.*, 16, No. 3, 333- 342; (1963b) Heat transport by turbulent convection, *J. Fluid Mech.*, 17, No. 3. 405-432.

Howarth, L., [ed.] , (1953) Modern developments in fluid dynamics. *High Speed Flow*, Oxford University Press.

Hsu, N. T., K. Sato, and B. H. Sage, (1956) Temperature gradients in

turbulent gas streams. Effect of flow condition upon eddy conductivity, *Ind. Eng. Chem.*, 48,No. 12,2218-2223.

Huang, H., and J. E. Cermak, (1967) Similarity of thermally stratified shear flows in the laboratory and atmosphere, *Phys. Fluids*, 10, Supplement, S255-S258.

Hubbard, D. W., (1964) *Mass Transfer in Turbulent Flow at High Schmidt Numbers*, Ph. D. Thesis, The University of Wisconsin, Madison.

Hubbard, D. W., and E. N. Lightfoot, (1966) Correlation of heat and mass transfer data for high Schmidt and Reynolds numbers, *Industr. and Engng. Chem. Fundament.*, 5, No. 3, 370-379.

Hudimoto, B., (1941) On the turbulent boundary layer, *Trans. Japan Soc. Mech. Eng.*, 7; (1951) A brief note on the laminar sublayer of the turbulent boundary layer, *Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ.*, 13, 174-179.

Hughes, T. H., and W. H. Reid, (1965) The stability of laminar boundary layers at separation, *J. Fluid Mech.*, 23, No. 4, 737-747.

Hunt, J. N., (1954) The turbulent transport of suspended sediment in open channels, *Proc. Roy. Soc.*, A224,No. 1158, 322-335.

Huppert, H. E., (1968) Numerical evaluation of the Tietjens function, *Phys. Fluids*, 11, No. 3, 673-674.

Hurle, D. T., E. Jakeman, and E. R. Pike, (1967) On the solution of the Benard problem with boundaries of finite conductionity, *Proc. Roy. Soc.*, A296, No. 1447,469-475.

Hwang, N. H. C., and L. V. Baldwin, (1966) Decay of turbulence in axisymmetric wakes, *J. Basic Engineering*, 88, No. 1, 261-268.

Inoue, E., (1950)-(1951) On the turbulent diffusion in the atmosphere, I-II. *J. Meteor. Soc. Japan*, 28, No. 12, 441-456; 29, No. 7, 246-253; (1952) On the Lagrangian correlation coefficient for turbulent diffusion and its application to atmospheric diffusion phenomena, *Geophys. Res. Pap.*, No. 19, 397-412; (1959) The effects of thermal stratification on turbulent diffusion in the atmospheric surface layer. *Adv. Geophys.*, 6(Atmospheric diffusion and air pollution), 319-330.

International Conference, (1965) Humidity and Moisture, *Proc. 1963Intern. Confer, in Washington*, Vols. 1-3, Reinhold Publ. Corp., New York.

lordanskiy, S. V., and A. G. Kulikovskiy, (1965) The absolute stability of some plane-parallel flows at large Reynolds numbers, *Zh. Eksper. Teor. Fiz.*, 49, No. 4(10), 1325-1331.

Isserlis, L., (1918) On a formula for the product-moment coefficient in any number of variables, *Biometrika* 12, No. 1-2, 134-139.

Ivanilov, Yu. P., (1966) Secondary regimes in convective flows, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. Zhidk. i Gaza, No. 3, 93-94; (1968) Secondary regimes in a Couette flow, *Mekh. Zhidk. i Gaza*, No. 1, 110-117.

Ivanilov, Yu. P., and G. N. Yakovlev, (1966) On the bifurcation of the fluid flows between the rotating cylinders, *Prikl. Mat. i Mekh*, 30, No. 4, 768-773.

Izakson, A., (1929) On the definition of turbulence, Zh. Russk. Fiz.-Khim. Obshch., 61, No. 3, 257-293; (1937) Formula for the velocity distribution near a wall, *Zh. Eksper. Teor. Fiz.*, 7, No. 7,919-924.

Jeffreys, H., (1926) The stability of a layer of fluid heated from below, PM. Mag.(l), 2, 822-844; (1928) Some cases of instability in fluid motion, *Proc. Roy. Soc.*, A118,No. 779, 195-208.

Johnk, R. E., and T. J. Hanratty, (1962) Temperature profiles for turbulent flow of air in a pipe-I. The fully developed heat-transfer region, *Chem. Engng. Sci.*, 17, No. 11,867-879.

Jones, J. I. P., (1966) C. R. T. displays of wind eddies and some Lagrangian deductions from a vortex model of turbulence, *J. Appl. Meteor.*, 5, No. 6, 816-823.

Jones, J. I. P., and F. Pasquill, (1959) An experimental system for directly recording statistics of the intensity of atmospheric turbulence. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 85, No. 365, 225-236.

Joseph, D. D., (1965) On the stability of the Boussinesq equations. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 20, No. 1, 59-71; (1966) Nonlinear stability of the Boussinesqu equations by the method of energy, *Archiv. Rat. Mech. Anal.*, 22, No. 3, 163-184.

Joseph, D. D., and S. Carmi, (1966) Subcritical convective instability. Part 2. Spherical shells, *J. Fluid Mech.*, 26, No. 2, 769-777.

Joseph, D. D., R. J. Goldstein, and D. J. Graham, (1968) Subcritical instability and exchange of stability in a horizontal fluid layer, *Phys. Fluids*, 11, No. 4, 903-904.

Joseph, D. D., and C. C. Shir, (1966) Subcritical convective instability. Part 1. Fluid layers, *J. Fluid Mech.*, 26, No. 1,753-768.

Kader, B. A., (1966) On the structure of viscous sublayer of incompressible fluid, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. Mekh. Zhidk. i Gaza, No. 6,

157-164; (1969) The structure of the turbulence in a viscous sublayer of turbulent boundary layer, Candidate Dissertation, Moscow Institute of Mechanic. Engineering for Chemical Industry, Moscow.

Kader, B. A., and A. M. Yaglom, (1970) Universal law of turbulent heat and mass transfer from the wall at large Reynolds and Peclet numbevs, *Doklady AN SSSR*, 190, No. 1,65-68.

Kafoed-Hansen, O., and C. F. Wandel, (1967) On the relation between Eulerian and Lagrangian averages in the statistical theory of turbulence, RisøReport No. 50, Danish Atomic Energy Commission, Risø, Denmark.

Kaimal, J. C., and J. A. Businger, (1963) A continuous wave sonic anemometerthermometer, *J. Appl. Meteor.*, 2, No. 1, 156-164.

Kaimal, J. C., H. E. Cramer, F. A. Record, J. E. Tillman, J. A. Businger, and M. Miyake, (1964) Comparison of bivane and sonic techniques for measuring the vertical wind component. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 90, No. 386, 467-471.

Kaimal, J. C., D. A. Haugen, and J. T. Newman, (1966) A computer-controlled mobile micrometeorological observation system, *J. Appl. Meteor.*, 5, No. 4, 411-420.

Kaimal, J. C., and Y. Izumi, (1965) Vertical velocity fluctuations in a nocturnal low-level jet, *J. Appl. Meteor.*, 4, No. 5, 576-584.

Kaimal, J. C., J. C. Wyngaard, and D. A. Haugen, (1968) Deriving power spectra from a three-component sonic anemometer, *J. Appl. Meteor.*, 7, No. 5, 827-837. Kahnske, A. A., and C. C. Pien, (1944) Eddy diffusion, *Ind. Eng. Chem.*, 36, No. 3,220-223.

Kampe de Feriet, J., (1939) Les fonctions aleatoires stationnaires et la theorie statistique de la turbulence homogene, Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 59, 145-194; (1951) Averaging processes and Reynolds equations in atmospheric turbulence, *J. Meteor.*, 8, No. 5, 358-361; (1953) Fonctions aleatoires et theorie statistique de la turbulence (in the book: A. Blanc-Lapierre, R. Fortet, Theorie des fonctions aleatoires, Paris, Masson, 568-623); (1956) Problemes mathematiques poses par la mechanique statistique de la turbulence, *Proc. Intern. Congress Math. Amsterdam*, 1954, 3, 237-242, Amsterdam, North-Holland Publ. Co.

Kao, S. K., (1959) Turbulent transfer in the boundary layer of a stratified fluid, *J. Meteor.*, 16, No. 5,497-503.

Kapitza, P. L., (1947) Theoretical and empirical formulas for the heat

transfer in two-dimensional turbulent flow, *Doklady AN SSSR*, 55, No. 7, 595-602.

Kapoor, R. K., and A. Sundararajan, (1968) Comments on "Eddy conductivity and eddy viscosity ratio in lapse conditions" (with a reply by J. P. Pandolfo) , *J. Atmosph. Sci.*, 25, No. 3, 522-526.

Kármán, T. von, (1924) Über die Stabilität der Laminarstromung und die Theorie der Turbulenz, *Proc. 1st Intern. Congr. Appl Mech.*, Delft, 97-112; (1930) Mechanische Ahnlichkeit und Turbulenz, Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, Math.-Phys. Kl., 58-76; (1934) Some aspects of the theory of turbulent motion, *Proc. Intern. Congr. Appl. Mech.*, Cambridge; (1939) The analogy between fluid friction and heat transfer, *Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs.*, 61,705-710.

Karol', I. L., (1960) Effect of turbulent diffusion in the direction of the mean wind on the distribution of a substance diffusing through the atmosphere, *Doklady AN SSSR*, 131, No. 6, 1283-1286.

Kazanskiy, A. B., and A. S. Monin, (1956) Turbulence in surface layer inversions, *Izvestiya AN SSSR*,Ser. geofiz., No. 1, 79-86; (1957) Shape of smoke plumes, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. geofiz., No. 8, 1020-1033; (1958) Turbulent regime in the atmospheric surface layer during unstable stratification, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. geofiz., No. 6, 741-751; (1961) Dynamic interaction between the atmosphere and the earth's surface, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. geofiz., No. 5, 786-799; (1962) Determination of turbulent transfer of angular momentum, heat, and moisture from profile data. *Meteor, i Gidrologiya*, No. 12, 3-8.

Kedrolivanskiy, V. N., and M. S. Sternzat, *Meteorological Instruments*, Gidrometeoizdat Press, Leningrad.

Keldysh, M. V., (1951) Eigenvalues and eigenfunctions of some classes of nonself-adjoint, *Doklady AN SSSR* , 77, No. 1, 11-14.

Keldysh, M. V., and V. B. Lidskiy, (1963) Spectral theory of nonself-adjoint operators. *Transactions of the Fourth All-Union Mathematics Congress*, Vol. 1, Acad. Sci. Press, Leningrad, 101- 120.

Keller, L. V., (1925) Uber die Aufstellung eines Systems von Charakteristiken der atmospharischen Turbulenz, *Zh. Geofiz. Meteor.*, 2, No. 34, 275-290.

Keller, L. V., and A. A. Fridman, (1924) Differentialgleichung fiir die turbulente Bewegung einer kompressiblen Fliissigkeit, *Proc. 1st Intern.*

Congr. Appl. Mech., Delft, 395-405.

Kelly, R. E., (1967) On the stability of an inviscid shear layer which is periodic in space and time, *J. Fluid Mech.*, 27, No. 4, 657-689; (1968) On the resonant interaction of neutral distances in two inviscid shear flows, *J. Fluid Mech.*, 31, No. 4, 789-799.

Kempf, G., (1929) Neue Ergebnisse der Widerstandforschung, *Werft*, Reederei, Hafen, 10,234-239,247-253.

Kestin, J., and P. D. Richardson, (1963) Heat transfer across turbulent, incompressible boundary layers, *Intern. J. Heat Mass Transfer*, 6, No. 2, 147-189.

Kirchgsner, K., (1961) Die Instabilitat der Stromung zwischen zwei rotierenden Zylindern gegeniiber Taylor-Wirbeln fiir beliebige Spaltbreiten, *Z. angew. Math. Phys.*, 12, No. 1, 14-30.

Kiser, K. M., (1963) Material and momentum transport in axisymmetric turbulent jets of water, *A.I.Ch.E.J.*, 9, No. 3, 386-389.

Kishinevsky, M. Kh., (1965) Heat transfer at high Prandtl numbers and mass transfer to a turbulent flow from the wall at a smooth tube, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 8, 1181-1186.

Kistler, A. L., (1962) The structure of the laminar sublayer, *Mécanique de la turbulence* (Coll. Intern du CNRS a Marseille), Paris, Ed. CNRS, 287-297.

Kitaygorodskiy, S. A., (1968) On the calculation of the roughness parameter of sea surface, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. Fiz. Atmosf. Okeana, 4, No. 8, 870-878.

Kitaygorodskiy, S. A., and Yu. A. Volkov, (1965) On the roughness parameter of sea surface and the calculation of momentum flux in the surface layer of the atmosphere above the water, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. Fiz. Atmosf. Okeana, 1, No. 9,973-988.

Klebanoff, P. S., (1955) Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient, *Nat. Advis. Com. Aeronaut.*, Rep. No. 1247.

Klebanoff, P. S., and K. D. Tidstrom, (1959) Evolution of amplified waves leading to transition in a boundary layer with zero pressure gradient, *Nat. Aeronaut. Space Adm.*, Tech. note D-195.

Klebanoff, P. S., K. D. Tidstrom, and L. M. Sargent, (1962) The three-dimensional nature of boundary-layer instability, *J. Fluid Mech.*, 12, No. 1,

1-34.

Kleinstein, G., (1967) Generalized law of the wall and eddy-viscosity model for wall boundary layers, *AIAA J.*, No. 8, 1402-1407.

Klenshow, C. W., and D. Elliot, (1960) A numerical treatment of the Orr-Sommerfeld equation in the case of a laminar jet, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 13, No. 3,300-313.

Kline, S. J., W. C. Reynolds, F. A. Schraub, and P. W. Runstadler, (1967) The structure of turbulent boundary layers, *J. Fluid Mech.*, 3,0, No. 4, 741-773.

Klug, W.,(1963)Zum vertikalen Windprofil, *Beitr. Phys. Atmosph.*, 36, No. 3- 4, 226-253; (1965) Diabatic influence on turbulent wind flucations. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 91, No. 388, 215-217; (1967) Determination of turbulent fluxes of heat and momentum from the wind profile, *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 93, No. 395, 101-104; (1968) Diffusion in the atmospheric surface layer: comparison of similarity theory with observations, *Quart. J. Roy, Meteorol. Soc.*, 94, No. 402, 555-562.

Klug, W., and F. Wippermann, (1967) Numerische Integrationen einer Gleichung fiir die Turbulente Diffusion in der Atmosphare, *Arch. Meteor., Geophys. und Bioklimatol.*, 16, No. I, I-II.

Kochin, N. I., I. A. Kibel', and N. V. Roze, (1964) *Theoretical Hydromechanics*, Vol. 1. Transl. by D. Boyanovitch; J. R. M. Radok (ed.) Interscience, New York. Vol. II available from ASTIA as ADI29210.

Kolesnikov, A. G., (1960) Vertical turbulent transfer in stably stratified sea, *Izvestiya AN SSSR*, Ser, geofiz.. No. 11, 1614-1623.

Kolmogorov, A. N., (1931) Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Math. Ann.*, 104, 415-458; (1933) Zur Theorie der stetigen zufMligen Prozesse, *Math. Ann.*, 108, 149-160; (1941a) Local structure of turbulence in an incompressible fluid at very high Reynolds numbers, *Doklady AN SSSR*, 30, No. 4, 299-303; (1941b) Energy dissipation in locally isotopic turbulence, *Doklady AN SSSR*, 32, No. 1, 19-21; (1942) Equations of turbulent motion of an incompressible fluid, *Izvestiya AN SSSR*.S qx. fiz., 6, No. 1-2, 56-58; (1952) Skin friction and velocity profiles of turbulent flows in tubes, *Doklady AN SSSR*, 84, No. 1, 29-30; (1954) New variant of the gravitational theory of motion of suspensions, Vestn. Moscov State Univ. No. 3, 41-45; (1962) A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in viscous incompressible

fluid at high Renolds number. *J. Fluid. Mech.*, 13, No. 1,82-85.

Kolmogorov, A. N., (1935) La transformation de Laplace dans les espaces, *Comptes Rcndus Acad. Sci.*, 200, No. 21, 1717-1718.

Komoda, H., (1967) Nonlinear development of disturbance in a laminar boundary layer, *Phys. Fluids*, 10, Supplement, S87-S94.

Kondo, J., (1962a) Observations on wind and temperature profiles near the ground, *Sci. Reports Tohuku Univ.*, Ser. 5, Geophys., 14, No. 2, 41–56; (1962b) Evaporation from extensive surfaces of water., *Sci. Rep. Tdhoku Univ.*, Ser. 5. Geophys., 14, No. 3, 107-119.

Konstantinov, A. R., (1952) Calculation of evaporation from agricultural fields, taking into account bands of aforestration, *Trudy Gos. Gidrologieli. In-ta* , No. 34(88), 15-65.

Koppel, D., (1964) On the stability of flow of a thermally stratified flow under the action of gravity,*J. Math. Phys.*, 5, No. 7, 963-982.

Koschmieder, E. L., (1966) On convection on a uniformly heated plane, *Beitr. z. Phys. d. Atmosph.*, 39, No. 1, 1-11; (1967) On convection under an air surface, *J. Fluid Mech.*, 30, No. 1,9-15.

Kovasznay, L. S. G., (1953) Turbulence in supersonic flow, *J. Aeronaut. Sci.*, 20, No. 10, 657-674, 682; (1965) Structure detaillee de I'ecoulement pendant la transition, *Compt. rend. Journees hydraul. Soe. hydroteehn. France*, Lille, 1964, 1, Grenoble, 1965, 2142; (1966) Turbulence measurements. *Applied Mechanics Surveys*, Spartan Books, Macmillan and Co., 971-982; (1967) Structure of the turbulent boundary layer, *Phys. Fluids*, 10, Supplement, S25-S30.

Kovasznay, L. S. G., H. Komoda, and B. R. Vasudeva, (1962) Detailed tlow field in transition, *Proc. Heat Transfer and Fluid Mech. Inst.*, Stanford Univ. Press, 1-26.

Kraichnan, R. H., (1959) The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.*, 5, No. 4, 497-543; (1962a) Turbulent thermal convection at arbitrary Prandtl numbers, *Phys. Fluids*, 5, No. 11, 1374-1380; (1962b) The closure problem of turbulence theory, *Proc. Symp. Appl. Math.*, 13(Hydrodynamic instability), 129-225.

Krasnosel'skiy, M. A., (1964) *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*, Pergamon Press, New York.

Kravchenko, I. N., (1963) Wind profile in the surface *Izvestiya AN SSSR*, Ser. geofiz., No. 3, 498-499.

Krechmer, S. I., (1954) Method of measuring microfluctuations in wind velocity and temperature of the atmosphere, *Trudy Geofiz. Inst. AN SSSR*, No. 24(151), 43-111; (1957) Field instrument for measuring the temperature lapse-rate in the atmosphere, *Trudy Tsentr. Aerolog. Observ.*, No. 22, 96-99.

Krishna, K., (1968) A numerical study of the diurnal variation of meteorological parameters in the planetary boundary layer, *Monthly Weather Rev.*, 96, No. 5, 269-276.

Kropik, K., (1964) Beitrage zum Stabilitatsproblem der Poiseulleschen *Acta Phys. Austr.*, 17, No. 4, 351-377.

Krueger, E. R., (1962) *The Stability of Couette and Spiral Flow*, Ph. D. Thesis, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York.

Krueger, E. R., and R. C. Di Prima, (1964) The stability of viscous fluid between rotating cylinders with an axial flow, *J. Fluid Mech.*, 19, No. 4, 528-538.

Krueger, E. R., A. Gross, and R. C. Di Prima, (1966) On the relative importance of Taylor-vortex and non-axisymmetric modes in flow between rotating cylinders, *J. Fluid Mech.*, 24, No. 3, 521-538.

Krylov, A. L., (1963) Proof of the instability of a particular flow of a viscous incompressible fluid, *Doklady AN SSSR*, 153, No. 4, 787-789; (1964) On the stability of a Poiseuille flow in a plane, *Doklady AN SSSR*, 159, No. 5,978-981.

Kulikovskiy, A. G., (1966) On the stability of the Poiseuille flow and some other plane-parallel flows in the plane wind-tunnel of large finite length at large Reynolds numbers, *Prikl. Mat. Mekh.*, 30, No. 5, 822-835.

Kuo, H. L., (1961) Solution of the nonlinear equations of cellular convection and heat transport, *J. Fluid Mech.*, 10, No. 4, 611-634.

Kurpakova, T. A., and L. R. Orlenko, (1967) On the laws for the temperature and wind velocity distributions in the boundary layers, *Trudy Glavn. Geofiz. Observ.*, No. 205, 13-24.

Kuwabara, S., (1967) Nonlinear instability of plane Couette, *Phys. Fluids*, 10, Supplement (No. 9, Part II), S115-S116.

Lamb, H., (1932) Hydrodynamics, 6th ed., Dover Publ., N. Y. Landau, L. D., (1944) Turbulence, *Doklady AN SSSR*, 44, No. 8, 339-342.

Landau, L. D., and E. M. Lifshitz, (195S) *Statistical Physics.* Trans, by E. Peierls and R. F. Peierls. Pergamon Press, London; (1963) *Fluid*

Mechanics, Pergamon Press London.

Laufer, J., (1951) Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel, *Nat. Advis. Com. Aeronaut.*, Rep. No. 1033; (1954) The structure of turbulence in fully developed pipe flow, *Nat. Advis. Com. Aeronaut.*, Rep. No. 1174.

Laykhtman, D. L., (1944) Wind profile and mixing in the atmospheric surface layer, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. geogr. i geofiz., 8, No. 1, 1-5; (1947a) Wind profile in the atmospheric surface layer under stationary conditions, *Trudy Nauchno-Issl. Uchr. Glavn. Upr. Gidrometsluzhby*, ser. 1 ,N o . 39,58- 76; (1947b) Transformation of the air mass under the influence of the underlying surface, *Mateorol. i Gidrol.*, No. 1, 17-21; (1961) of the atmospheric boundary layer, Gidrometizdat Press, Leningrad; (1963) Diffusion of a contaminant from point sources in the atmospheric surface layer, *Trudy Leningr. Gidromet. In-ta*, No. 15, 3-9.

Laykhtman, D. L., and A. F. Chudnovskiy, (1949) *Physics of the atmospheric surface layer*, Gostekhizdat Press, Leningrad-Moscow.

Leite, R. J., (1959) An experimental investigation of the stability of Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.*, 5, No. 1, 81-96.

Lessen, M., (1950) On stability of free laminar boundary layer between parallel streams, *Nat. Adv. Com, Aeronaut.*, Rep. No. 979.

Lessen, M., J. A. Fox, W. V. Bhat, and Ting-Yung Liu, (1964) Stability of Hagen-Poiseuille flow, *Phys. Fluids*, 7, No. 8, 1384-1385.

Lessen, M., and Sung-Hwan Ko, (1966) Viscous instability of an incompressible fluid half-jet, *Phys. Fluids*, 9, No. 6, 1179-1183.

Lessen, M., S. G. Sadler, and T.-Y. Liu, (1968) Stability of pipe Poiseuille flow, *Phys. Fluids*, 11, No. 7, 1404-1409.

Lettau, H., (1950) A reexamination of the "Leipzig wind profile" considering some relations between wind and turbulence in the friction layer, *Tellus*, 2, No. 2, 125-129; (1952) On eddy diffusion in shear zones, *Geophys. Res. Pap.*, No. 19, 437-445; (1959) Wind profile, surface stress and geostrophic drag coefficients in the atmospheric surface layer. *Adv. Geophys.* 6 (Atmospheric diffusion and air pollution) 241-257; (1962) Theoretical wind spirals in the boundary layer of a barotropic atmosphere, *Beitr. Phys, Atmosph.*, 35, No. 3- 4, 195-212; (1967a) Problems of micrometeorological measurements, in *The Collection and Processing of Field Data* (ed. by E. F. Bradley and O. T. Denmead), Interscience Publ., New York-London-Sydney;

(1967b) New hypothesis for the relationship between eddy and mean states, *Phys. Fluids*, 10, Supplement, S79-S83.

Lettau, H., and B. Davidson, (1957) *Exploring the Atmosphere's First Mile*, Vols. 1-2, Pergamon Press, London-New York-Paris.

Levich, V. G., (1944) Theory of concentrational polarization, *Zh. Fiz. Khimii*, 18, No. 9, 335-355; (1951) Theory of diffusion processes in a moving fluid (hydrodynamics at high Prandtl numbers), *Doklady AN SSSR*, 78, No. 6, 1105-1108; (1962) *Physicochemical Hydrodynamics* (Trans, of Russian 2nd ed.), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.

Lewis, D. J., (1928) An experimental study of the motion of a viscous liquid contained between two coaxial cylinders, *Proc. Roy. Soc.*, A117, 388-407.

Liepmann, H. W., (1962) Free turbulent flows, *Mécanique de la turbulence* (Coll. Intern, du CNRS a Marseille), Paris, Ed. CNRS, 211-226.

Lighthill, M. J., (1952) On sound generated aerodynamically. I. General theory, *Proc. Roy. Soc.*, A211, No. 1107, 564- 587; (1954) On sound generated aerodynamically. II. Turbulence as a source of sound, *Phys. Fluids*, A222,No. 1148, 1-32.

Liljequist, G. H., (1957) Energy exchange of an Antarctic snow-field, Part I, Norsk Polarinstitut, Oslo.

Lin, C. C., (1945) On the stability of two-dimensional parallel flows. Parts I- III, *Quart. Appl Math.*, 3, No. 2, 117-142, No. 3, 218-234, No. 4, 277-301; (1955) *The Theory of Hydrodynamic Stability*, Cambridge Univ. Press; (1961) Some mathematical problems in the theory of the stability of parallel flows, *J. Fluid Mech.*, 10, No. 3, 430-438.

Lin, C. C., and D. J. Benney, (1962) On the instability of shear flows, *Proc. Symp. Appl. Math.*, 13(Hydrodynamic instability), 1-24.

Lin, C. S., E. B. Denton, H. S. Gaskill, and G. L. Putnam, (1951) Diffusion-controlled electrode reactions, *Ind. Eng. Chem.*, 43, No. 9, 2136-2143.

Lin, C. S., R. W. Moulton, and G. L. Putnam, (1953) Mass transfer between solid walls and fluid streams, *Ind. Eng. Chem.*, 45, No. 3, 636-646.

Lindgren, E. R., (1957) The transition process and other phenomena in viscous flow. *Ark. Fysik*, 12, No. 1-2, 1-169; (1959) Liquid flow in tubes l-Ill, *Ark. Fys.*, 15, No. 2, 97-119; No. 6, 503-519; 16, No. 1, 101-112; (1961) Liquid flow in tubes W-V , *Ark. Fys.*, 18, No. 5, 449-464; No. 6, 533-541;

(1965) Experimental study on turbulent pipe flows of distilled water. Dept. Civil Eng., Oklahoma State Univ., Rept. 1AD621071; (1967) Turbulent convection-Malkus theory, *Nat. Cent. Atmosph. Res. Techn. Notes*, No. 24, 151-175.

Lindzen, R. S., (1967) Turbulent convection-Malkus theory, *Nat. Cent. Atmosph. Res. Techn. Notes*, No. 24, 151-175.

Lock, R. C., (1955) The stability of the flow of an electrically conducting fluid between parallel planes under a transverse magnetic field, *Proc. Roy. Soc.*, A233,No. 1192, 105-125.

Loeve, M., (1960) *Probability Theory*, 2nd edition, Princeton Univ. Press; D. van Nostrand.

Loitsyanskiy, L. G., (1935) Some applications of the method of similarity to the theory of turbulence, *Prikl. Matem. Mekh.*, 2, No. 2, 180-206; (1941) Aerodynamics of the Boundary Layer, Gostekhizdat Press, Leningrad-Moscow; (1958) Localization hypothesis for the turbulent flow of a fluid in the presence of viscosity, *Prikl. Matem. Mekh.*, 22, No. 5, 600-611;(1960) Transport of heat in turbulent motion, *Prikl. Matem. Mekh.*, 24, No. 4, 637-651; (1962a) Semiempirical theories of interaction between the processes of molecular and molar exchange in turbulent fluid flow, *Trans. of the All-Union Congress on Theoretical Applied Mechanics*, I960, Acad. Sci. Press, Moscow-Leningrad, 145-146; (1962b) *Laminar Boundary Layer*, Fizmatgiz Press, Moscow.

Longwell, P. A., (1966) *Mechanics of Fluid Flow*, McGraw-Hill Book Co., New York.

Lorentz, H. A., (1907) Uber die Entsthung turbulenter Fliissigkeitsbewegungen und uber den Einfluss dieser Bewegungen bei der Stromung durch Rohren, *Abh. theor. Phys.*, Leipzig, 1, 43-71.

Lorenz, E., (1953) The interaction between a mean flow and random disturbances, *Tellus*, 5, No. 3, 238-250.

Low, A. R., (1929) On the criterion for stability for a layer of viscous fluid heated from below, *Proc. Roy. Soc.*, A 125, 180-195.

Ludwieg, H., (1956) Bestimmung des Verhaltnisses der Austauschkoeffizienten fiir Warme und Impuls bei turbulenten Grenzschichten, *Zs. fHr Flugwiss.*, 4, No. 2, 73-81.

Ludwieg, H., and W. Tillmann, (1949) Untersuchungen über die Wandschubspannung in turbulenten Reibungsschichten, *Ind. Arch.*, 17, No. 4,

288-299.

Lumley, J. L., (1962a) The mathematical nature of the problem of relating Lagrangian and Eulerian statistical functions in turbulence, *Mécanique de la turbulence* (Coll. Intern, du CNRS a Marseille), Paris, Ed. CNRS; (1962b) An approach to the Eulerian-Lagrangian problem, *J. Math. Phys.*, 3, No. 2, 309-312; (1967a) Rational approach to relations between motions of differing scales in turbulent flows, *Phys. Fluids*, 10, No. 7, 1405-1408; (1967b) The applicability of turbulence research to the solution of internal flow problems, in *Fluid Mechanics of Internal Flow* (ed. by G. Sovran), Elsevier Publ. Co., Amsterdam, 152-169.

Lumley, J. L., and H. A. Panofsky, (1964) *The Structure of Atmospheric Turbulence*, Interscience Publ., New York-London-Sydney.

Lumley, J. L., and R. W. Stewart, (1965) On a conjecture of Lettau, *J. Atmosph. Sci.*, 22, No. 5, 592-594.

Lyapin, Ye. S., (1948) Turbulent mixing of air in the atmosphere, *Meteor, i Ciidrol*, No. 5, 13-23; (1950) Hyperbolic equation for vertical turbulent transfer in the atmosphere, *Trudy Glavn. Geofiz. Observ.*, No. 19(81), 175-184.

Lyatkher, V. M., (1968) Turbulent pulsations in the viscous sublayer, *Doklady AN SSSR*, 180, No. 2, 300-303.

Lykoudis, P. S., and J. S. Touloukian, (1958) Heat transfer in liquid metals, *Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs.*, 80, No. 3, 653-666.

Lyon, R. N., (1951) Liquid metal heat-transfer coefficients, *Chem. Eng. Progress*, 47, No. 2, 75-79.

Lyubimov, B. Ya., (1969) Lagrangian description of turbulence dynamics, *Doklady AN SSSR*, 184, No. 5, 1069-1071.

McAdams, W. H., (1954) *Heat Transmission*, 3rd edition, McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto-London.

MacCready, P. B., (1953) Atmospheric turbulence measurements and analysis , *J. Meteor.*, 10, No. 5, 325-337.

Mcllroy, I. C., (1955) The atmospheric fine structure recorder, *C.S.I.R.O., Div. Meteor. Phys.*, Techn. Pap. No. 3, Melbourne.

Mcllroy, I. C., and D. E. Angus, (1963) The Aspendale multiple weighed lysimeter installation, *C.S.I.R.O., Div. Meteor.*, Techn. Paper No. 14.

McVehil, G. E., (1964) Wind and temperature profiles near the ground in stable stratification. *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, 90, No. 384, 136-146.

Malhotra, R. C., and J. E. Cermak, (1963) Wind-tunnel modeling of alniospiicric diffusion, *J. Geophys. Res.*, 68, No. 8, 2181-2184.

Malkus, W. V. R., (1954a) Discrete, transitions in turbulent convection, *Proc. Roy. Soc.*, A225, No. 1161, 185-195; (1954b) The heat transport and spectrum of thermal turbulence, *Proc. Roy. Soc.*, A225, No. 1161, 196-212.

Malkus, W. V. R., and G. Veronis, (1958) Finite amplitude cellular convection, *J. Fluid Mech.*, 4, No. 3, 225-260.

Mandell, D. A., and E. E. O'Brien, (1967) Single point and relative diffusion in unstable wall layers, *Phys. Fluids*, 10, Supplement, S259-S262.

Martinelli, R. S., (1947) Heat transfer to molten metals, *Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs.*, 69, 947-959.

Matsuoka, H., (1960) A corrected turbulon model theory of turbulent diffusion and its application, *J. Meteor. Soc. Japan*, 38, No. 3, 148-153; (1961) Note on two-dimensional diffusion in the atmospheric surface layer, *J. Meteor. Soc. Japan*, 39, No. 6, 324-330; (1962) On the turbulent diffusion in the atmosphere, *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto*, Ser. A, 30, No. 2, 245-272.

Matveyev, L. T., (1960) Dependence of the turbulence coefficient on height in the atmospheric surface layer, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. geofiz., No. 1, 83-88.

Meksyn, D., (1946) Stability of viscous flow between rotating cylinders, I-III, *Proc. Roy. Soc.*, A187,No. 1008, 115-128, No. 1011,480-491,492-504; (1964) Stability of laminar flow between parallel planes for two- and three-dimensional finite disturbances, *Zs. Phys.*, 178, No. 2, 159-172.

Meksyn, D., and J. T. Stuart, (1951) Stabihty of viscous motion between parallel planes for finite disturbances, *Proc. Roy. Soc.*, A208, No. 1095, 517-526.

Mellor, G. L., (1966) The effects of pressure gradients on turbulent flow near a smooth wall, *J. Fluid Mech.*, 24, No. 2, 255-274.

Meyer, K. A., (1967) Time-dependent numerical study of Taylor vortex flow, *Phys. Fluids*, 10, No. 9, 1874-1879.

Michael, D. H., (1961) Note on the stability of plane parallel flows, *J. Fluid Mech.*, 10, No. 4, 525-528.

Michalke, A., (1964) On the inviscid instability of the hyperbolic tangent velocity profile, *J. Fluid Mech.*, 19, No. 4, 543-556; (1965a) Vortex formation in a free boundary layer according to stability theory, *J. Fluid*

Mech., 22, No. 2, 371-383; (1965b) On spatially growing disturbances in an inviscid shear layer, *J. Fluid Mech.*, 23, No. 3, 521-544; (1968) The instability of mixing regions, lecture read at a meeting *Transition from laminar to Turbulent Flow*, London, July 1968; (1969) The influence of the vorticity distribution on the inviscid instability of a free shear layer, *Fluid Dynamics Transactions*, Vol. 4(ed. by Fiszdon, W., Kucharczyk, P., Prosnak, W. J.), Panstwowe wydawnictwo naukowe, Warszawa, 751-760.

Michalke, A., and P. Freymuth, (1966) The instability and the formation of vortices in a free boundary layer, *AGARD Conference Proceedings* No. 4 (Proc. Spec. Meeting held in Rhode-Saint-Genese, Belgium, 10-13May 1966), 575-595.

Michalke, A., and H. Schade, (1963) Zur Stabilitat von freien Grenzschichten, *Ingenieur-Archiv*, 33, No. 1, 1-23.

Michalke, A., and A. Timme, (1967) On the inviscid instabiUty of certain two-dimensional vortex-type flows, *J. Fluid Mech.*, 29, No. 4, 647-666.

Mickelsen, W. R., (1955) An experimental comparison of the Lagrangian and Eulerian correlation coefficients in homogeneous isotropic turbulence, *Adv, Com. Aeronaut.*, Techn. Note No. 3570; (1959) Measurements of the effect of molecular diffusivity in turbulent diffusion, *J. Fluid Mech.*, 7, No. 3, 397-400.

Middleton, W. B. K., and A. F. Spilhaus, (1953) *Meteorological Instruments*, Toronto Univ. Press.

Mihaljan, J., (1962) A rigorous exposition of the Boussinesq approximations applicable to a thin layer of fluid. *Astrophysics Journal*, 136, 1126-1133.

Miles, J. W., (1957) On the velocity profile for turbulent flow near a smooth wall, *J. Aeronaut. Sei.*, 24, No. 9, 704; (1961) On the stability of heterogeneous shear flows, *J. Fluid Mech.*, 10, No. 4,496-508; (1963) On the stability of heterogeneous shear flows. Part 2, *J. Fluid Mech.*, 16, No. 2, 209-227.

Miller, J. A., and A. A. Fejer, (1964) Transition phenomena in oscillating boundary-layer flows, *J. Fluid Mech.*, 18, No. 3,438-448.

MiUikan, C. B., (1939) A critical discussion of turbulent flows in channels and circular tubes. *Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech.*, Cambridge (USA), 386-392.

Millionshchikov, M. D., (1939) Decay of homogeneous isotropic turbu-

lence in viscous incompressible, *Doklady AN SSSR*, 22, No. 5, 236-240.

Mises, R.von, (1941) Some Remarks on the Laws of Turbulent Motion in Tubes, *T. von Kármán anniversary volume*, Calif. Inst. Techn. Press, Pasadena, 317-327.

Mitchell, J. E., and T. J. Hanratty, (1966) A study of turbulence at a wall using an electrochemical wall shear-stress meter, *J. Fluid Mech.*, 26, No. 1, 199-221.

Mitsuta, Y., (1966) Sonic anemometer-thermometer for general use, *J. Meteor. Soc. Japan*, 44, No. 1, 12-23.

Moffatt, H. K., (1967) The interaction of turbulence with strong wind shear, in *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation* (ed. by A. M. Yaglom and V. I. Tatarskiy), Nauka Press, Moscow, 139-156.

Monin, A. S., (1950a) Dynamic turbulence in the atmosphere, Izvestiya A N SSSR, Ser. geogr. geofiz., 14, No. 3, 232-254; (1950b) Characteristics of anisotropic turbulence, *Doklady AN SSSR*, 75, No. 5, 621-624; (1950c) Turbulence in the atmospheric surface layer. *Inform. Shorn. Gl. Upr. Gidrometsluzhby* (Coll. Sci. Inform. Hydromet. Service USSR, Moscow), No. 1, 13-27; (1953) Mechanism responsible for the heating of air over an open steppe. Collection: *Climatic and Microclimatic Studies on the Caspian Plain, Acad. Sci. Press*, Moscow, 100-123; (1955) Diffusion with finite velocity, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. geofiz.. No. 3, 234-248; (1956a) Semiempirical theory of turbulent diffusion, *Trudy Geof Inst. AN SSSR*, No. 33(160), 3-47; (1956b) Turbulent diffusion in the atmospheric surface layer, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. geofiz.. No. 12, 1461-1473; (1956c) Macroturbulent exchange in the earth's atmosphere, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. geofiz.. No. 4, 452-463; (1958) Structure of atmospheric turbulence, *Teor. Veroyat. i YeyePrimen.*, 3, No. 3, 285-317; (1959a) Smoke propagation in the surface layer of the atmosphere, *Adv. Geophys.*, 6(Atmospheric diffusion and air pollution), 331-343; (1959b) On the boundary condition on the earth surface for diffusing pollution. *Adv. in Geophys.*, 6 (Atmospheric difffusion and air pollution), 435-436; (1959c) Atmospheric diffusion, *Usp. Fizich. Nauk*, 67, No. 1, 119-130; (1960) Lagrangian characteristics of turbulence, *Doklady AN SSSR*, 134, No. 2, 304-307; (1962a) Structure of wind velocity and temperature fields in the atmospheric surface layer. Collection: Atmospheric Turbulence, *Trudy In-ta Fiziki Atmosf. AN SSSR*, No. 4, 5- 20; (1962b) Empirical data on turbulence in the surface layer of atmosphere,

J. Geophys. Res., 67, No. 8, 3103-3109; (1962c) Lagrangian equations in the hydrodynamics of an incompressible viscous fluid, *Prikl. Matem, Mekh.*, 26, No. 3, 320-327; (1965) Symmetry properties of turbulence in the atmospheric surface layer, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. fizika atmosfery i okeana, 1, No. 1,45-54.

Monin, A. S., and A. M. Obukhov, (1953) Dimensionless characteristics of turbulence in the atmospheric surface layer, *Doklady AN SSSR*, 93, No. 2, 223-226; (1954) Basic turbulent mixing laws in the atmospheric surface layer, *Trudy Geofiz. Inst. AN SSSR*, No. 24(151), 163-187.

Mordukhovich, M. I., and L. R. Tsvang, (1966) Direct measurements of turbulent fluxes at two heights in atmospheric surface layer, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. fiz. atmosf. okeana, 2, No. 8, 786-803.

Munn, R. E., (1961) A theoretical expression for the root mean square vertical eddy fluctuation $(w'^2)^{1/2}$ *J. Meteor.*, 18, No. 1, 38-42; (1963) A reappraisal of Sutton's parameter n, *J. Appl. Meteor.*, 2, No. 4, 440-445.

Murphree, È. V., (1932) Relation between heat transfer and fluid friction, *Ind. Eng. Chem.*, 24, No. 7, 726-736.

Myrup, L. O., (1967) Temperature and vertical velocity fluctuations in strong convection, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 93, No. 39, 350-360.

Nachtsheim, P. R., (1964) An initial value method for the numerical treatment of the Orr-Sommerfeld equation for the case of plane Poiseuille flow, *N.A.S.A. Tech. Note* D-2414.

Naito, K., (1964) Some remarks on the Monin-Obukhov function in the atmosphere near the ground, *J. Met. Soc. Japan*, 42, No. 1, 53-63.

Narayanan, M. A., and T. Narayana, (1967) Some studies on transition from laminar to turbulent flow in a two-dimensional channel, *Zs. angew. Math. Phys.*, 18, No. 5, 642-650.

Nevzglyadov, V. G., (1945a) Phenomenologic theory of turbulence, *Doklady AN SSSR*, 47, No. 3, 169-173; (1945b) Statistical theory of turbulence, *Doklady AN SSSR*, 47, No. 7, 482-485.

Nield, D. A., (1967) The thermohaline Rayleigh-Jeffreys problem, *J. Fluid Mech.*, 29, No. 3, 545-558; (1968) The Rayleigh-Jeffreys problem with boundary slab of finite conductivity, *J. Fluid Mech.*, 32, No. 2, 393-398.

Nikuradse, J., (1932) Gesetzmassigkeiten der turbulenten Stromung in glatten Röhren, *VDI-Forschungsheft* No. 356; (1933) Strömungs gesetze in rauhen Röhren, *VDI-Forschungsheft* No. 361.

Nissan, A. H., J. L. Nardacci, and C. Y. Ho, (1963) The onset of different modes of instability for flow between rotating cylinders, *A.I.J.Ch.E. Journal*, 9, No. 5, 620-624.

Novikov, Ye. A., (1958) Turbulent diffusion in a shear flow, *Prikl Matem, Mekh.*, 22, No. 3, 412-414; (1964) Convergence of the functional Taylor series for the characteristic functional of a random field, *Uspekhi Matem. Nauk.*, 19, No. 6(120), 195-197.

Nunner, W., (1956) Wmeiibertragung und Druckabfall in rauhen Rohren, *VDI-Forschungsheft* No. 455.

O'Brien, E. E., (1966) Diffusion of clouds of contaminant in a turbulent boundary layer, *J. Atmosph. Sci.*, 23, No. 4, 387-389.

O'Brien, J. J., (1965) An investigation of the diabatic wind profile of the atmospheric boundary layer , *J. Geophys. Res.*, 70, No. 10, 2277-2290.

Obukhov, A. M., (1941) Energy distribution in the spectrum of a turbulent flow, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. geogr. geofiz.. No. 4-5, 453-466; (1942) Distribution of turbulent length scale in tubes of arbitrary cross section, *Prikl Matem. Mekh.*, 6, No. 2-3, 109-220; (1946) Turbulence in thermally inhomogeneous atmosphere, *Trudy In-ta Teoret. Geofiz. AN SSSR*, 1, 95-115; (1954) Statistical description of continuous fields, *Trudy Geofiz. In-ta AN SSSR*, No. 24(151), 3- 42; (1960) Structure of temperature and velocity fields under conditions of free conwection, *Izvestiya AN SSSR*,S e i . geofiz., No. 9, 1392-1396; (1962) Some specific features of atmospheric turbulence, *J. Fluid Mech.*, 13,No. 1,77-81.

Ogura, Y., (1952a) Note on the wind velocity profile in the non-adiabatic atmosphere, *J, Meteor. Soc. Japan*, ser. II, 30, No. 10, 329-342; (1952b) The theory of turbulent diffusion in the atmosphere. I-III, *J. Meteor. Soc. Japan*, 30, No. 1, 23-28; No. 2, 53-58; No. 11, 386-397.

Ohji, M., (1967) Statistical theory of wail turbulence, *Phys. Fluids*, 10, Supplement, S I 53-S I 54.

Okamoto, M., (1963) A note on the wind and temperature profiles in the diabatic atmosphere near the ground, *Geophys. Mag. (Japan)*, 31, No. 3, 505-514.

Okubo, A., (1967) Study of turbulent dispersion by use of Lagrangian diffusion equation, *Phys. Fluids*, 10, Supplement, S72-S75.

Orlob, G. T., (1959) Eddy diffusion in homogeneous turbulence, *Proc. Amer. Soc. Civil. Engrs., J. Hydraul. Div.*, 86, No. 9, 75-101.

Orlov, V. V., (1966) Experimental study of wall turbulence in the channel, *Zh. Prikl Mat. Tekhn. Fiz.*, No. 4, 124-126.

Orr, W. M., (1906-1907) The stability or instability of the steady motions of a liquid, *Proc. Roy. Irish Acad.*, A 27, 9-27, 69-138.

Ovchinnikova, S. N., and V. I. Yudovich, (1968) Calculation of a secondary steady flow between rotating cylinders, *Prikl Mat. Mekh.*, 32, No. 5, 858-868.

Owen, P. R., and W. R. Thompson, (1963) Heat transfer across rough surfaces, *J. Fluid Mech.*, 15, No. 3, 321-334.

Paeschke, W., (1936) Experimentelle Untersuchungen zum Rauhigkeits- und Stabilitatsproblem in der bodennahen Luftschicht, *Beitr. Phys. fr. Atmosph.*, 24, No. 3, 163-189.

Pai, Shih-i, (1954) *Fluid Dynamics of Jets*, D. van Nostrand Publ., Toronto-New York-London.

Palm, E., (1960) On the tendency towards hexagonal cells in steady convection, *J. Fluid Mech.*, 8, No. 2, 183-192.

Palm, E., and H. 0iann, (1964) Contribution to the theory of cellular thermal convection, *J. Fluid Mech.*, 19, No. 3, 353-365.

Palm, E., T. ElHngsen, and B. Gjevik, (1967) On the occurrence of cellular motion in Benard convection, *J. Fluid Mech.*, 30, No. 4, 651-661.

Panchev, S., (1961) Some quantitative relationships between the statistical parameters of purely thermal turbulence in the atmosphere, *Doklady Bolg. Akad. Nauk*, 14, No. 8, 791-794.

Pandolfo, J. P., (1963) A formula relating various nondimensional parameters of turbulence fields in atmospheric surface layer under diabatic conditions, *J. Geophys. Res.*, 68, No. 10, 3249-3256; (1966) Wind and temperature profiles for constant-flux boundary layers in lapse conditions with a variable eddy conductivity to eddy viscosity ratio, *J. Atmosph. Sci.*, 23, No. 5, 495-502.

Panofsky, H. A., (1952) A comparison of different types of stress measurement, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 78, No. 337, 411-414; (1961a) An alternative derivation of the diabatic wind profile. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 87, No. 371, 109-110; (1961b) Similarity theory and temperature structure in the lower atmosphere. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 87, No. 374, 597-601; (1962) The budget of turbulent energy in the lowest 100meters, J. Geophys. Research, 67, No. 8, 3161-3165; (1962) Scalc analysis of

atmospheric turbulence at 2m. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 88, No. 375, 57-69; (1963) Determination of stress from wind and temperature measurements, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* 89, No. 37, 85-93; (1965) Reanalysis of Swinbank's Kerang observations, Final Rep. Contract No. AF(604)-6641, Pennsylvania State Univ., p. 67.

Panofsky, H. A., A. K. Blackadar, and G. E. McVehil, (1960) The diabatic wind profile, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 86, No. 369, 390-398.

Panofsky, H. A., and R. A. McCormick, (1960) The spectrum of vertical velocity near the surface, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 86, No. 370, 495-503.

Panofsky, H. A., and B. Prasad, (1965) Similarity theories and diffusion, *Int. J. Air Water Poll.*, 9,419-430.

Panofsky, H. A., N. Busch, B. Prasad, S. Hanna, E. Peterson, and E. Mares, (1967) Properties of wind and temperature at Round Hill, Dartmouth, Mass., Penn. State Univ. Res. and Develop. Tech. Rept. ECOM-0035-F.

Pasquill, F., (1949) Eddy diffusion of water vapour and heat near the ground, *Proc. Roy. Soc.*, A198, No. 1052, 116-140; (1950) The aerodynamic drag of the grassland, *Proc. Roy. Soc.*, A202, No. 1068, 143-153; (1962a) Recent broad-band spectral measurements of turbulence in the lower atmosphere, *J. Geophys. Res.*, 67, No. 8, 3025-3031, (1962b) *Atmospheric diffusion. A Study of the Dispersion of Windborne Material from Industrial and Other Sources*, D. van Nostrand Publ., London-Toronto-New York-Princeton; (1966) Lagrangian similarity and vertical diffusion from a source at ground level. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 92, No. 392, 185- 195 (also Disscussion, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* (1967), 93, No. 395, 142-144).

Patankar, S. V., and B. D. Spalding, (1967) *Heat and Mass Transfer in Boundary Layers*, Morgan-Grampian, London.

Paulson, C. A., (1967) Profiles of wind speed, temperature and humidity over the sea. Dept, of Meteorology, Univ. of Washington, Sci. Rep. NSF GP-2418.

Pedley, T. J., (1967) The stability of rotating flows with a cylindrical free su r fa c e , *J. Fluid Mech.*, 30, No. 1, 127-147.

Pekeris, C. L., (1948) Stability of a laminar flow through a straight pipe of circular cross section to infinitesimal disturbances which are symmetrical about the axis of the pipe, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 34, 285-295.

Pekeris, C. L., and B. Shkoller, (1967) Stability of plane Poiseuille flow to periodic disturbances of finite amphtude in the vicinity of the neutral curve, *J. Fluid Mech.*, 29, No. 1, 31-38.

Pellew, A., and R. V. Southwell, (1940) On maintained convective motion in a fluid heated from below, *Proc. Roy. Soc.*, A 176, No. 966, 312-343.

Perepelkina, A. V., (1957) Some results on trubulent temperature and vertical wind-velocity fluctuations, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. geofiz., No. 6, 765-778; (1959a) Determination of turbulent heat flux, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. geofiz.. No. 7, 1026-1035; (1959b) Statistical characteristics of turbulent exchange in the atmospheric surface layer. Candidate Dissertation, Inst. Phys. Atmosph. Moscow Acad. Sci. USSR; (1962) Characteristics of turbulence in the atmospheric surface layer under the conditions of free conveciion, *Izvestiya AN SSSR*. Ser. geofiz.. No. 2, 271-274.

Perry, A. E., and P. N. Joubert, (1963) Rough-wall boundary layers in adverse pressure gradients, *J. Fluid Mech.*, 17, No. 2, 193-211.

Perry, A. E., J. B. Bell, and P. N. Joubert, (1966) Velocity and temperature profiles in adverse pressure gradient turbulent boundary layers, *J. Fluid Mech.*, 25, No. 2, 299-320.

Petrov, G. I., (1937) On the stability of vortical layers, *Trudy Ts/AGI* (Proc. Centr. Aero-Hydrodyn. Inst.), No. 304; (1938) Propagation of oscillations in a viscous fluid and transition to turbulence, *Trudy Ts/AGI* (Proc. Centr. Aero-Hydrodyn. Inst.), No. 345.

Petukhov, B. S., and V. V. Kirillov, (1958) On the question of heat transfer in turbulent fluid flow in tubes, *Teploenergetika*, No. 4, 63-68.

Pfenninger, W., (1961) Transition experiments in the inlet length of tubes at high Reynolds numbers, in *Boundary Layer and Flow Control*, Vol. 2(ed. by G. V. Lachmann), Pergamon Press, Oxford-London-New York-Paris, 970-980. Philip, J. R., (1963) The theory of dispersal during laminar flow in tubes, I-II, *Austr. J. Phys.*, 16, No. 3, 287-299; 300-310; (1967) Relation between Eulerian and Lagrangian statistics, *Phys. Fluids*, 10, Supplement, S69-S71.

Phillips, O. M., (1955) The irrotational motion outside a free turbulent boundary, *Proc. Cambr Phil Soc.*, 51, No. 1, 220-229; (1966) *The Dynamics of the Upper Ocean*, Cambridge Univ. Press; (1967) The maintenance of Reynolds stress in turbulent shear flow, *J. Fluid Mech.*, 27, No. 1, 131-144.

Platzman, G., (1965) The spectral dynamics of laminar convection, *J.*

Fluid Mech., 23, No. 3, 481-510.

Plows, W. H., (1968) Some numerical results for two-dimensional steady laminar Benard convection, *Phys. Fluids*, 11, No. 8, 1593-1599.

Polavarapu, R. J., and R. E. Munn, (1967) Direct measurement of vapor pressure fluctuations and gradients, *J. Appl. Meteor.*, 6, No. 4, 699-706.

Ponomarenko, Yu. B., (1965) On the "hard self-excitation" of the stationary motions in fluid dynamics, *Prikl. Mat. i Mekh.*, 29, No. 2, 309-321; (1968a) On the generation of space-periodic motions in the fluid dynamics, *Prikl. Mat. i Mekh.*, 32, No. 1, 46- 58; (1968b) Processes of the establishment of hexagonal convection cells, *Prikl. Mat. i Mekh.*, 32, No. 2, 244-255; (1968c) On stabiUty of the plane Couette flow, *Prikl Mat. i Mekh.*, 32, No. 4, 609-614.

Popovich, A. T., and R. L. Hummel, (1967) Experimental study of the viscous sublayer in turbulent pipe flow, *A.I.Ch.E. J.*, 13, No. 5, 854-860.

Potter, M. C., (1966) Stability of plane Couette-Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.*, 24, No. 3, 609-619; (1967) Linear stability theory of symmetrical parabolic flows, *Phys. Fluids*, 10, No. 3, 479-489.

Prandtl, L., (1910) Eine Beziehung zwischen Warmeaustausch und Stromungwiderstand der Fliissigkeiten, *Phys. Zs.*, 11, 1072-1078; (1914) Uber den Luftwiderstand von Kugeln, *Nachr. Ges. Wiss. Gottingen*, Math.-Phys. Kl . 177-190; (1921) Bemerkungen iiber die Entstehung der Turbulenz, Zs. angew. Math. Mech,, 1, No. 6, 431-436; (1925) Bericht iiber Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz, *Zs. angew. Math. Mech.*, 5, No. 2, 136-139; (1927) Uber den Reibungswiderstand stromender Luft, *Ergebn. Aerodyn. Versuchsanst.*, Gottingen, 3, 1-5; (1928) Bemerkung iiber den Warmeiibergang im Rohr, *Phys. Zs.*, 29, No. 14, 487-489; (1932a) Meteorologische Anwendungen der Stromungslehre, *Beitr. Phys. fr. Atmosph.*, 19, No. 3, 188- 202; (1932b) Zur turbulenten Stromung in Rohren und langs Flatten, *Ergebn. Aerodyn. Versuchsanst*, Gottingen, 4, 18-29; (1942) Bemerkungen zur Theorie der freien Turbulenz, *Zs. angew Math. Mech.*, 22, No. 5, 241-243; (1945) Uber ein neues Formelsystem fiir die ausgebildeteTurbulenz, *Nachr. Ges. Wiss. Gottingen*, Math.-Phys. Kl., 6-19; (1949) *Führer durch die Stromungslehre*, 3ed., Braunschweig, F. Vieweg.

Pretsch, J., (1941a) Die Stabilitat einer ebenen Laminarstromung bei Druckgefalle und Druckansteig, *Jahresber. deutsch. Luftfahrtf.*, 1, 158-175; (1941b) Uber die StabiUtat einer Laminarstromung in einem geraden Rohr

mit kreisformigem Querschnitt, *Zs. angew. Math. Mech.*, 21, No. 3, 204-217.

Pries, T. H., and J. P. Appleby, (1967) The distribution of eddy velocities and temperature fluctuations in the first 100 meters. *Technical Report ECOM-6027*, U.S. Electr. Command, Fort Huachuca, Arizona.

Priestley, C. H. B., (1954) Convection from a large horizontal surface, *Austr. J. Phys.*, 7, No. 2, 176-201; (1955) Free and forced convection in the atmosphere near the ground, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 81, No. 348, 139-143; (1956) Convection from the Earth's surface, *Proc. Roy. Soc.*, A238, No. 1214, 287-304; (1959a) *Turbulent Transfer in the Lower Atmosphere*, Chicago Univ. Press; (1959b) Estimation of surface stress and heat flux from profile data. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 85, No. 366, 415-418; (1960a) A determinant hypothesis for the superadiabatic wind and temperature profiles. *Quart.. J. Roy. Meteor. Soc.*, 86, No. 368, 232-236; (1960b) Temperature fluctuations in the atmospheric boundary layer, *J. Fluid Mech.*, 7, No. 3, 375-384; (1961) An alternative derivation of the diabatic wind profile, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 87, No. 373, 437-438; (1962) Free convection in a wind. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 88, No. 375, 100-101; (1963) Eddy diffusion in shear zones. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 89, No. 380, 287-288; (1963-1964) Recent flux and profile measurements in Australia. Report at a symposium at Berkeley, 30 August 1963, and private correspondence 7 April 1964.

Priestley, C. H. B., and W. C. Swinbank, (1947) Vertical transport of heat by turbulence in the atmosphere, *Proc. Roy. Soc.*, A189, No. 1019, 543-561.

Prokhorov, Yu. V., (1961) The method of characteristic functionals, *Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Stat. Probab.*, 2, Berkeley-Los Angeles, Univ. Calif. Press, 403-419.

Proudman, J., (1953) *Dynamical Oceanography*, Methuen Publ., London.

Rannie, W. D., (1956) Heat transfer in turbulent shear flow, *J. Aeronaut. Sci.*, 23, No. 5,485-489.

Rayleigh, (1880, 1887, 1895) On the stability, or instability, of certain fluid motions, I-III, *Sci. Papers*, Cambridge Univ. Press, 1, 474-487; 3, 17-23; 4, 203-209; (1892) On the question of the stability of the flow of fluids, in *Sci. Papers*, Cambridge Univ. Press, London and New York, 3, 575-584;

(1894) *The Theory of Sound*, MacMillian Publ., London; (1913) On the stability of the laminar motion of an inviscid fluid, *Sci. Papers*, Cambridge Univ. Press, 6, 197-204; (1916a) On the dynamics of revolving fluids, *Sci. Papers*. Cambridge Univ. Press. 6, 447-453; (1916b) On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side, *Sci. Papers*, Cambridge Univ. Press, 6,432-443.

Record, F. A., and H. E. Cramer, (1966) Turbulent energy dissipation rates and exchange processes above a non-homogeneous surface. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 92, No. 394, 519-532.

Reichardt, H., (1938) Messungen turbulenter Schwankungen, *Naturwiss* 26, No. 24/25, 404-408; (1940) Die Warmeiibertragung in turbulenten Reibungsschichten, *Zs. angew. Math. Mech.*, 20, No. 6, 297-328; (1942) Gesetzmassigkeiten der freien Turbulenz, *VDl-Forschungs*, No. 414; (1951a) Vollstandige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen, *Zs. angew. Math. Mech.*, 31, No. 7, 208-219; (195lb) Die Grundlagen des turbulenten Warmeiiberganges, *Arch. Ges. Wdrmetech.*, 2, 129-142.

Reid, W. H., (1965) The stability of parallel flows. *Basic Developments in Fluid Mechanics* (ed. by M. Holt), Academic Press, New York-London, 249-307; (1966) Asympotic approximations in hydrodynamic stabiUty. *Non-equilibrium Thermodynamics, Variational Techniques, and Stability* (ed. by R. J. Donnelly, R. Herman, and L Prigogine), Chicago Univ. Press, 115-123.

Reid, W. H., and D. L. Harris, (1958) Some further results on the Benard problem, *Phys. Fluids*, 1, No. 2, 102-110; (1964) On the stability of viscous flow between rotating cylinders, *J. Fluid Mech.*, 20, No. 1, 95-101.

Reynolds, A. J., (1965) Wall layers with non-uniform shear stress, *J. Fluid Mech.*, 22, No. 3,443-448.

Reynolds, O., (1874) On the extent and action of the heating surface of steam boilers, *Proc. Lit. Phil. Soc. Manchester*, 14, 7- 12; (1883) An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 174, 935-982; (1894) On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 186, 123-161.

Reynolds, W. C., and M. C. Potter, (1967) Finite-amplitude instability of parallel shear flows, *J. Fluid Mech.*, 27, No. 3, 465-492.

Reynolds, W. C., and W. G. Tiederman, (1966) Stability of turbulent channel flow, with application to Malkus' theory, *J. Fluid Mech.*, 27, No. 2, 253-272.

Reynolds, W. C., W. M. Kays, and S. J. Kline, (1958) Heat transfer in the turbulent incompressible boundary layer 1-Constant wall temperature, *NASA Tech. Mem. 12-1-58W.*

Ribaud, G., (1940) Courbe des vitesses au voisinage de la paroi en regime d 'ecoulement turbulent, deduite des mesures de convection, *Compre Rend. Acad, Sci.*, 211, No. 22, 541543; (1941) Nouvelle expression du coefficient de convection de la chaleur en regime d 'ecoulement turbulent, *J. Phys. Radium* (8), 2, No. 1, 12-25.

Richardson, L. F., (1920) The supply of energy from and to atmospheric eddies, *Proc, Roy. Soc.*, A97, No. 686, 354-373; (1922) *Weather Prediction by Numerical Process*, Cambridge Univ. Press; (1926) Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph, *Proc. Roy. Soc.*, Al lO, No. 756, 709-737.

Rider, N. E., (1954) Eddy diffusion of momentum, water vapour and heat near the ground, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A246, No. 918,481-501.

Rider, N. E., and G. D. Robinson, (1951) A study of the transfer of heat and water vapour above a surface of short grass, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 11 No. 333, 375-401.

Riis, E., (1962) The stability of Couette flow in non-stratified and stratified viscous fluids, *Geofys. Publik.* (Oslo), 23, No. 4, 3-37.

Rijkoort, P. J., (1968) The increase of mean wind speed with height in the surface friction layer, *Meded. en Verhand.* No. 91, Royal Netherl. Meteor. Inst., 115 pp.

Rivlin, R. S., (1957) The relation between the flow of non-Newtonian fluids and turbulent Newtonian fluids, *Quart. Appl. Math.*, 15, 212-215.

Roberts, P. H., (1965) The solution of the characteristic value problems, *Proc. Roy. Soc.*, A283, No. 1395, 550-555(appendix to Donnelly and Schwarz, 1968); (1966) On nonlinear Benard convection, in *Non-equilibrium Thermodynamics, Variational Techniques, and Stability* (ed. by R. J. Donelly, R. Herman, I. Prigogine). The University of Chicago Press, Chicago, 125-162.

Robertson, J. M., (1957) The turbulent velocity distribution in rough pipe, *Proc. 5th Midwestern Conf. Fluid Mech.*, Univ. of Michigan Press,

Ann Arbor.

Robinson, G. D., (1950) Two notes on temperature changes in the troposphere due to radiation, *Centenn. Proc. Roy. Meteor. Soc.*, 26-33; (1951) The vertical convective heat flux in the atmosphere-a critical essay, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 77, No. 331, 61-73.

Roll, H. U., (1965) *Physics of the Marine Atmosphere*, Academic Press, New York-London.

Rosenbluth, M. N., and A. Simon, (1964) Necessary and sufficient condition for the stability of plane parallel inviscid flow, *Phys. Fluids*, 7, No. 4, 557-558.

Rosencrans, S. I., and D. H. Sattinger, (1966) On the spectrum of an operator occurring in the theory of hydrodynamic stability, *J. Math, and Phys.*, 45, No. 3,289-300.

Rossby, C. G., (1948) On the nature of the general circulation in the lower atmosphere. *The Atmospheres of the Earth and Planets* (ed. by G. P. Kuiper), Chicago Univ. Press, chapt. 2.

Rossby, C. G., and R. B. Montgomery, (1935) The layer of frictional influence in wind and ocean currents, *Pap. Phys. Oceanogr. Meteor.*, 3,No. 3.

Rota, G. C., (1960) Spectral theory of smoothing operations, *Proc. Nat. Acad. Sci.* USA 46, No. 6, 863-868.

Rotta, J. C., (1950) Das in Wandn e giiltige Geschwindigkeitsgesetz turbulenter Stromungen, *Ing. Arch.*, 18, No. 4, 277-280; (1951a) Beitrag zur Berechnung der turbulenten Grenzschichten, *Ing. Arch.*, 19, No. 1, 31-41; (1951b) Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz, 1, *Zs. Phys.*, 129, No. 5, 547-572; (1951c) Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz, 2, *Zs. Phys.*, 131, No. 1, 51-77; (1956) Experimentcller Beitrag zur Entstehung turbulenter Stromung im Rohr, *Ing. Arch.*, 24, No. 4, 258281; (1962a) Incompressible turbulent boundary layers, *Mécanique de la turbulence* (Colloque Intern, du CNRS a Marseille), Paris, Éd. CNRS, 255-283; (1962b) Turbulent boundary layers in incompressible flow, *Progr. Aeronaut. Sci.*, 2, Pergamon Press, Oxford-London-New York-Paris, 1-219.

Rounds, W., (1955) Solutions of the two-dimensional diffusion equations, *Trans. Amer. Geophys. Union*, 36, No. 2, 395-405.

Rozanov, Yu. A., (1967) *Stationary Random Processes*, Holden-Day (tr. by A. Feinstein), San Francisco, Cal.

Saffman, P. G., (1960) On the effect of the molecular diffusivity in turbulent diffusion, *J. Fluid Mech.*, 8, No. 2, 273- 283; (1962a) Some aspects of the effects of the molecular diffusivity in turbulent diffusion, *Mécanique de la turbulence* (Coll. Intern, du CNRS a Marseille), Paris, Ed. CNRS, 53-62; (1962b) The effect of wind shear on horizontal spread from instantaneous ground source. *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, 88, No. 378, 382-393;(1963) An approximate calculation of the Lagrangian auto correlation coefficient for stationary homogeneous turbulence, *Appl. Scient. Res.*, All, No. 3, 245-255.

Sakipov, Z. B., and D. Zh. Temirbayev, (1965) On the ratio of eddy diffusivities for momentum and heat in a free turbulent jet, in *Heat- and Mass Transfer* (Proc. 2nd All Soviet Union Conf., ed. by A. V. Lykov and B. M. Smol'skiy), Minsk, Publ. House "Nauka i Tckhnika," 407413.

Salwen, H., and C. E. Grosch, (1968) Stabihty of Poiseuille How in a circular pipe. *Bull. Amer. Phys. Soc.*, 13, No. 5, 814.

Sani, R., (1964) On the non-existence of subcritical instabilities in fluid layers heated from below, *J. Fluid Mech.*, 20, No. 2, 315-319.

Sato, H., (1959) Further investigation on the transition of two-dimensional separated layer at subsonic speeds, *J. Phys. Soc. Japan*, 14, 1797-1810; (1960) The stability and transition of a two-dimensional jet , *J. Fluid Mech.*, 7, No. 1,53-80.

Sato, H., and 0. Okada, (1966) The stabihty and transition of an axisymmetric wake, *J. Fluid Mech.*, 26, No. 2, 237-253.

Sato, H., and F. Sakao, (1964) An experimental investigation of the instability of a two-dimensional jet at low Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.*, 20, No. 2, 337-352.

Scanlon, J. W., and L. A. Segel, (1967) Finite amplitude cellular convection induced by surface te n s io n , *J. Fluid Mech.*, 30, No. 1, 149-162.

Schade, H., (1962) Zum Stabilitatstheorie axialsymmetrischer Parallelstromungen, *Ing. Arch.*, 31, No. 5, 301-316; (1964) Contribution to the nonlinear stability theory of inviscid shear layers, *Phys. Fluids*, 7, No. 5, 623-628.

Schensted, I. V., (1960) *Contributions to the Theory of Hydrodynamic Stability*, Ph. D. Thesis, University of Michigan.

Schiller, L., (1932) Stromung in Rohren, *Handbuch der Experimentalphysik*, 4, No. 4; (1934) Neue quantitative Versuche zur Turbulenzentste-

hung, *Zs. angew. Math. Mech.*, 14, No. 1, 36-48.

Schlichting, H., (1933a) Zur Entstehung der Turbulenz bei der Plattenstromung, *Nachr. Ges. Wiss. Gottingen*, Math.-phys. Kl. , 160-198; (1933b) Berechnung der Anfachung kleiner Storungen bei der Plattenstromung, *Zs. angew. Math. Mech.*, 13, No. 3, 171-174; (1935a) Amplitudenverteilung und Energiebilanz der kleinen Storungen bei der Plattengrenzschicht, *Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, Math.-phys.* Kl ., 1, 47-78; (1935b) Turbulenz bei Wmeschichtung, *Z. angew. Math. Mech.*, 15, No. 6, 313-338; (1936) Experimentelle Untersuchungen zum Rauhigkeitsproblem, *Ing. Arch.* 7, No. 1, 1-34; (1959) Entstehung der Turbulenz, *Handbuch der Physik*, Berlin; (1960) *Boundary Layer Theory* (4th ed.), McGraw-Hill Book Co., New York.

Schliiter, A., D. Lortz, and F. H. Busse, (1965) On the stability of steady finite amplitude convection, *J. Fluid Mech.*, 23, No. 1, 129-144.

Schmidt, W., (1917) Der Massenaustausch bei der ungeordneten Stromung in freier Luft und seine Folgen, *Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien*, Math.-nat. Kl . (2a), 126, No. 6, 757-804; (1925) Der Massenaustausch in freier Luft und verwandte Erscheinungen, Hamburg, Grand.

Schneck, P., and G. Veronis, (1967) Comparison of some recent experimental and numerical results in Benard convection, *Phys. Fluids*, 10, No. 5, 927-930.

Schoenherr, K. E., (1932) Resistance of flat surfaces moving through a fluid, *Trans. Soc. Nav. Arch. Marine Eng.*, 40, 279-313.

Schubauer, G. B., and P. S. Klebanoff, (1956) Contributions on the mechanics of boundary-layer transition, *Nat. Adv. Com, Aeronaut. Rep.* No. 1289.

Schubauer, G. B., and H. K. Skramstad, (1947) Laminar boundary-layer oscillations and stabiHty of laminar flow, *J. Aeronaut. Sci.*, 14, No. 2, 69-78.

Schubauer, G. B,, and C. M. Tchen, (1959) Turbulent flow. *Turbulent Flow and Heat Transfer* (ed. by C. C. Lin), Princeton Univ. Press, 75-195.

Schubert, G., and G. M. Corcos, (1967) The dynamics of turbulence near a wall according to a linear model, *J. Fluid Mech.*, 29, No. 1, 113-135.

Schultz-Grunow, F., (1940) Neues Reibungswiderstandgesetz fiir glatte Flatten, *Luftfahrtforsch.*, 17, No. 8, 239-246.

Schultz-Grunow, F., (1967) The stability of circular Couette flow with

respect to two-dimensional perturbations. *Fluid Dynamics Transactions*, Vol. 3(ed. by W. Fiszdon, P. Kucharczyk, W. J. Prosnak) Panstwowe wydawnictwo naukowe, Warszawa, 83-93.

Schwarz, K. W., B. E. Springett, and R. J. Donelly, (1964) Modes of instability in spiral flow between rotating cylinders, *J. Fluid Mech.*, 20, No. 2, 281-289.

Schwarz, W. H., and W. P. Cosart, (1961) The two-dimensional turbulent wall-jet, *J. Fluid Mech.*, 10, No. 4, 481-495.

Segel, L. A., (1962) The nonlinear interaction of two disturbances in the thermal convection problem, *J. Fluid Mech.*, 14, No. 1, 97-114; (1965) The nonlinear interaction of a finite number of disturbances to a layer of fluid heated from below, *J. Fluid Mech.*, 21, No. 2, 359-384; (1966) Non-linear hydrodynamic stability theory and its applications to thermal convection and curved flows. *Non-equilibrium Theormo-dynamics, Variational Techniques, and Stability* (ed. by R. J. Donnelly, R. Herman, and I. Prigogine), Chicago Univ. Press, 165-197.

Segel, L. A., and J. T. Stuart, (1962) On the question of the preferred mode in cellular thermal convection, *J. Fluid Mech.*, 13, No. 2, 289-306.

Selig, F., (1964) Variational principle for Rayleigh-Taylor instability, *Phys. Fluids*, 7, No. 8, 1114-1116.

Sellers, W. D., (1962) A simplified derivation of the diabatic wind profile, *J. Atmosph. Sci.*, 19, No. 2, 180-181.

Serrin, J., (1959) On the stability of viscous fluid motions, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 3, No. 1, 1-13.

Sexl, T., (1927a) Zur Stabilitätsfrage der Poiseuilleschen und Couetteschen Stromung, Ann. Physik, 83, 835-848; (1927b) Über dreidimensionale Storungen der Poiseuilleschen Stromung, *Ann. Physik*, 84, 807-822.

Sexl, T., and J. Spielberg, (1958) Zum Stabilitatsproblem der Poiseuilleschen Stromung, *Acta Phys. Austr.*, 12, No. 1, 9- 28.

Shcherbakova, L. F., (1949) Some methods of characterizing turbulent exchange in terms of observational data for the lower atmosphere, *Trudy Glavn. Geofiz. Observ.*,No. 16(78), 25-51.

Shen, S. F., (1954) Calculated amplified oscillations in plane Poiseuille flow and Blasius flows, *J. Aeronaut. Sci.*, 21, No. 1, 62-64; (1964) Stability of laminar flows. *Theory of Laminar Flows* (ed. by F. K. Moore), Princeton Univ. Press, 719-853.

Sheppard, P. A., (1947) The aerodynamic drag of the earth's surface and the value of von Kármán's constant in the lower layer, *Proc. Roy. Soc.*, A188, No. 1013, 208-222.

Sherwood, T. K., (1950) Heat transfer, mass transfer and fluid friction relationships in turbulent flow, *Ind. Eng. Chem.*, 42, No. 10, 2077-2084.

Shiotani, M., (1955) On the fluctuation of the temperature and turbulent structure near the ground, *J. Meteor. Soc. Japan*, 40, No. 3, 117-123; (1962) The relationship between wind profiles and stabilities of the air layer in the outskirts of the city, *J. Meteor. Soc. Japan*, 40, No. 6, 315-329.

Sibulkin, M., (1962) Transition from turbulent to laminar pipe flow, *Phys. Fluids*, 5, No. 3, 280-284.

Silveston, P. L., (1958) Warmedurchgang in waagerechten Fliissigkeitsschichten, I- II, *Forsch. Gebiete Ingenieurwes.*, 24, 29-32; 59-69; (1963) Convectional heat transport between rigid horizontal boundaries, *Phys. Fluids*, 6, No. 2, 313-314.

Simmons, L. F. G., and C. Salter, (1938) An experimental determination of the spectrum of turbulence, *Proc. Roy. Soc.*, A165, No. 920, 73-89.

Sleicher, C. A., Jr., (1958) Experimental velocity and temperature profiles for air in turbulent pipe flow, *Trans. Amer. Soc. Mech. Engrs.*, 80, No. 3, 693-704.

Slutskiy, E. E., (1938) Sur les fonctions aleatoires presque periodiques et sur la decomposition des fonctions aleatoires stationnaires en composantes. *Actual. Scient. Industr.*, No. 738, 33-55.

Smith, D. W., and J. H. Walker, (1959) Skin-friction measurements in incompressible flow, *Nat. Aeronaut. Space Adm.*, Report R-26.

Smith, F. B., (1957) The diffusion of smoke from a continuous elevated point source into a turbulent atmosphere, *J. Fluid Mech.*, 2, No. 1, 49- 76; (1965) The role of wind shear in horizontal diffusion of ambient particles, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 91, No. 389, 318-329(see also Discussion, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* (1966), 92, No. 393,427-430).

Snyder, H. A., (1968a) Stability of rotating Couette flow, I. Asymmetric waveforms. *Phys. Fluids*, 11, No. 4, 728-734; (1968b) Stability of rotating Couette flow. II. Comparison with numerical *Phys. Fluids*, 11, No. 8, 1599-1605.

Snyder, H. A., and S. K. F. Karlsson, (1965) Nonaxisymmetric modes

of secondary flow, *Bull. Am. Phys. Soc.*, 10, 24.

Snyder, H. A., and R. B. Lambert, (1966) Harmonic generation in Taylor vortices between rotating cylinders. *J. Fluid Mech.*, 26, No. 3, 545-562.

Son, J. S., and T. J. Hanratty, (1967) Limiting relation for the eddy diffusivity close to a wall, *A.I.Ch.E. J.*, 13, No. 4, 689-696.

Soprunenko, 1. P., (1965) The stability of jet flows, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. Mekh., No. 4, 31-35.

Sorger, P., (1966) Uber ein Variationsproblem aus der nichtlinearen Stabilitatstheorie zaher inkompressibler Stromungen. *Zs. angew. Math. Phys.* 17, No. 2, 201-216; (1967) Ein hinreichenes Stabilitatskriterium fiir Couette-Stromungen, *Zs. angew. Math, und Mech.*, 47, Sonderheft, T126-T128.

Sorokin, V. S., (1953) Variational principle in the theory of convection, *Prikl. Mat. Mekh.*, 17, No. 1, 39- 48; (1954) Stationary motions of a fluid heated from below, *Prikl. Mat. Mekh.*, 18, No. 2, 197-204; (1961) Nonlinear effects in bounded flows at the Reynolds numbers near to the critical one, *Prikl. Mat. Mekh.*, 25, No. 2, 248-258.

Southwell, R. V., and L. Chitty, (1930) On the problem of hydrodynamic stability, I. Uniform shearing motion in a viscous fluid, *Phil Trans. Roy. Soc. London*, A229, 205-283.

Spalding, D. B., (1961) A single formula for the "law of the wall," *J. Appl. Mech.*, 28E, No. 3, 455-457; (1963) Heat transfer between a plate and the turbulent flow of a fluid, *Inzh.-Fiz. Zhurn.*, 6, No. 3, 21-33; (1964) A unified theory of friction, heat transfer and mass transfer in the turbulent boundary layer and wall jet, *Aero. Res. Counc.*, Rep. No. 25, 925; (1967) Theories of the turbulent boundary layer, *Appl. Mech. Rev.*, 20s; No. 8, 735-740.

Spalding, D. B., and C. L. V. Jayatillaka, (1968) A survey of the theoretical and experimental information on the resistance of the laminar sublayer to heat and mass transfer. *Heat- and Mass Transfer* (Proc. 2nd All Soviet Union Conf., ed. by A. V. Lykow and B. M. Smol'skiy), Vol. 2, Nauka i Tekhnika Publ. House, Minsk, 234-264.

Sparrow, E. M., R. J. Goldstein, and V. K. Jonsson, (1964) Thermal instability in a horizontal fluid layer: effect of boundary condition and nonlinear temperature profile, *J. Fluid Mech.*, 18, No. 4, 513-528.

Sparrow, E. M., W. D. Munro, and V. K. Jonsson, (1964) Instability of

the flow between rotating cylinders: the wide-gap problem, *J. Fluid Mech.*, 20, No. 1,35-46.

Spiegel, E. A., (1962) On the Malkus theory of turbulence, *Mécanique de la turbulence* (Colloq. Intern, du CNRS a Marseille), Paris, Éd. CNRS 181-201.

Squire, H. B., (1933) On the stability of the three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls, *Proc. Roy. Soc.*, A142, No. 847, 621-628; (1948) Reconsideration of the theory of free turbulence, *Phil. Mag.* 39, No. 288, 1-14.

Squire, W., (1964) Turbulent heat and mass transfer in smooth pipes, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 7, No. 10, 1069-1076.

Starr, V. P., (1968) *Physics of Negative Viscosity Phenomena*, McGraw-Hill Book Co., New York-St. Louis-San Francisco-Toronto-London-Sydney.

Steinman, H., (1956) The stability of viscous flow between rotating cylinders, *Quart. Appl. Math.*, 14, No. 1, 27-33.

Sternberg, J., (1962) A theory for the viscous sublayer of a turbulent fluid, *J. Fluid Mech.*, 13, No. 2, 241-271; (1965) The three-dimensional structure of the viscous, *AGARDograph* 97.

Stewart, R. W., (1956) Irrotational motion associated with free turbulent flows, *J. Fluid Mech.*, 1, No. 6, 593-606; (1959) The problem of diffusion in a stratified fluid, *Adv. Geophys.*, 6(Atmospheric diffusion and air pollution), 303-311.

Stuart, J. T., (1958) On the nonlinear mechanics of hydrodynamic stability, *J. Fluid Mech.*, 4, No. 1, 1-21; (1960) On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. Part 1. The basic behaviour in plane Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.*, 9, No. 3, 353-370; (1962) On three-dimensional nonlinear effects in the stability of parallel flow, *Advances Aeronaut. Sci.*, Vol. 3, Pergamon Press, Oxford-London-N. Y.-Paris, 121-142; (1963) *Hydrodynamic Stability, Laminar Boundary Layers* (ed. by L. Rosenhead), Oxford Univ. Press, London, 492-579; (1964) On the cellular patterns in thermal convection, *J. Fluid Mech.*, 18, No. 4, 481-498; (1965) Hydrodynamic stability, *Appl. Mech. Revs.*, 18, No. 7, 523-531; (1967) On finite amplitude oscillations in laminar mixing layers, *J. Fluid Mech.*, 29, No. 3,417-440.

Subbotin, V. I., M. Kh. Ibragimov, and Ye. V. Nomofllov, (1963) Determinalion of the relation between the heat and momentum transfer

coefflcients, *Atomnaya Energiya*, 14, No. 4, 414-416.

Sutton, O. G., (1932) The theory of eddy diffusion in the atmosphere, *Proc. Roy. Soc.*, A135, No. 826, 143-165; (1934) Wind structure and evaporation in a turbulent atmosphere, *Proc. Roy. Soc.*, A146, No. 858, 701- 722; (1936) The logarithmic law of wind structure near the ground. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 62, No. 271, 124-126; (1937) The logarithmic law of wind structure near the ground. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 63, No. 275, 105-107; (1949) The application to micrometeorology of the theory of turbulent flow over rough surfaces. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 75, No. 326, 335-350; (1950) On the stabihty of a fluid heated from below, *Proc. Roy. Soc.*, A204, No. 1078, 291-309;(1953) *Micrometeorology*, McGraw-Hill Book Co., N. Y.-Toronto-London.

Sverdrup, H. U., (1936) The eddy conductivity of the air over a smooth snow field, *Geophys. Pub.*, 11, No. 7.

Swinbank, W. C., (1951a) The measurement of vertical transfer of heat and water vapour and momentum in the lower atmosphere with some results, *J. Meteor.*, 8, No. 2, 135-145; (1951b) A sensitive vapour pressure recorder, *J. Scient. Instr.*, 28, No. 3, 86-89; (1955) An experimental study of eddy transports in the lower atmosphere, *C.S.I.R.O., Div. Meteor. Phys.*, Tcchn. Pap. No. 2, Melbourne; (1960) Wind profile in thermally stratified flow. Nature, 186, No. 4723, 463-464; (1964) The exponential wind profile. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 90, No. 384, 119-135; (1966) Discussion on a paper: "The exponential wind profile," *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 92, No. 393, 416- 426; (1968) A comparison between predictions of dimensional analysis for the constant-flux layer and observations in unstable conditions, *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 94, No. 402, 460-467.

Swinbank, W. C., and A. J. Dyer, (1967) An experimental study in micrometeorology, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 93, No. 398, 494- 500; (1968) Micrometeorological Expeditions 1962-1964, *C.S.I.R.O., Div. Meteor. Phys.*, Techn. Pap. No. 17, Melbourne.

Synge, J. L., (1933) The stability of heterogeneous liquids, *Trans. Roy. Soc. Canada*, 27, No. 1, 1- 18; (1938) Hydrodynsimic sidbiliiy, *Semicentennial publications of the Amer. Math. Soc.*, 2(Addresses), 227-269.

Syono, S., and M. Hamuro, (1962) Notes on the wind-profile in the lower layer of a diabatic atmosphere, *J. Meteor. Soc. Japan*, ser. II, 40, No. 1, 1-12.

Szablewski, W., (1968) Turbulente Parallelstrdmungen, *Zs. angew. Math. Mech.*, 48, No. 1,35-50.

Takeda, K., (1951) On the atmospheric turbulence, II. On the generalized exponential formula, *J. Meteor. Soc. Japan*, 29, No. 7, 243-245.

Takeuchi, K., (1961) On the structure of the turbulent field in the surface boundary layer, *J. Meteor. Soc. Japan*, 39, No. 6, 346-367; (1962) On the nondimensional rate of dissipation of turbulent energy in the surface boundary layer, *J. Meteor. Soc. Japan*, 40, No. 3, 127-135.

Takeuchi, K., and O. Yokoyama, (1963) The scale of turbulence and the wind profile in the surface boundary layer, *J. Meteor. Soc. Japan*, 41, No. 2, 108-117.

Tam, C. K. W., (1967) A note on disturbances in slightly supercritical plane Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.*, 30, No. 1, 17-20.

Tam, K. K., (1968) On the asymptotic solution of the Orr-Sommerfeld equation by the method of multiple-scales, *J. Fluid Mech.*, 34, No. 1, 145-158.

Tani, I., (1967) Review of some experimental results on boundary-layer transition, *Phys. Fluids* 10, Supplement (No. 9, Part II), SI 1-S16.

Tani, I., and H. Komoda, (1962) Boundary layer transition in presence of streamwise vortices, *J. Aerosp. Sci.*, 29,440-444.

Tanner, C. B., and W. L. Pelton, (1960) Potential evapotranspiration estimates by the approximate energy balance method of Penman, *J. Geophys. Research*, 65, No. 10, 3391-3413.

Tatsumi, T., (1952) Stability of the laminar inlet-flow prior to the formation of Poiseuille regime, I- II, *J. Phys. Soc. Japan*, 7, 489- 494,495-501.

Tatsumi, T., and K. Gotoh, (1960) The stability of free boundary layers between two uniform streams, *J. Fluid. Mech.*, 7, No. 3, 433-441.

Tatsumi, T., and T. Kakutani, (1958) The stability of a two-dimensional laminar jet, *J. Fluid Mech.*, 4, No. 3, 261-275.

Taylor, G. I., [All references by Taylor, with the exception of 1959 may be also found in the book, G. I. Taylor, Scientific Papers, Vol. 2, Cambridge University Press, I960.] (1915) Eddy motion in the atmosphere, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A215, 1-26; (1916) Conditions at the surface of a hot body exposed to the wind, *Brit. Adv. Com. Aero. Rep. and Memor.*, 272; (1921) Diffusion by continuous movements, *Proc. London Math. Soc.*

(2), 20, 196-211; (1923) Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A223, 289-343; (1931) Effect of variation in density on the stability of superposed streams of fluid, *Proc. Roy. Soc.*, A132, No. 820, 499-523; (1932) The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion, *Proc. Roy. Soc.*, A135, No. 828, 685-706; (1935a) Statistical theory of turbulence, I-III, *Proc. Roy. Soc.*, A151, No. 874, 421-464; (1935b) Statistical theory of turbulence. IV. Diffusion in a turbulent air stream, *Proc. Roy. Soc.*, A151, No. 874, 465-478; (1935c) Distribution of velocity and temperature between concentric rotating cylinders, *Proc. Roy. Soc.*, A151, No. 874, 494-512; (1936a) Statistical theory of turbulence. V. Effect of turbulence on boundary layer. *Proc. Roy. Soc.*, A156, No. 888, 307-317; (1936b) Fluid friction between rotating cylinders. I. Torque measurements, *Proc. Roy. Soc.*, A157, No. 892, 546-564; (1938) Some recent developments in the study of turbulence, *Proc. 5th Int. Congr. Appl. Mech.*, Cambridge (USA), 294-310; (1953) Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube, *Proc. Roy. Soc.*, A219, No. 1137, 186-203; (1954a) The dispersion of matter in turbulent flow through a pipe, *Proc. Roy. Soc.*, A223, No. 1155, 446-468; (1954b) Conditions under which dispersion of a solute in a stream of solvent can be used to measure molecular diffusion, *Proc. Roy. Soc.*, A225,No. 1163, 473-477; (1959) The present position in the theory of turbulent diffusion, *Adv. Geophys.*, 6(Atmospheric diffusion and air pollution), 101-112.

Taylor, R. J., (1952) The dissipation of kinetic energy in the lowest layers of the atmosphere. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 78, No. 336, 179-185; (1956a) Some measurements of heat flux at large negative Richardson number, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 82, No. 351, 89-91; (1956b) An electronic analogue of the saturated vapour pressure curve of water, *J. Scient. Instr.*, 33, No. 11, 436-438; (1958) A linear unidirectional anemometer of rapid response, *J. Scient. Instr.*, 35, No. 1, 47-52; (1960a) Similarity theory in the relation between fluxes and gradients in the lower atmosphere, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 86, No. 367, 67-78; (1960b) The wind profile in the atmospheric surface layer, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. geofiz., No. 12, 1821- 1827; (1963) The effect of instrumental inertia on measurement of the turbulent flux of water vapour, *Austr. J. Appl. Sci.*, 14, No. 1, 27-37.

Taylor, R. J., and A. J. Dyer, (1958) An instrument for measuring evaporation from natural surfaces. *Nature*, 181, No. 4606, 408-409.

Taylor, R. J., and E. K. Webb, (1955) A mechanical computer for micrometeorological research, *C.S.I.R.O., Div. Meteor. Phys.*, Techn. Pap. No. 6, Melboume.

Tempel'man, A. A., (1962) Ergodic theorems for homogeneous generalized random fields and homogeneous random fields on groups. *Lithuan. Mat. Shorn.* 2, No. 1.

Thomas, L. H., (1953) The stability of plane Poiseuille flow, *Phys. Rev.*, 91, No. 5, 780-783.

Thomas, D. B., and A. A. Townsend, (1957) Turbulent convection over a heated horizontal surface, *J. Fluid Mech.*, 2, No. 5, 473-492.

Thompson, B. G. J., (1963) *The Calculation of Turbulent Boundary Layers*, Ph. D. Dissertation, Cambridge University; (1965) A new two-parameter family of mean velocity profiles for incompressible turbulent boundary layers on smooth walls, *Aero. Res. Counc. Rep.* No. 26, 830.

Thompson, H. A., and H. H. Sogin, (1966) Experiments on the onset of thermal convection in horizontal layers of gases, *J. Fluid Mech.*, 24, No. 3, 451-479.

Thompson, N., (1965) Short-range vertical diffusion in stable conditions. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 91, No. 388, 175-183(also Discussion, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* (1967), 93, No. 397, 383-386.

Thornthwaite, C. H., and P. Kaser, (1943) Wind-gradient observations, *Trans. Amer. Geophys. Union*, 24, No. 1, 166-182.

Tien, C. L., (1964) A note on distributions of temperature and eddy diffusivity for heat in turbulent flow near a wall, *Zs. angew. Math. Fhys.*, 15, No. 1, 63-66.

Tien, C. L., and D. T. Wasan, (1963) Law of the wall in turbulent channel flow, *Phys. Fluids*, 6, No. 1, 144-145.

Tietjens, O., (1925) Beitrage zur Entstehung der Turbulenz, *Zs. angew. Math. Mech.*, 5, No. 3,200-217.

Tippelskirch, H., (1956) Über Konvektionszellen, insbesondere in fliissigem Schwefel, *Beitr. Phys. Atmosph.*, 29, No. 1, 37-54.

Tollmien, W., (1926) Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgange, *Zs. angew. Math. Mech.*, 6, No. 6, 468-478; (1929) Über die Entstehung der Turbulenz, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, Math.-Phys. Kl . , 21-44; (1930) Beitrag zur Theorie der Turbulenz, *Proc. 3rd Int. Congr. Appl. Mech.*, Stockholm, 1, 105-108; (1935) Ein allgemeines Kriterium der Instabihtat

laminarer Geschwindigkeitsverteilungen, *Nachr. Ges. Wiss. Gottingen*, Math.-Phys. KL, 79-114; (1947) Asymptotische Integration der Storungsdifferentialgleichung ebener laminarer Stromungen bei hohen Reynoldsschen Zahlen, *Zs. angew. Math. Mech.*, 25/27, 33-50, 70-83.

Tollmien, W., and J. Pretsch, (1946) Instabilitat laminar Grenzschichten, *Göttinger Monogr. Uber die deutschen Luftfahrtforsch*, 3, Göttingen.

Tolman, R. C., and P. C. Fine, (1948) On the irreversible production of entropy, *Rev. Mod. Phys.*, 20, No. 1, 51-77.

Townsend, A. A., (1947) The measurement of double and triple correlation derivatives in isotropic turbulence, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 43, No. 4, 560570; (1951) The diffusion of heat spots in isotropic turbulence, *Proc. Roy. Soc.*, A209, No. 1098, 418-430; (1954) The diffusion behind a line source in homogeneous turbulence, *Proc. Roy. Soc.*, A224, No. 1159, 487- 512; (1956) The Structure of Turbulent Shear Flow, Cambridge Univ. Press; (1958) The effects of radiative transfer on turbulent flow of a stratified fluid, *J. Fluid Mech.*, 4, No. 4, 361-375; (1959) Temperature fluctuations over a heated horizontal surface, *J. Fluid Mech.*, 5, No. 2, 209-241; (1961) Equilibrium layers and wall turbulence, *J. Fluid Mech.*, 11, No. 1, 97-120; (1962a) Natural convection in the earth's boundary layer, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 88, No. 375, 51-56; (1962b) Remarks on the Malkus theory of turbulent flow, *Mécunique de la turbulence* (CoW. Intern, du CNRS a Marseille), Paris, Éd. CNRS, 167-180; (1966) The mechanism of entrainment in free turbulent flows, *J. Fluid Mech.*, 26, No. 4,689-715.

Ts'ai, Ko-yeng, (1961) Heat transfer in a turbulent flow of a fluid at high Prandtl numbers, *Inzh.-Fiz. Zhurn.*,4, No. 8, 20-29.

Tsvang, L. R., (1960) Measurement of frequency spectra of temperature fluctuations in the atmospheric surface layer, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. geof iz.,No.8, 1252-1262.

Tseytin, G. Kh., (1963) Propagation of an impurity from a high-altitude source, *Trudy Leningr. Gidromet. In-ta*, No. 15, 10-31.

Tyldesley, J. B., and C. E. Wallington, (1965) The effect of wind shear and vertical diffusion on horizontal dispersion. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 91, No. 388, 158-174(also Discussion: *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* (1966), 92, No. 393, 427-430).

Uberoi, M. S., and S. Corsin, (1953) Diffusion of heat from a line source in isotropic turbulence, *Nat. Adv. Com, Aeronaut. Rep.*, No. 1142.

Uhlenbeck, G. E., and L. S. Ornstein, (1930) On the theory of Brownian motion, *Phys. Rev.*, 36, No. 3, 823-841.

Ukhovskiy, M. R., and V. I. Yudovich, (1963) Equations of stationary convection, *Prikl. Matem. Mekh.*, 27, No. 2, 295-300.

Vager, B. G., (1966) The effect of turbulent energy diffusion in the semiempirical model of the atmospheric surface layer, *Izvestiya AN SSSR*, Ser.fiz. atmos. okeana, 2, No. 9, 920-927.

Van Atta, C. W., (1966) Exploratory measurements in spiral turbulence, *J. Fluid. Mech.*, 25, No. 3,495-512.

Van Driest, E. R., (1956) On turbulent flow near a wall, *J. Aeronaut. Sci.*, 23, No. 11, 1007-1011; (1959) Convective heat transfer in gases. *Turbulent Flows and Heat Transfer* (ed. by C. C. Lin), Princeton Univ. Press, 339-427.

Vasudeva, B. R., (1967) Boundary layer instability experiment with localized disturbance, *J. Fluid Mech.*, 29, No. 4, 745764.

Vaughan, L. M., (1961) The prediction of atmospheric diffusion by using an eddy diffusivity based on the vertical transfer of heat, *J. Meteor.*, 18, No. 1, 43-49.

Velikanov, M. A., (1946) *Dynamics of River-Bed Flows*, Gidrometeoizdat Press, Leningrad-Moscow.

Velte, W., (1962) Uber ein Stabilitatskriterium der Hydrodynamik, Rat. *Mech. Anal.*, 9, No. 1, 9- 20; (1964) Stabilitatsvcrhalten und Verzweigung stationarer Losungen der Navier-Stokesschen Gleichungen, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 16, No. 2, 97-125; (1966) Stabilitat und Verzweigung stationarer Losungen der Navier-Stokesschen Gleichungen beim Tiy, *Arch Rational Mech. Anal.*, 22, No. 1, 1-14.

Venezian, E., and B. H. Sage, (1961) Temperature gradients in turbulent gas streams: effect of viscous dissipation on evaluation of total conductivity, *A.L.Ch.E. J.*, 7, No. 4, 688-692.

Venotte, P., (1958) Les paradoxes de la theorie continue de Tequation de la chaleur, *Compte Rendus Acad. Sci.*, 246, No. 22, 3154-3155.

Veronis, G., (1966) Large-amplitude Benard convection, *J. Fluid Mech.*, 26, No. 1,49-68.

Vulis, L. A., and V. P. Kashkarov, (1965) *Theory of Viscous Fluid Jets*, Nauka Press, Moscow.

Walowit, J., S. Tsao, and R. C. Di Prima, (1964) Stability of flow

between arbitrarily spaced concentric cylindrical surfaces including the effect of a radial temperature gradient, *J. Appl. Mech.*, 31, No. 4, 585593.

Walters, T. S., (1964) The effcct of diffusion in the mean wind direction in atmospheric turbulence, *Mathematika* 11, 119-124; (1965) Diffusion from an elevated point sources into a turbulent atmosphere, *Mathematika*, 12, 49-57.

Walz, A., (1969) *Boundary Layers of Flow and Temperature*, M.I.T. Press, Cambridge, Mass.

Wandel, C. F., and O. Kofoed-Hansen, (1962) On the Eulerian-Lagrangian transform in the statistical theory of turbulence, *J, Geophys. Res.*, 67, No. 8, 3089-3093.

Wasan, D. T., and C. R. Wilke, (1964) Turbulent exchange of momentum, mass, and heat between fluid streams and pipe wall. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 7, 87-94.

Wasow, W., (1953) On small disturbances of plane Couette flow, *J. Res. Nat. Bur. Standards*, 51, 195-202.

Watson, J., (1960a) On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. Pt. 2. The development of solution for plane Poiseuille and for plane Couette flow, *J. Fluid Mech.*, 9, No. 3, 371-383; (1960b) Three-dimensional disturbances in flow between parallel planes, *Proc. Roy. Soc.*, A254, No. 1279, 562-569; (1962) On spatially growing finite disturbances in plane Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.*, 14, No. 2, 211-221.

Wazzan, A. R., T. T. Okamura, and A. M. Smith, (1967) Stability of laminar boundary layers at separation, *Phys. Fluids*, 10, No. 12, 2540-2545.

Webb, E. K., (1958) Vanishing potential temperature gradients in strong convection. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 84, No. 360, 118-125; (1960) An investigation of the evaporation from Lake Eucumbene, *C.S.I.R.O., Div. Meteor. Phys.*, Techn. Pap. No. 10, Melbourne; (1962) Thermal convection with wind shear, Nature, 193, No. 4818, 840-842; (1965) Aerial microclimate. *Mereorol. Monographs*, 6, No. 28, 27-58.

Webster, C. A. G., (1964) An experimental study of turbulence in a density-stratified shear flow, *J. Fluid. Mech.*, 19, No. 2, 221-245.

Wieghardt, K., (1940) Über die Wirkung der Turbulenz auf den Umschlagspunkt, *Zs. angew. Math. Mech.*, 20, No. 1, 58-59; (1944) Uber die turbulente Stromung in Rohr und langs der Platte, *Zs. angew. Math.*

Mech., 24, No. 4, 294-296.

Willis, G. E., and J. W. Deardorff, (1967) Confirmation and renumbering of the discrete heat tlux transitions of Malkus, *Phys. Fluids*, 10, No. 9, 1861-1866.

Willmarth, W. W., and Bo-JangTu, (1967) Structure of turbulence in the boundary layer near the v'dW, *Phys. Fluids*, 10, Supplement, S134-S137. Wilson, B. W., (1960) Note on surface wind stress over water at low and high wind speed, *J. Geophys. Res.*, 65, No. 10, 3377-3382.

Witting, H., (1958) Über den Einfluss der Stromlinienkrummung auf die Stabilitat laminarer Stromungen, *Arch. Rat, Mech. Anal.*, 2, No. 3, 243-283.

Wortmann, F. X., (1955) Untersuchung instabiler Grenzschichtschwingungen in einem Wasserkanal mit der Tellurmethode, *50 Jahre Grenzschichtforschung, Vieweg*, Braunschweig, 460-470.

Wu, J., (1968) Laboratory studies of wind-wave interactions, *J. Fluid Mech.*, 34, No. 1,91-112.

Yaglom, A. M., (1948) Homogeneous and isotropic turbulence in viscous compressible fluids, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. geograf. i geofiz., 12, No. 6, 501-522; (1962) *An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions*, Prentice-Hall, Englewoods Cliffs, N. J.; (1965) Lagrangian turbulence characteristics in a diabatic atmospheric surface layer and in convective jets, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. fiz. atmos. i okeana, 1, No. 2, 157-166; (1969) Horizontal turbulent transport of heat in the atmosphere and the form of the eddy diffusivity tensor. *Fluid Dynamics Transactions*, Vol. 4(ed. by W. Fiszdon, P. Kucharczyk, W. J. Prosnak), Panstwowe wydawnictwo naukowe, Warszawa, 801-812.

Yamada, H., (1964) On the stability to long waves of two-dimensional laminar jet, *Repts . Res. Inst. Appl. Mech.*, 12, No. 43, 1-15.

Yamamoto, G., (1959) Theory of turbulent transfer in nonneutral conditions, *J. Meteor. Soc. Japan*, 37, No. 2, 60-69.

Yamamoto, G., and J. Kondo, (1959) Effect of surface reflectivity for long wave radiation on temperature profiles near the bare soil surface, *Sci. Reports Tdhoku Univ.*, ser. V, Geophysics, 11, No. 1, 1-9.

Yamamoto, G., and A. Shimanuku, (1960) Numerical solution of the equation of atmospheric turbulent diffusion, *Sci. Reports Tôhoku Univ.*, ser V, Geophysics, 12, No. 1, 24-35; (1964) The determination of lateral

diffusivity in diabatic conditions near the ground from diffusion experime n ts , *J. Atmosph. Sci.*, 21, No. 2, 187-196; (1966) Turbulent transfer in diabatic conditions, *J. Meteor. Soc. Japan*, 44, No. 6, 301-307. conditions, *J. Meteor. Soc. Japan*, 44, No. 6, 301-307. Yokoyama, O., (1962a) On the thickness of smoke plume in diabatic surface layer, *J. Meteor. Soc. Japan*, ser. II, 40, No. 2, 83-92; (1962b) On the contradiction and modification of the equation of diabatic wind profile, *J. Meteor. Soc. Japan*, ser. 11,40, No. 6, 359-360.

Yordanov, D. L., (1966) On diffusion from a point source in the surface layer of the atmosphere, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. fiz. atmosf. okeana, 2, No. 6, 576-584; (1967) On diffusion in the wind direction and some asymptotic formulae for surface layer atmospheric diffusion, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. fiz. atmosf. okeana, 3, No. 8, 818-826; (1968a) On some asymptotic formulae describing diffusion in the surface layer of the atmosphere, *Atmosph. Environment* 2, No. 2, 167-180; (1968b) On turbulent diffusion from a steady line source in the surface layer under unstable stratification, *Rev. Pure Appl. Geophys.*, 69, No. 1, 229-236; (1968c) Admixture diffusion from linear source in the surface layer under unstable stratification, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. fiz. atmosf. okeana, 4, No. 6, 677-679.

Yoshihara, H., (1968) Sea-air interaction: A simplified model, *J. Atmosph. Sci.*, 25, No. 5, 729-735.

Yudin, M. I., and M. Ye. Shevets, (1940) Stationary model of the height distribution of wind in a turbulent atmosphere, *Trudy GI. Geofiz. Observ.*, No. 31,42-52.

Yu, Yun-Sheng, and Sun Dah-Dhen (1964) Stability of viscous flow between two rotating coaxial cylinders, *J. Franklin Inst.*, 277, No. 2, 140-149.

Yudovich, V. I., (1965a) Stability of steady flows of viscous incompressible *Doklady AN SSSR*, 161, No. 5, 1037-1040; (1965b) An example of generation of the secondary stationary or periodic flow while losing the stability by laminar flow of viscous incompressible fluids, *Prikl. Mat. Mekh.*, 29, No. 3, 453-467; (1966a) The secondary flows and the instability of the fluid in the annulus between the rotating cylinders, *Prikl. Mat. Mekh.*, 30, No. 4, 688-698; (1966b) On the origin of convection, *Prikl. Mat. Mekh.*, 30, No. 6, 1000-1005; (1967a) Free convection and branching, *Prikl. Mat. Mekh.*, 31, No. 1, 101-111; (1967b) On the stability of convective flows,

Prikl. Mat. Mekh., 31, No. 2, 272-281; (1967c) An example of the loss of stability and of generation of secondary fluid flow in closed vessel, *Marem. Sbornik*, 74(116), No. 4, 565-579.

Zagustin, A. I., (1938) Equations for the turbulent motions of fluids, *Trudy Voronezh. Univ.*, 10, No. 2, 7-39.

Zel'dovich, Ya. B., (1937) Limiting laws for turbulent flows in free convection, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 7, No. 12, 1463-1465.

Zilitinkevich, S. S., (1970) *Dynamics of the Atmospheric Planetary Boundary Layer*, Gidrometeoizdat Press, Leningrad.

Zilitinkevich, S. S., and D. V. Chalikov, (1968a) On the determination of the universal wind and temperature profiles in the surface layer of the atmosphere, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. fiz. atmosf. i okeana, 4, No. 3, 294-302; (1968b) On the computations of the vertical turbulent fluxes in the surface layer of the atmosphere from data of profile observations, *Izvestiya AN SSSR.*, Ser fiz. atmosf. i okeana, 4, No. 9, 915-929. profile observations, *Izvestiya AN SSSR.*, Sex fiz. atmosf i okeana, 4, No. 9, 915-929.

Zilitinkevich, S. S., and D. L. Laykhtman, (1965) Turbulent regime in the atmospheric surface layer, *Izvestiya AN SSSR*,Ser fiz. atmosf. i okeana, 1, No. 2, 150-156.

Zilitinkevich, S. S., D. L. Laykhtman, and A. S. Monin, (1967) Dynamics of the atmospheric boundary layer, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. fiz. atmosf. okeana, 3, No. 3, 297-333.

Zubkovskiy, S. L., (1962) Frequency spectra of the horizontal wind-velocity fluctuations in the atmospheric surface, *Izvestiya AN SSSR*,S qx. geoiiZ., No. 10, 1425-1433; (1967) Experimental study of turbulence characteristics in the atmospheric surface layer above the earth and the sea, Candidate Dissertation, Inst. Phys. Atmosphere. Acad. Sci. USSR, Moscow.

Zubkovskiy, S. L., and L. R. Tsveng, (1966) On the horizontal turbulent heat flux, *Izvestiya AN SSSR*, Ser. fiz. atmosf. okeana, 2, No. 12, 1307-1310.

Zukauskas, A. A., A. A. Šlančiauskas, A. A. Pedisius, and R. V. Ulinskas, (1968) Mass and momentum transfer in a viscous boundary layer flow on a Yiit,in *Heat and Mass Transfer* (Proc. 3rd All Soviet Union Conf., ed. by A. V. Lykov and B. M. Smol'skiy), Vol. 1, Energiya Press, Moscow, 133-140.